

Exercice 1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (*) suivante : toute matrice de F est semblable à une matrice diagonale.

1. Soit G l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. a. Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser $\dim G$.

1. b. Déterminer $F \cap G$.

2. En déduire que $\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Donner deux exemples de sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (*).

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}} dx$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée I_n .

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $A \in \mathcal{A}$, 1_A est la fonction indicatrice de A définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, 1_A(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \text{ et } 1_A(\omega) = 0 \text{ sinon.}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. On pose $N = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note B_j l'événement : «au moins j événements parmi les événements $A_1, \dots, A_n$ sont réalisés».

1. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Exprimer l'événement B_j à l'aide de la variable aléatoire N .

2. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Prouver que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(B_k)$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{\frac{k}{n}/k \in \{1, \dots, n\}\}$. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Exprimer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n))$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(f(X_n))$ à l'aide de $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_0^1 f^2(t) dt$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$.

2. a. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) = 0$.

2. b. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = \int_0^1 f(t) dt$.

2. c. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - \int_0^1 f(t) dt| \geq \varepsilon) = 0$.

Indications : Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^$ tel que pour tout $n \geq N$, $|E(S_n) - \int_0^1 f(t) dt| < \frac{\varepsilon}{2}$ et prouver en raisonnant par l'absurde que pour tout $n \geq N$, $(|S_n - \int_0^1 f(t) dt| \geq \varepsilon) \subset (|S_n - E(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2})$.*

Exercice 5. 1. Soit $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Prouver, avec le théorème de convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n g(x) dx = g(1)$.

Indication : Soit $n \in \mathbb{N}^$. Commencer par effectuer le changement de variable $t = x^n$ dans l'intégrale $\int_0^1 x^n g(x) dx$.*

2. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déduire de la question 1. que $\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$.

3. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

3. a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

3. b. Prouver que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - xt} dt$.

Solutions et /ou indications.

Exercice 1. Indications.

1. a. Comme $G = \text{Vect}(E_{ij}/1 \leq i < j \leq n)$, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
 1. b. Soit $A \in F \cap G$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Comme $A^n = O_n$ (A est nilpotente), $D^n = P^{-1}A^nP = O_n$ d'où $D = O_n$ et $A = O_n$. Donc $F \cap G = \{O_n\}$.
 2. Comme la somme $F + G$ est directe, on a : $\dim F + \dim G = \dim(F \oplus G) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'où $\dim F \leq n^2 - \dim G = \frac{n(n+1)}{2}$.
 3. $D_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (*).
-

Exercice 3. 1. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et $\omega \in \Omega$.

Supposons que $\omega \in B_j$: il existe au moins j entiers $k_1, \dots, k_j$ de $\{1, \dots, n\}$ tel(s) que $\omega \in A_{k_1}, \dots, \omega \in A_{k_j}$. Alors $1_{A_{k_1}}(\omega) = \dots = 1_{A_{k_j}}(\omega) = 1$ et comme $N(\omega)$ est une somme de 0 ou de 1

$$N(\omega) = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}(\omega) \geq 1_{A_{k_1}}(\omega) + \dots + 1_{A_{k_j}}(\omega) \geq j.$$

Réciproquement, si $N(\omega) \geq j$, il existe au moins j entiers $k_1, \dots, k_j$ de $\{1, \dots, n\}$ tel(s) que $1_{A_{k_1}}(\omega) = 1, \dots, 1_{A_{k_j}}(\omega) = 1$, c'est-à-dire au moins j entiers $k_1, \dots, k_j$ de $\{1, \dots, n\}$ tel(s) que $\omega \in A_{k_1}, \dots, \omega \in A_{k_j}$. Donc $\omega \in B_j$.

En conclusion, $B_j = \{\omega \in \Omega / N(\omega) \geq j\} = \{N \geq j\}$.

2. Voir le cours sur les variables aléatoires.

3. Rappelons que, par définition de l'espérance, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $E(1_{A_k}) = 0 \cdot P(1_{A_k} = 0) + 1 \cdot P(1_{A_k} = 1) = P(1_{A_k} = 1) = P(A_k)$. Calculons $E(N)$ de deux façons différentes. D'une part, par linéarité de l'espérance,

$$E(N) = \sum_{k=1}^n E(1_{A_k}) = \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

et d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente avec la v.a. $X = N$, à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$:

$$E(N) = \sum_{k=1}^n P(N \geq k) = \sum_{k=1}^n P(B_k).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(B_k).$$

Exercice 4. 1. Par le théorème du transfert, $E(f(X_n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et

$$V(f(X_n)) = E(f(X_n)^2) - E(f(X_n))^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$$

et par le théorème de convergence des sommes de Riemann utilisé avec les fonctions f et f^2 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = \int_0^1 f(t) dt \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(f(X_n)) = \int_0^1 f^2(t) dt - \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2.$$

2. a. Comme les v.a. $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont aussi deux à deux indépendantes, S_n admet une variance :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} V(f(X_1) + \dots + f(X_n)) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(f(X_k)). \quad (1)$$

Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec S_n :

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

La suite $(V(f(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée car convergente d'après 1. Soit M un majorant de la suite $(V(f(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Par (1), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq V(S_n) \leq \frac{M}{n}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = 0$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure avec (2).

