Exercice 2. 1. Soit $(x,y)\in U$ (fixé). La fonction $g_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\forall t>0$,

$$g'_{x,y}(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \tag{1}$$

(i) Supposons f α-homogène. Alors on a aussi : $\forall t>0$, $g'(t)=\dfrac{d}{dt}(t^\alpha f(x,y))=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$.
En utilisant (1), on a donc

$$\forall t>0,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y) \tag{2}$$

D'où $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$ en considérant (2) pour $t=1$.

(ii) Supposons que $\forall (x,y)\in U$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$. Soient $(x,y)\in U$ et $t>0$.
En remplaçant dans l'égalité précédente le couple (x,y) par le couple $(tx,ty)\in U$, on a :

$$\forall t>0,\ tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha f(tx,ty).$$

En considérant à nouveau la fonction $g_{x,y}$ et (1), l'égalité précédente s'écrit : $\forall t>0$, $tg'_{x,y}(t)=\alpha g_{x,y}(t)$.
La résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $g_{x,y}$ sur $]0,+\infty[$ donne :

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall t>0,\ g(t)=Ce^{\alpha\ln(t)}=Ct^\alpha.$$

Or $C=g_{x,y}(1)=f(x,y)$. D'où $\forall (x,y)\in U$, $\forall t>0$, $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$, c'est-à-dire f α-homogène.
2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. D'après (1), on a, d'une part, pour tout $t>0$:

$$\begin{aligned}
g''_{x,y}(t) &= x\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\Big)+y\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\Big)\\
&= x\Big[x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(tx,ty)\Big]+y\Big[x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(tx,ty)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty)\Big]\\
&= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(tx,ty)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty)\text{ car }\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\text{ (théorème de Schwarz).}
\end{aligned}$$

Mais, g étant α-homogène, on a d'autre part : $g''_{x,y}(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}(t^\alpha f(x,y))=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}f(x,y)$.
D'où l'égalité cherchée pour $t=1$: $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\alpha(\alpha-1)f(x,y)\ (=g''_{x,y}(1))$.

3. On constate que cette fonction est 1-homogène sur U : $\forall (x,y)\in U$, $\forall t>0$, $f(tx,ty)=tf(x,y)$.
En dérivant $(*)$ partiellement par rapport à x, on obtient :

$$\forall (x,y)\in U,\ x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0.$$

De même, en dérivant $(*)$ partiellement par rapport à y, on obtient :

$$\forall (x,y)\in U,\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Donc $\forall (x,y)\in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
Finalement, $\forall (x,y)\in U$, $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big)^2=\Big(-\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)\Big).\Big(-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,.\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Problème 1. 1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition, avec pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Puis en rédérivant partiellement $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ par rapport à r et en utilisant le théorème de Schwarz avec f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos\theta\Big[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big]+\sin\theta\Big[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big]\\
&= (\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Dérivons maintenant partiellement $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ par rapport à θ en utilisant le théorème de Schwarz avec f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta[-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)] \\
&\quad -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta[-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)] \\
&= -r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)) + r^2(\sin\theta)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\
&\quad +r^2(\cos\theta)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\
&= -r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r^2(\sin\theta)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r^2(\cos\theta)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Finalement après simplifications, si $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) + (\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\
&= \Delta f\ (r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

2. Comme f est harmonique, on a donc : $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0.$

D'où l'égalité demandée en multipliant l'égalité précédente par r car $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial g}{\partial r})(r,\theta).$

3. a. et b. On va démontrer ce qui était admis dans l'énoncé, à savoir que le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre permet de prouver que M est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

Tout d'abord, $\frac{\partial g}{\partial r}$ existe bien sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \text{ et :}$$

a. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \mapsto g(r,\theta)$ est continue (et donc) intégrable sur $[0,2\pi]$,

b. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $r \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$,

c. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $[0,2\pi]$,

d. *Hypothèse de domination (locale ici) sur* $\frac{\partial g}{\partial r}$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$. Comme les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $(r,\theta) \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et donc bornée sur $\{(r\cos\theta, r\sin\theta)/(r,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi]\}$, partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (c'est une « couronne » fermée de $\mathbb{R}^2$). Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (r,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi],\ |\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)| \leq M$$

(indépendant de r) et $\theta \mapsto M$ est bien intégrable sur $[0,2\pi]$

Donc, par le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall r \geq 0, M'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta))\,d\theta.$$

On montre de même avec le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre que M' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, l'hypothèse de domination locale étant satisfaite car $(r,\theta) \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$, continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, est bornée sur $\{(r\cos\theta,r\sin\theta)/(r,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi]\}$.

