CCS PSI MATHS2 2024

Rémi Crétois

version du 9 mai 2024

I Convergence de la suite (a_n)

Q 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{-n+1}{2n^2(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où $\boxed{a_{n+1} - a_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}}$.

Par comparaison à une série de Riemann convergente,

$\boxed{\text{la série } \sum (a_{n+1} - a_n) \text{ converge absolument donc converge}}$.

Q 2. D'après le lien suite-série, la série télescopique $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge ssi la suite (a_n) converge.

D'après la question précédente, $\boxed{(a_n) \text{ converge vers un réel } \gamma}$.

Donc $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$, puis $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)}$.

II Application au problème du collectionneur de vignettes

Q 3. Tous les paquets contiennent une figurine et on obtiendra toujours une figurine au premier paquet ouvert. Donc $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$.

Q 4. On a $C = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} C_k^{(i)}$, l'union étant disjointe. De plus, on peut interpréter l'énoncer en affirmant que les événements $(C_k^{(i)})_{k,i}$ sont mutuellement indépendants et de probabilités $\dfrac{1}{n}$.

Donc $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(C_k^{(i)}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^m}$ et $\boxed{\mathbb{P}(C) = \dfrac{n}{n^m} = \dfrac{1}{n^{m-1}}}$.

Pour $m = 1$, l'événement $(N_2 > 1)$ est certain car il faut au moins 2 paquets pour obtenir deux figurines différentes, donc $\boxed{\mathbb{P}(N_2 > 1) = \dfrac{1}{n^0}}$.

Pour $m > 1$, on a $(N_2 > m) = C$ car si le collectionneur obtient toujours la même figurine pour les m premiers achats, il aura besoin d'au moins $m+1$ paquet pour découvrir la deuxième figurine, et réciproquement. Donc $\boxed{\mathbb{P}(N_2 > m) = \dfrac{1}{n^{m-1}}}$.

Q 5. Comme il faut au moins 2 paquets pour découvrir deux figurines différentes, l'ensemble des valeurs possibles pour N_2 est $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(N_2 = m) = \mathbb{P}(N_2 > m-1) - \mathbb{P}(N_2 > m) = \dfrac{1}{n^{m-2}} - \dfrac{1}{n^{m-1}}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(N_2 = m) = \dfrac{n-1}{n^{m-1}}}$.

Q 6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, τ_k est le temps de premier succès lors de répétitions indépendantes de l'épreuve de Bernoulli : on prend un paquet et on découvre une figurine, le succès étant on obtient une figurine différente des $k-1$ déjà trouvées. La probabilité de succès est $\dfrac{n-k+1}{n}$.

Donc $\boxed{\tau_k \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \dfrac{n-k+1}{n}}$.

Q 7. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(\tau_k) = \dfrac{n}{n-k+1}$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(N_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\tau_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en faisant un changement d'indice.

D'après la question 2, $\boxed{\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} n(\ln(n) + \gamma + o(1))}$.

Q 8. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(\tau_1 = x_1, \ldots, \tau_n = x_n) = \mathbb{P}(\tau_1 = x_1)\mathbb{P}_{\tau_1=x_1}(\tau_2 = x_2)\cdots\mathbb{P}_{\tau_1=x_1,\ldots,\tau_{n-1}=x_{n-1}}(\tau_n = x_n)$$

d'après la formule des probabilités composées. Or le nombre de paquets à ouvrir pour découvrir une nouvelle figurine ne dépend pas du nombre de paquet déjà ouverts pour obtenir les figurines précédentes. Donc $\mathbb{P}(\tau_1 = x_1, \ldots, \tau_n = x_n) = \mathbb{P}(\tau_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(\tau_n = x_n)$.

$\boxed{\text{Les variables } \tau_1, \ldots, \tau_n \text{ sont mutuellement indépendantes}}$.

Q 9. Les variables aléatoires τ_1, τ_2, …, τ_n étant deux à deux indépendantes et admettent des variance, N_n admet une variance et $\mathbb{V}(N_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\tau_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2} \leqslant n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)^2} = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Comme la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ est croissante et converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, on obtient $\boxed{\mathbb{V}(N_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}}$.

Q 10. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(N_n)}{\varepsilon^2 n^2 \ln(n)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2 \ln(n)^2}$$

en utilisant la question précédente.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ par encadrement.

Q 11. D'après la question 7, $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{10}$.

Or, $\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \left|\dfrac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\right| + \left|\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} - 1\right|$, donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\right| + \frac{\varepsilon}{10} \geqslant \left|\frac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right|$$

donc l'événement $\left(\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right)$ est inclus dans l'événement $\left(\left|\dfrac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\right| > \dfrac{9\varepsilon}{10}\right)$.

