Spé PC. Année 2024-2025. Révisions [4]

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a. finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et de même loi.
On pose : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \cdots, a_n\}$.

1. Soient $Z = X - Y$ et $z \in Z(\Omega)$. Montrer que $P(Z = z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(Y = a_i)P(X = a_i + z)$.

2. En déduire que Z et $-Z$ suivent la même loi.

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{1, \cdots, p\}$.
On suppose que $\forall j \in \{1, \cdots, p\}$, $P(X = j) > 0$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = P(Y = i/X = j)$.

1. On considère les colonnes $V = (P(X = i))_{1 \leq i \leq p}$ et $W = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq p}$. Vérifier que $W = AV$.

2. Soit $j \in \{1, \cdots, p\}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij}$. En déduire que 1 est une valeur propre de A.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. a. [Cours] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que M admet au moins une valeur propre complexe.

1. b. En déduire que f admet au moins une valeur propre complexe.

2. Soit λ une valeur propre complexe de f. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par g.

3. On note h l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$. Rappeler la définition de h et utiliser h pour prouver l'existence d'un vecteur non nul de E qui est vecteur propre de f et de g.

4. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Prouver l'existence d'une colonne propre commune à A et à B.

Exercice 4. On lance indéfiniment une pièce de monnaie déséquilibrée, donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « à l'issue du n-ième lancer on a obtenu pour la première fois deux Pile consécutifs » et $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$.
3. En déduire une expression de a_n.
4. Calculer $P(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 5. `[Descendance d'une fleur]`

On dispose à l'instant 0 d'une fleur F_0 pouvant donner naissance à l'instant 1 à deux fleurs, appelées « descendances », avec la probabilité $p \in]0, 1[$, ou mourir. Les descendances (éventuelles) de F_0 peuvent avoir à l'instant 2 des descendances de façon mutuellement indépendantes sous les mêmes conditions que F_0 ou mourir, et ainsi de suite.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'événement « la lignée de la fleur F_0 est éteinte à l'instant n » et $u_n = P(U_n)$.

1. Calculer u_0 et u_1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.
3. Montrer que $\ell = \min(1, \frac{1-p}{p})$.
4. Soit E l'événement : « la lignée de F_0 s'éteint ». Déterminer $P(E)$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. [Question de cours] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. Prouver que $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{rg}(u)$.

2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^m = Id_E$. On considère : $p = \displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f^k = \frac{1}{m}(Id_E + f + \cdots + f^{m-1})$.

2. a. Vérifier que $f \circ p = p$. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ p = p$ et que p est un projecteur.

2. b. Vérifier que $\operatorname{Ker}(p - Id_E) = \operatorname{Ker}(f - Id_E)$. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{tr}(f^k) = \dim \operatorname{Ker}(f - Id_E)$.

Solutions et /ou indications.

Exercice 1. 1. Utilisons le système complet d'évènements (sce) $(Y = a_1), \cdots, (Y = a_n)$. On a :

$$(Z = z) = \bigcup_{i=1}^{n} \big((Z = z) \cap (Y = a_i)\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big((X - Y = z) \cap (Y = a_i)\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big((X = a_i + z) \cap (Y = a_i)\big).$$

Comme les évènements $(X = a_1 + z) \cap (Y = a_1), \cdots, (X = a_n + z) \cap (Y = a_n)$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} P((X = a_i + z) \cap (Y = a_i))$$

et enfin, X et Y étant indépendantes,

$$P(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i + z)P(Y = a_i).$$

2. D'après 1. :

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i + z)P(Y = a_i) = \sum_{i=1}^{n} P(Y = a_i + z)P(X = a_i) \ \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi}\\
&= \sum_{i=1}^{n} P((Y = a_i + z) \cap (X = a_i)) \text{ car } Y \text{ et } X \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{i=1}^{n} P((Y = X + z) \cap (X = a_i)) = \sum_{i=1}^{n} P((Y - X = z) \cap (X = a_i))\\
&= P(Y - X = z) \text{ car } (X = a_1), \cdots, (X = a_n) \text{ est un sce}\\
&= P(-Z = z) = P(Z = -z).
\end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On a :

$$(Y = i) = ((Y = i) \cap (X = 1)) \cup \cdots \cup ((Y = i) \cap (X = p)) = \bigcup_{j=1}^{p} ((Y = i) \cap (X = j))$$

car $(X = 1), \cdots, (X = p)$ est un système complet d'évènements. D'où l'égalité (e_i) :

$$P(Y = i) = \sum_{j=1}^{p} P((Y = i) \cap (X = j)) = \sum_{j=1}^{p} P(Y = i/X = j)P(X = j) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}P(X = j).$$

Et les p égalités $(e_1), \cdots, (e_p)$ obtenues se résument en une égalité matricielle : $W = AV$.