Ainsi, pour tout $r \geq 0$, $M''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\,d\theta$ et N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$N'(r) = M'(r) + rM''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta))\,d\theta$$

3. b. et c. On rappelle que $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial g}{\partial r})(r,\theta)$. Soit $r > 0$. D'après 3. a. et 2. :

$$N'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial g}{\partial r})(r,\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2\pi r}[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi r}(\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,2\pi) - \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,0)) = 0$$

car pour tout $r > 0$, $\theta \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est 2π-périodique.

Donc N est constante sur $]0,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ car N est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour tout $r \geq 0$, $rM'(r) = N(r) = N(0) = 0$.

D'où, pour tout $r > 0$, $M'(r) = 0$. On en déduit que M est constante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ car M est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Finalement, pour tout $r \geq 0$, $M(r) = M(0)$, c'est-à-dire $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0,0)\,d\theta = f(0,0)$.

Problème 2. 1. a. et b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $x > 1$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}(= e^{-x\ln(n)})$. On constate que :

i) Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, avec $u_n'(x) = -\ln(n)e^{-x\ln(n)} = -\dfrac{\ln(n)}{n^x}$.

ii) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ car $\forall x > 1$, la série de Riemann d'exposant x converge.

iii) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur chaque segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$ car la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge. En effet, $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} \frac{\ln(n)}{n^x} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ est le terme général d'une série de Bertrand convergente car si $\alpha \in]1, a[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{\ln(n)}{n^a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{a-\alpha}} = 0$ (critère de Riemann en $+\infty$).

Donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ par le théorème de dérivation terme à terme (convergence uniforme et classe $\mathcal{C}^1$).

2. a., 2. b., 2. c. Soit $x > 0$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ est une série alternée convergente par le critère des séries alternées car la suite $(|v_n(x)|) = (\dfrac{1}{n^x})$ est décroissante, de limite nulle. De plus, on a la majoration des restes suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)| \leq |v_{n+1}(x)|,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x > 0,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}. \tag{3}$$

Soit $[a, b]$ un segment quelconque de $]0, +\infty[$. D'après (3), on a donc, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)^a}$.

Chaque fonction R_n est donc bornée sur $[a, b]$ avec $s_n := \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$. La suite de fonctions (R_n) converge donc *uniformément* sur $[a, b]$ vers la fonction nulle car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$ par le théorème des gendarmes. En d'autres termes, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. Et comme chaque fonction v_n est continue sur $]0, +\infty[$, S est continue sur $]0, +\infty[$ par le théorème de continuité (convergence uniforme et continuité) du chapitre série de fonctions.

3. a. et b. Rappelons que pour tout $t \neq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$ $(*)$.

En remarquant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\,dx$, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k\,dx.$$

En utilisant $(*)$ avec $t = -x \neq 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1+(-1)^{n+1}x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.\ (**)$$

De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$. D'après le cours sur l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$.

Comme $\displaystyle|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $(**)$, on obtient finalement :

$$S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

4. Soit $x > 1$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, en regroupant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1-(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{p=1}^{N} \frac{2}{(2p)^x} + \sum_{p=0}^{N} \frac{0}{(2p+1)^x} = \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^x}.$$

Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient : $\zeta(x) - S(x) = \dfrac{1}{2^{x-1}}\zeta(x)$, c'est-à-dire $S(x) = \zeta(x)(1 - \dfrac{1}{2^{x-1}})$.

5. Soit $x > 1$. D'après **4.** $\zeta(x) = \dfrac{S(x)}{1 - e^{(1-x)\ln(2)}}$. Comme S est continue en 1 (cf. **2. c.**), $S(x) \underset{x\to 1}{\sim} S(1) = \ln(2)$ (cf. **3. b.**). En outre $1 - e^{(1-x)\ln(2)} \underset{x\to 1}{\sim} \ln(2)(x-1)$. Donc $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ (quotient d'équivalents).