En appliquant la question précédente avec $\dfrac{9\varepsilon}{10}$, on trouve

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\right| > \frac{9\varepsilon}{10}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

III Un première expression intégrale de γ

Q 12. Soit $t > 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{(n+1)t}}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{(n+1)t}$$
$$= \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-(N+1)t})$$

en téléscopant. En passant à la limite, on trouve $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} = \frac{1}{t}}$.

Q 13. Soit $t > 0$. On a $\mathrm{e}^{-t} \in [0, 1[$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^{n} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

D'après la question précédente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

Ainsi, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)}$.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-(n+1)t}$ et $g_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}$.

D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geqslant 0} (f_n - g_n)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et intégrables sur $[0, +\infty[$ avec $\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Les fonctions g_n sont continues sur $]0, +\infty[$ et positives et d'après l'énoncé, les intégrales $\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\ \mathrm{d}t$ convergent, donc les fonctions g_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

Puis, pour tout $t > 0$, $f_n(t) - g_n(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t} \frac{t - 1 + \mathrm{e}^{-t}}{t}$ qui est du signe de $t - 1 + \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} - (-t + 1)$. Or, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc son graphe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, autrement dit, pour tout $t > 0$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 1 - t$, et $f_n(t) - g_n(t) \geqslant 0$.

Par suite, $\int_0^{+\infty} |f_n(t) - g_n(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (f_n(t) - g_n(t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ d'après l'énoncé.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. D'après les questions 1 et 2, la série $\sum_{n \geqslant 0} (a_{n+2} - a_{n+1})$ converge de somme $\gamma - a_1 = \gamma - 1$. De plus, la série $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ est télescopique convergente de somme 1. Donc $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t) - g_n(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(f_n(t)-g_n(t))\ \mathrm{d}t=\gamma-1+1=\gamma}$$

IV Une deuxième expression intégrale de γ

Q 15. On pose $h_n : t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$. Pour tout $t>0$, $h_n(t)=\dfrac{1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k}{t}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{k-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\binom{n}{1}=-n$.

$\boxed{\text{La fonction } h_n \text{ est donc prolongeable par continuité en 0 en posant } h_n(0)=-n}$.

Q 16. On remarque que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}\ \mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{n}(1-t)^n\right]_0^1=\frac{1}{n}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(1-t)^{k-1}\ \mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(1-t)^{k-1}\ \mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale.

Or, pour tout $t>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-t)^{k-1}=\frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)}=h_n(t)$. D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_0^1 h_n(t)\ \mathrm{d}t}$ (l'intégrale étant faussement impropre).

Puis, en effectuant le changement de variable $t=\dfrac{u}{n}$ avec $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{n}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u$.

Enfin, on a $\ln(n)=\displaystyle\int_1^n\frac{1}{u}\ \mathrm{d}u$, donc

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u-\int_1^n\frac{1}{u}\ \mathrm{d}u\\&=\int_0^1\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u+\int_1^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u-\int_1^n\frac{1}{u}\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

et $\boxed{\displaystyle a_n=\int_0^1\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u-\int_1^n\frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u}$.

Q 17. Question très vague.

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{-x+o(1)}$$

donc $\boxed{\displaystyle\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-x}=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t}$ (l'intégrale est complètement arbitraire ici).

Q 18. Soit $t\in[1,+\infty[$. Pour n assez grand ($n\geqslant t$), on a $f_n(t)=\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ d'après la question précédente.

Donc $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers la fonction } t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}}$.

Q 19. La fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}$ étant toujours convexe sur $\mathbb{R}$, on a toujours pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t}\geqslant 1-t$. Or, $\boxed{\text{pour tout } t\in[0,1[,\ 1-t>0, \text{ donc } -t\geqslant\ln(1-t)}$ par croissance du logarithme.

Q 20. La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, $\boxed{\text{la fonction } u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[}$.

Q 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[1,n]$ et sur $]n,+\infty[$ et $f_n(t) \xrightarrow[t\to n]{} 0 = f_n(0)$, donc elle est continue sur $[1,+\infty[$.
De plus, f_n est nulle en dehors de l'intervalle $[1,n]$, donc $\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[}$.

Q 22. On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

La suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur $[1,+\infty[$ converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ qui est continue sur $[1,+\infty[$.
De plus, d'après la question 19, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,n[$, $n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -t$, donc $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.
En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \geqslant n$, $|f_n(t)| = 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $t \in [1,+\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \varphi(t)$. On a de plus prouvé en question 20 que φ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.
D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}$$

Q 23. La fonction $u \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $]0,1]$ et est prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. Donc l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$.

