Exercice 1. 1. a. Le carré d'un réel est un réel positif. Donc

$$x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (*)$$

car $(x^2+y^2-xy)-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2-2xy)=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \in \mathbb{R}^+$.
Si $(x,y)\neq(0,0)$, alors $x^2+y^2>0$ et la fraction $f_a(x,y)$ est bien définie d'après $(*)$ car $x^2+y^2-xy>0$ (donc $\neq 0$).
En outre $f_a(0,0)=a$. La fonction f_a est bien définie en tout couple de $\mathbb{R}^2$.

1. b. *i*) Pour tout $a\in\mathbb{R}$, f_a est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ii) Utilisons l'inégalité $(*)$ de 1. a. Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $0\leq f_a(x,y)\leq \dfrac{2y^4}{x^2+y^2}\leq 2y^2$ car $y^4\leq y^2(x^2+y^2)$.
Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y)=0$ par le théorème de la limite par encadrement car $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0=0$ et $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2y^2=0$.
Donc f_a est continue en $(0,0)$ (et donc sur $\mathbb{R}^2$ d'après *i*)) si et seulement si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y)=f_a(0,0)=a$, c'est-à-dire si et seulement si $a=0$.

2. a. *i*) Pour tout $h\neq 0$, $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{0}{h^3}=0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$.
Pour tout $h\neq 0$, $\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=h$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$.

ii) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^4\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{1}{x^2+y^2-xy}\Big)=y^4\dfrac{y-2x}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et après simplification du numérateur,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4x^2y^3+2y^5-3xy^4}{(x^2+y^2-xy)^2}.$$

2. b. *i*) Les deux dérivées partielles premières sont continues en tout couple $(x,y)\neq(0,0)$ (quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, le dénominateur étant non nul).
Rappel. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ et $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ (comparer les carrés).
ii) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ car d'après $(*)$ et le rappel, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$,

$$0\leq \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|\leq 4y^4\frac{|y-2x|}{(x^2+y^2)^2}\leq 4|y-2x|$$

donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ par le théorème de la limite par encadrement car $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 4|y-2x|=0$.
De même la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ car, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$,

$$0\leq \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|\leq 4\,\frac{4x^2|y|^3+2|y|^5+3|x|y^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 36\sqrt{x^2+y^2}$$

donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par le théorème de la limite par encadrement.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.