2. Fixons $j \in \{1, \cdots, p\}$. L'application : $A \mapsto P(A/X = j) = P_{X=j}(A)$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$. Donc :

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} P_{X=j}(Y = i) = P_{X=j}((Y = 1) \cup \cdots \cup (Y = p)) = 1$$

car $(Y = 1) \cup \cdots \cup (Y = p)$ est l'évènement certain Ω.

Remarque. On pouvait aussi refaire le calcul. Comme $(Y = 1), \cdots, (Y = p)$ est un système complet d'évènements, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \frac{P(Y = i, X = j)}{P(X = j)} = \frac{1}{P(X = j)}(P(Y = 1, X = j) + \cdots + P(Y = p, X = j)) = \frac{1}{P(X = j)}P(X = j) = 1.$$

Autrement dit, la somme des coefficients (positifs) de chaque **colonne** de A est égale à 1.

Considérons $B = A^T$ la matrice transposée de A. Alors la somme des coefficients (positifs) de chaque **ligne** de B est égale à 1. On en déduit que 1 **est une valeur propre de** B car $BU = U$ si U est la colonne (non nulle) de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont égaux à 1. Donc 1 **est une valeur propre de** A car A et $B = A^T$ ont le même spectre (ayant le même polynôme caractéristique).

Exercice 3. 1. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. On rappelle que z est une valeur propre de M *si et seulement si* z est une racine du polynôme caractéristique de M. Donc M admet au moins une valeur propre complexe car son polynôme caractéristique, de degré $n \geq 1$, admet au moins une racine complexe (Théorème de D'Alembert-Gauss).

1. b. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E où $n = \dim E$. Notons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et considérons une valeur propre complexe λ de M (cf. 1.) Alors λ est une valeur propre de f.

Rappel. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $MX = \lambda X$. Alors $f(x) = \lambda x$ avec $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$, non nul (et réciproquement).

2. Soit $x \in E_\lambda(f)$. On a : $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, c'est-à-dire $g(x) \in E_\lambda(f)$. Donc $E_\lambda(f)$ est stable par g.

3. *i)* h est l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$, qui associe à chaque vecteur x de $E_\lambda(f)$ le vecteur $g(x)$ appartenant à $E_\lambda(f)$ d'après 2. :

$$h : \begin{array}{ccc} E_\lambda(f) & \to & E_\lambda(f) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}.$$

ii) Comme h est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\lambda(f)$, de dimension finie au moins égale à 1, h admet donc au moins une valeur propre complexe γ (même raisonnement qu'en 2. avec $E_\lambda(f)$ à la place de E et h à la place de f). Il existe donc un vecteur *non nul* u de $E_\lambda(f)$ tel que $h(u) = \lambda u$. On a alors : $f(u) = \lambda u$ (car $u \in E_\lambda(f)$) et $g(u) = \gamma u$ car $h(u) = g(u)$ par définition de h. Donc u est à la fois un vecteur propre de f (pour la valeur propre λ) et un vecteur propre de g (pour la valeur propre γ).

4. Notons f (resp. g) l'endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ (de dimension n sur $\mathbb{C}$) canoniquement associé à A (resp. B). Comme $AB = BA$, on a donc : $f \circ g = g \circ f$. D'après 3. il existe $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, non nul, à la fois vecteur propre pour f et pour g, cette dernière affirmation étant équivalente à : la colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle, est une colonne propre pour A et pour B.

Exercice 4. *Indications :* Introduire les événements P_n : « on obtient Pile au n-ème lancer » et F_n : « on obtient Face au n-ème lancer ».

1. Vérifier que $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{4}{9}$, $a_3 = \frac{4}{27}$.

2. Soit $n \geq 2$. Remarquer que $A_{n+2} = (A_{n+2} \cap F_1) \cup (A_{n+2} \cap P_1 \cap F_2)$.

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractérisque : $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$ admet deux racines réelles : $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (\frac{2}{3})^{n+1} + \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n$.

4. Vérifier que $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est donc quasi-certain (ou presque sûr) : on obtient presque sûrement deux Pile consécutifs.

Exercice 5. *Indications :*

1. On a : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 - p$. Vérifier que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit $n \geq 1$. On a : $U_{n+1} = (U_{n+1} \cap U_1) \cup (U_{n+1} \cap \bar{U_1}) = U_1 \cup (U_{n+1} \cap \bar{U_1})$. Donc $u_{n+1} = P(U_{n+1}) = 1 - p + pP_{\bar{U_1}}(U_{n+1})$.

3. Vérifier que $\ell \in \{\frac{1-p}{p}, 1\}$ puis distinguer deux cas :

i) si $p > \frac{1}{2}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1-p}{p}]$. En déduire que $\ell = \frac{1-p}{p}$; *ii)* si $p < \frac{1}{2}$, $\ell = 1$ (car $\ell \in [0, 1]$).

4. Remarquer que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$ et utiliser la propriété de continuité croissante.