Q 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_n : t \mapsto 1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ sur $[0,1]$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant 1$.
D'après l'inégalité des accroissement finis, g_n est 1 lipschitzienne sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n(t)-g_n(0)| \leqslant t$ donc $|g_n(t)| \leqslant t$.
De plus, g_n est positive sur $[0,1]$, donc pour tout $t \in]0,1]$, $0 \leqslant g_n(t) \leqslant t$ et

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant 1}$$

Q 25. Les fonctions $h_n : t \mapsto \dfrac{g_n(t)}{t}$ sont continues sur $]0,1]$ et pour tout $t \in]0,1]$, $h_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = h(t)$, la fonction h étant aussi continue sur $]0,1]$.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,1]$, $|h_n(t)| \leqslant 1$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}$$

Q 26. D'après les questions 2, 16, 20 et 20 :

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\ \mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t}$$

V Deux autres expressions intégrales de γ

Q 27. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto u(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus,

— $u(x,t)\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction $t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ (car $x-1>-1$).

— $u(x,t)\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et la fonction $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $2>1$).

Donc la fonction $t\mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$.

Q 28. On applique le théorème de dérivation :

— pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (question 27) ;

— pour tout $x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$;

— Pour tout $0<a<b$, tout $x\in[a,b]$ et tout $t\in]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant \varphi(t)$, où $\varphi(t)=\begin{cases}-t^{a-1}\ln(t)\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t\in]0,1]\\ t^{b-1}\ln(t)\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t\in[1,+\infty[\end{cases}$.

La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$ et

— $\varphi(t)\underset{t\to0^+}{\sim} -t^{a-1}\ln(t)\underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-a/2}}\right)$ par croissances comparées et $t\mapsto\frac{1}{t^{1-a/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (car $1-a/2<1$) ;

— $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres,

$\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur tout segment de }]0,+\infty[, \text{ donc sur }]0,+\infty[}$ et

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t}$$

Q 29. Soit $x\in]0,+\infty[$. On fait une intégration par parties sur $\Gamma(x+1)$ en posant $f(t)=t^x$ et $g(t)=-\mathrm{e}^{-t}$, en vérifiant d'abord que $f(t)g(t)\xrightarrow[t\to0]{}0$ et $f(t)g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ (par croissances comparées) :

$$\boxed{\Gamma(x+1)=\left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = x\Gamma(x)}$$

Q 30. On remarque tout d'abord que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$ par stricte positivité de l'intégrale. Donc on peut prendre le logarithme de la formule donnée :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad -\ln(\Gamma(x))=\ln(x)+\gamma x+\ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right). \qquad (*)$$

Par continuité du logarithme, tous les termes étant strictement positifs :

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) &= \ln\left(\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{x}{n}+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Il est sous-entendu dans l'énoncé de la formule de Weierstrass que cette série converge. On va de toutes façons le revérifier. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

— Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

— pour tout $x \in]0,+\infty[$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$;

— pour tout $0 < b$ et tout $x \in]0,b]$, $u_n'(x) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} = -\frac{x}{n(n+x)}$, donc $|u_n'(x)| \leqslant \frac{b}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $]0,b]$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}$.

En dérivant la formule *, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}}$$

Q 31. On remarque que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. En appliquant la formule précédente pour $x = 1$, on trouve :

$$\boxed{\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n}\right) = -\gamma}$$

en télescopant. Avec la question 29, on a $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$ pour tout $x > 0$. Donc $\boxed{\Gamma'(2) = 1 - \gamma}$.

Q 32. On a $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable $u = e^{-t}$ qui est $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement décroissant avec $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$:

$$\boxed{\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_1^0 \ln(-\ln(u))\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(-\ln(u))\,\mathrm{d}u}$$

VI Recherche d'une valeur approchée de γ

Q 33. D'après la question 26,

$$\begin{aligned}\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^A\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^1 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^1\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^1\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + [\ln(u)]_A^1\end{aligned}$$

donc $\boxed{\gamma = -\ln(A) + \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$.

Q 34. La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}-1 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}$. Donc $x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement est aussi développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^k}{(k+1)!}$.
Comme la convergence d'une série entière est normale sur tous les segments de l'intervalle ouvert de convergence, on peut intégrer terme à terme : $\boxed{\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}}$, d'où la convergence et la somme demandées.

Q 35. Soit $x>0$. On fait une intégration par parties en posant $f(u) = -\mathrm{e}^{-u}$ et $g(u) = \frac{1}{u}$ en vérifiant que $f(u)g(u)\xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$:

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u}$$

Q 36. Soit $x>0$, on fait de nouveau une intégration par parties :

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

et encore une :

$$\int_x^{+infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} - 3\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u.$$

En tout,

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{(x^2-x+2)\mathrm{e}^{-x}}{x^3} - 6\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u}$$

donc $\boxed{R = X^2 - X + 2}$.

