Spé PC. Année 2024-2025. Révisions [3]

Exercice 1. 1. Soient A et B deux événéments d'un espace probabilisé. Montrer que $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

Exercice 2. Soit k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k < n$.
1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^k \leq 1 + t^n$.
Indication : distinguer deux cas suivant la valeur de t.
2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X^n est d'espérance finie, alors X^k est d'espérance finie.

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ si n est pair et la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-p)$ si n est impair.
Soit $\omega \in \Omega$. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, en posant :

$$Y(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^*/X_n(\omega) = 1\} \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\,;\text{ et } Y(\omega) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Justifier que $P(Y = 0) = 0$.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Montrer que Y est d'espérance finie égale à $\dfrac{1+p}{1-p+p^2}$.

Exercice 4. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont les carrés sont d'espérance finie. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
• *On dit que M est la matrice de covariance de la famille $(X_1, \cdots, X_n)$.*
1. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = L^TML$ où $L^T = (a_1 \cdots a_n)$.
3. Prouver que les valeurs propres de M sont positives.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.
1. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2. Montrer que $E(\dfrac{1}{X}) \geq \dfrac{1}{E(X)}$. *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
3. *Un exemple.* Soit X une v.a. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $E(\frac{1}{X})$ et retrouver l'inégalité de 2.

Exercice 6. 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré impair. Justifier que P admet au moins une racine réelle.
2. Montrer qu'il est impossible de truquer deux dés (à 6 faces) de sorte que chaque somme obtenue en lançant les deux dés soit équiprobable.
Indications : raisonner par l'absurde. Utiliser les fonctions génératrices et 1.

Exercice 4. $\triangleright$ On rappelle que si X et Y sont deux v.a. dont le carré est d'espérance finie, la covariance de (X, Y), notée $\text{cov}(X, Y)$, est le réel :

$$\text{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. La matrice M est symétrique car pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i) = m_{ji}$. Donc M est diagonalisable d'après le théorème spectral.

2. Commençons par deux rappels utiles :

i) Carré d'une somme de réels. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}$. On a :

$$(u_1 + \cdots + u_n)^2 = (u_1 + \cdots + u_n)(u_1 + \cdots + u_n) = (\sum_{i=1}^{n} u_i) \cdot (\sum_{j=1}^{n} u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j.$$

ii) L'une des deux définitions de la variance. Si Y est une v.a. dont le carré est d'espérance finie, $V(Y) = E\big((Y - E(Y))^2\big)$. Donc :

$$\begin{aligned}
V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) &= E\big(((a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) - E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n))^2\big) \\
&= E\big(((a_1(X_1 - E(X_1)) + \cdots + a_n(X_n - E(X_n)))^2\big) \text{ par linéarité de l'espérance} \\
&= E(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i(X - E(X_i))a_j(X - E(X_j))) \text{ d'après } i) \text{ avec } u_i = a_i(X_i - E(X_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jE\big((X_i - E(X_i))(Y_j - E(Y_j))\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\text{cov}(X_i, Y_j) \text{ par linéarité de l'espérance.}
\end{aligned}$$

Et la somme double précédente est bien égale à ${}^tLML$. En effet, posons $C = ML = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij}a_j$ et

$${}^tLML = (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_ic_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{j=1}^{n} a_jm_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\text{cov}(X_i, Y_j).$$

Remarque. Comme d'habitude, une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ est identifiée à son unique coefficient.

3. Soient λ une valeur propre (réelle) de M et L une colonne propre associée, c'est-à-dire $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ telle que $ML = \lambda L$.

Alors ${}^tLML = {}^tL\lambda L = \lambda{}^tLL = \lambda(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$. Or une variance est positive et on a : $a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, donc d'après 2. :

$$\lambda = \frac{V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n)}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 6. 1. Notons n le degré impair de P. La fonction polynôme $x \mapsto P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_nx^n$, si $a_n > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et, si $a_n < 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$. Donc P admet au moins une racine réelle par le théorème des valeurs intermédiaires car P prend des valeurs négatives et positives.

2. Notons X le résultat obtenu en lançant l'un des dés et Y l'autre résultat. Implicitement les v. a. X et Y sont indépendantes. Donc d'après le cours sur les fonctions génératrices, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_X(x)G_Y(x) = G_{X+Y}(x)\ (*)$$

Posons $p_k = P(X = k)$ (resp. $q_k = P(Y = k)$), $k \in [\![1, 6]\!]$, et raisonnons par l'absurde en supposant que la v.a. $X + Y$, à valeurs dans $[\![2, 12]\!]$, suive la loi uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall j \in [\![2, 12]\!],\ P(X + Y = j) = \frac{1}{11}.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit pour $x \in \mathbb{R}^*$ après simplification par x^2 :

$$(p_1 + p_2x + \cdots + p_6x^5)(q_1 + q_2x + \cdots + q_6x^5) = \frac{1}{11}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})\ (**),$$

l'égalité précédente étant en fait vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car le polynôme

$$(p_1 + p_2X + \cdots + p_6X^5)(q_1 + q_2X + \cdots + q_6X^5) - \frac{1}{11}(1 + X + X^2 + \cdots + X^{10})$$

est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines, à savoir tous les réels non nuls.

On a : $p_6 \neq 0$ (et $q_6 \neq 0$) car $p_6q_6 = \frac{1}{11}$. Considérons alors une racine *réelle* t du polynôme $p_1 + p_2X + \cdots + p_6X^5$ de degré 5 (cf. question 1.) L'égalité $(**)$ implique que t est une racine réelle du polynôme $1 + X + X^2 + \cdots + X^{10}$ dont les racines sont complexes non réelles, à savoir les racines 11-èmes de l'unité (sauf 1). Contradiction.