Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Mercredi 26 mars 2025.

Devoir surveillé de mathématiques n° 7.

Exercice 1. **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_a(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f_a(0,0) = a.$$

1. a. Prouver que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. En déduire que f_a est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. b. Déterminer a pour que f_a soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dans cette question, on suppose $a = 0$ et on note plus simplement f la fonction f_0. On a donc :

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

2. a. Montrer que f admet en tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ deux dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

$\triangleright$ *Distinguer* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $(x,y) = (0,0)$.

2. b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $U =]0,+\infty[^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{R}$ est *α-homogène* si :

$$\forall (x,y) \in U, \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

- Si $(x,y) \in U$, on note $g_{x,y}$ la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t > 0$ par :

$$g_{x,y}(t) = f(tx,ty).$$

Calculer $g'_{x,y}(t)$. En déduire que f est α-homogène si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).\ (*)$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est α-homogène, alors :

$$\forall (x,y) \in U,\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1)f(x,y).$$

Indication : Calculer $g''_{x,y}(t)$ où $g_{x,y}$ est la fonction introduite dans la question **1.**

3. *Application.* On pose, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^5+x^3y^2+y^5}{x^3+2y^3}}$. Justifier que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Big)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Indication : on pourra dériver partiellement l'égalité $(*)$ de la question 1.

Exercice 3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$.

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ et $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$ l'intérieur de D.

1. Justifier que f est bornée sur D et atteint sa borne supérieure, notée M.

2. On cherche à déterminer $(x_0,y_0) \in D$ tel que $f(x_0,y_0) = M$.

2. a. Vérifier que f admet deux points critiques dans U. En déduire que $(x_0,y_0) \notin U$.

2. b. Etudier les variations de f sur la frontière de D. En déduire que $(x_0,y_0) = (-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1)$.

Exercice 4. On considère l'application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-4(x+y+z).$$

1. Montrer que $(1,1,1)$ est le seul point critique de f.

2. Déterminer la matrice hessienne de f en $(1,1,1)$.

3. f admet-elle un extremum local en $(1,1,1)$? Justifier votre réponse.

Problème 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Prouver que :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

• On suppose désormais que f est harmonique, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

et on pose pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $M(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\, d\theta$.

2. Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $u(r,\theta) = r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$. Déduire de **1.** que $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$.

3. • On admet que le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre permet de prouver que M est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. a. En déduire que $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & rM'(r) \end{array} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et que pour tout $r \in \mathbb{R}^+$:

$$N'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\right) d\theta.$$

3. b. Déduire de **2.** et **3. a.** que N est constante sur $]0, +\infty[$.

3. c. Prouver que pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta = f(0,0)$.

Problème 2. • Pour tout $x > 1$, on note : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. *a*) Soit $x > 1$. Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^x}$ converge en utilisant le critère de Riemann.

b) Prouver que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer la dérivée $\zeta'(x)$ comme somme d'une série.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $v_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

2. a. Soit $x > 0$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

• On note, pour tout $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

2. b. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Justifier que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$.

2. c. Prouver que S est continue sur $]0, +\infty[$.

3. *Calcul de* $S(1)$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\, dx$, vérifier que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n+1}x^n}{1+x}\, dx$.

En déduire que $|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx| \leq \frac{1}{n+1}$.

3. b. Déterminer la valeur de $S(1)$.

4. Montrer que $\forall x > 1$, $S(x) = \zeta(x)(1 - \frac{1}{2^{x-1}})$.

5. Déduire de **4.** et **3. b.** que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Problème 3.

• Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n. Comme d'habitude, une matrice à une ligne et une colonne est identifiée à son unique coefficient.

▷ Ce problème regroupe quelques propriétés des matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont positives.

1. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que le spectre de M est inclus dans $[0, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X \geq 0$$

où X^T est la matrice (ligne) transposée de la colonne X.

• *On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives.*

Les questions suivantes sont indépendantes.

2. *Dans cette question $n = 2$.* Soit $A \in S_2^+(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(A) \geq 0$ et prouver que $\sqrt{\det(A)} \leq \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A)$.

3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $B^T B \in S_n^+(\mathbb{R})$ où B^T est la transposée de la matrice B.

4. Prouver que $S_n^+(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Prouver que $S_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. *Une relation d'ordre dans $S_n(\mathbb{R})$.*

▷ Soient $U \in S_n(\mathbb{R})$ et $V \in S_n(\mathbb{R})$. Si $V - U \in S_n^+(\mathbb{R})$, on dit que U est inférieure à V et on note : $U \leq V$.

6. a. Prouver les propriétés suivantes :

a) Pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A \leq A$,

b) Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$ et $B \leq A$. Alors $A = B$,

c) Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$ et $C \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$ et $B \leq C$. Alors $A \leq C$,

d) Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$. Alors $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$.

6. b. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que si $I_n \leq A$, alors A est inversible, $A^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$, et $A^{-1} \leq I_n$.