Q 37. D'après les questions 33, 34 et 36 :

$$\left|\gamma - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + \frac{R(A)\mathrm{e}^{-A}}{A^3} + \ln(A)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + \int_A^{+\infty}\frac{6\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\,\mathrm{d}u\right|$$

Or, pour tout $k \geqslant n > A+1$, $0 \leqslant \dfrac{\frac{A^{k+2}}{(k+2)(k+2)!}}{\frac{A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}} = A\dfrac{k+1}{(k+2)^2} < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$ est alternée. Sa somme est majorée en valeur absolue par son premier terme : $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}\right| \leqslant \dfrac{A^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$.

D'autre part, $\left|\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^4}\, \mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{A^4}\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-A}}{A^4}$, par décroissance de $u \mapsto \dfrac{1}{u^4}$.

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$\boxed{\left|\gamma - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} + \frac{R(A)\mathrm{e}^{-A}}{A^3} + \ln(A)\right| \leqslant \frac{A^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} + 6\frac{\mathrm{e}^{-A}}{A^4}}$$

VII Étude d'une série entière aux bornes de son disque ouvert de convergence

Q 38. Pour tout $n > 1$, $\ln(n) \neq 0$ et $\left|\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right| = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'après la règle de d'Alembert, $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n \text{ vaut } 1}$.

Lorsque $x = \pm 1$, comme $\ln(n)x^n \not\to 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ diverge grossièrement.

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[}$.

Q 39. Pour tout $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$, donc pour tout $x \in [0,1[$, $\boxed{f(x) \geqslant \sum_{n=3}^{+\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty}$.

Q 40. D'après la question 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Donc la série entière $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n \text{ a le même rayon de convergence que } \sum_{n\geqslant 1}\ln(n)x^n \text{ qui vaut } 1}$.

Q 41. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ sont développables en séries entières sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{x-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}.$$

Par produit de Cauchy, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\boxed{\frac{\ln(1-x)}{x-1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)x^n = g(x)}$$

Q 42. D'après la question 2, $\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} -\gamma + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$. Donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| \leqslant M$.

Donc pour tout $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| |x|^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n\end{aligned}$$

d'où $\boxed{|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{Mx}{1-x} \leqslant \frac{M}{1-x}}$.

Q 43. D'après les questions précédentes, pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) > 0$ et $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leqslant \frac{M}{\ln(1-x)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$.

Donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} g(x)}$.

Q 44. On a $c_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ est le même que celui de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ qui vaut 1 (d'après d'Alembert).

De plus, pour $x = \pm 1$, $|c_n x^n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{\text{le rayon de convergence vaut 1 et } h \text{ est définie sur } [-1,1]}$.

Q 45. On remarque que pour tout $n > 1$, $c_n = a_{n-1} - a_n$. Ainsi, d'après la question 2, la série $\sum_{n \geqslant 2} c_n$ converge vers $a_1 - \gamma$.

Donc la série $\sum_{n \geqslant 1} c_n$ converge et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = c_1 + a_0 - \gamma = \gamma}$.

Q 46. D'autre part, pour tout $n > 1$ et tout $x \in]-1,1[$, $|c_n x^n| \leqslant |c_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Donc la série de fonctions continues $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$. En particulier elle converge uniformément, donc sa somme $\boxed{h \text{ est continue sur } [-1,1]}$.

Q 47. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k c_k &= 1 + \sum_{k=2}^{2p}(-1)^{k+1}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{2j+1}\ln\left(\frac{2j-1}{2j}\right) + \sum_{j=2}^{p}(-1)^{2j}\ln\left(\frac{2j-2}{2j-1}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\ln\left(\frac{2j}{2j-1}\right) + \sum_{j=1}^{p-1}\ln\left(\frac{2j}{2j+1}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \ln\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{2j}{2j-1}\right) + \ln\left(\prod_{j=1}^{p-1}\frac{2j}{2j+1}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\prod_{j=1}^{p}\frac{2j}{2j-1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{p-1}\frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{2p(2p)!}$, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$

Q 48. Comme pour tout $n > 1$, $c_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$ et que toutes les séries entières suivantes ont pour rayon de convergence 1, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
h(x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty}c_n x^n &= -x + \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\
&= -x + f(x) - xf(x) + \ln(1-x) + x
\end{aligned}$$

et $\boxed{h(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)}$.

Puis, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{h(x)}{1-x} + g(x)$.

On a déjà justifié la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k c_k$ dans la question 44.

D'après Stirling, $\dfrac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{4p}\sqrt{2\pi p}^4 p^{4p}e^{-4p}}{2p\sqrt{4\pi p}^2(2p)^{4p}\mathrm{e}^{-4p}} = \dfrac{\pi}{2}$. Par continuité du logarithme et en utilisant la somme donnée par l'énoncé et la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k c_k = \ln(\pi)$.

Enfin, comme vu dans la question 46, h est continue en -1, donc :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to(-1)^-]{} \frac{h(-1)}{2} + g(-1) = \frac{\ln(\pi)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

• • • FIN • • •