2. b. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(f(X_k))$ et d'après 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = \int_0^1 f(t) dt$.

Le théorème de Cesàro appliqué à la suite convergente $(E(f(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ permet de conclure directement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Remarque. Le théorème de Cesàro implique également que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V(f(X_k)) = \int_0^1 f^2(t) dt - (\int_0^1 f(t) dt)^2$.

On retrouve alors (cf. **2. a.**) que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(f(X_k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V(f(X_k)) = 0$.

2. c. Commençons tout d'abord par introduire un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $|E(S_n) - \int_0^1 f(t) dt| < \frac{\varepsilon}{2}$. Remarquons ensuite que pour tout $n \geq N$, $(|S_n - \int_0^1 f(t) dt| \geq \varepsilon) \subset (|S_n - E(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2})$. En effet, raisonnons par contraposition. Si $\omega \in \Omega$ est tel que $|S_n(\omega) - E(S_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|S_n(\omega) - \int_0^1 f(t) dt| \leq |S_n(\omega) - E(S_n)| + |E(S_n) - \int_0^1 f(t) dt| < \varepsilon$.

Par conséquent, pour tout $n \geq N$, $P(|S_n - \int_0^1 f(t) dt| \geq \varepsilon) \leq P(|S_n - E(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2})$ et on conclut avec **2. a.** et le théorème des gendarmes.

Exercice 5.

1. Effectuons d'abord le changement de variable $t = x^n$ dans $I_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 x^n g(x) dx$ où $\varepsilon \in]0, 1[$, car $t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$ n'est pas dérivable en 0. On a : $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ et $I_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} \int_{\varepsilon^n}^1 t^{\frac{1}{n}} g(t^{\frac{1}{n}}) dt$. D'où

$$n \int_0^1 x^n g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} n I_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon^n}^1 t^{\frac{1}{n}} g(t^{\frac{1}{n}}) dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{n}} g(t^{\frac{1}{n}}) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $t \in [0, 1]$, $h_n(t) = t^{\frac{1}{n}} g(t^{\frac{1}{n}})$.

Justifions maintenant l'utilisation du théorème de convergence dominée avec la suite (h_n) :

a. Convergence simple de la suite de fonctions (h_n) sur $[0, 1]$:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(0) = 0^{\frac{1}{n}} g(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(0) = 0$.

(ii) Si $t \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = g(1)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln t} = 1$ et g est continue (à gauche) en 1.

Donc la suite de fonctions (continues) (h_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction h définie par :

$$h(0) = 0 \text{ et } h(t) = g(1) \text{ si } t \in]0, 1],$$

et h est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

b. Vérification de l'hypothèse de domination :

Comme g est continue sur $[0, 1]$, g est bornée sur $[0, 1]$. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall u \in [0, 1]$, $|g(u)| \leq M$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, 1]$, $|h_n(t)| \leq M$ et la fonction constante $t \mapsto M$ (indépendante de n) est évidemment intégrable sur $[0, 1]$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = \int_0^1 h(t) dt = g(1).$$

2. Intégrons par parties : $\int_0^1 x^n f(x) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$.

Comme $f' \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on a, d'après **1.** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = f'(1)$, i.e. $(n+1) \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx - f'(1) = o_{+\infty}(1)$,

ou encore : $\int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = \frac{f'(1)}{n+1} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{f'(1)}{n+1} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n f(x) dx &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{f'(1)}{n+1} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{f(1)}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} - \frac{f'(1)}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{f(1)}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{f'(1)}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

3. a. Comme $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$, $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{f'(1)}{n^2}$ d'après **2.** ce qui implique $a_n \neq 0$ pour n assez grand.

De même $a_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{f'(1)}{(n+1)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{f'(1)}{n^2}$. Soit $x \neq 0$. On a alors $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| \sim_{n \rightarrow +\infty} |x|$, c'est-à-dire

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|$. Le critère de D'Alembert implique alors que si $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument et que

si $|x| > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n x^n| = +\infty$ et donc que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ diverge grossièrement. Par conséquent, le rayon de convergence de

la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est égal à 1.

3. b. Soit $x \in]-1, 1[$ (fixé). Notons, pour tout $t \in [0, 1]$, $u_n(t) = x^n t^n f(t)$.

La somme de la série de fonctions (de la variable t) $\sum_{n \geq 0} u_n$ s'intègre terme à terme sur $[0, 1]$ car :

(i) Chaque fonction $t \mapsto u_n(t)$ est clairement continue sur $[0, 1]$,

(ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement, donc, par théorème, converge uniformément sur $[0, 1]$:

En effet, f étant continue sur $[0, 1]$, f est bornée sur $[0, 1]$. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq C$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], |u_n(t)| \leq C|x|^n \text{ (indépendant de } t\text{)}$$

et $\sum_{n \geq 0} C|x|^n$ est une série (géométrique) convergente, de raison $|x| \in [0, 1[$.

Donc par le théorème d'intégration terme à terme *sur un segment* de la somme d'une série de fonctions *continues, uniformément convergente sur ce segment* (cf. Chapitre série de fonctions), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-xt} dt.$$