**Exercice 1.** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note : $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ et $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$.

**1.** [Cours] Démontrer que $V(a,b,c) = (c-b)(c-a)(b-a)$.

**2.** Déterminer la constante réelle $k$ telle que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $D(a,b,c) = kV(a,b,c)$.

**Exercice 2.** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.

**1.** Vérifier que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2.** *a*) Montrer que l'on définit un endomorphisme $T$ de $E$ en posant, pour tous $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = f(x+1)$.

*b*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $T^n(f)(x)$ où $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n fois}$.

**3.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, alors $|\lambda| \leq 1$. *Indication : considérer* $T^n$.

**4.** *Recherche des éléments propres de* $T$.

*a*) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de $T$.

*b*) Montrer que 1 est une valeur propre de $T$ et préciser $\mathrm{Ker}(T - Id_E)$.

*c*) Montrer que $-1$ n'est pas une valeur propre de $T$. *Indication : considérer* $T^{2n}$.

*d*) Soit $\lambda \in ]0,1[$. Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \lambda^x$. Vérifier que $f_\lambda \in E$ et déterminer $T(f_\lambda)$.
En déduire que $\lambda$ est une valeur propre de $T$ et montrer que $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E)$ est constitué des fonctions $f_\lambda \cdot g$, avec $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 1-périodique.

*e*) Soit $\lambda \in ]-1,0[$. Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = (-\lambda)^x \cos(\pi x)$. Vérifier que $g_\lambda \in E$ et déterminer $T(g_\lambda)$.
En déduire que $\lambda$ est une valeur propre de $T$ et déterminer $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E)$.

**Exercice 3. 1.** Justifier qu'on définit une fonction $f$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

**2.** Soit $x > 0$. Montrer que $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + xt^2}$ converge et calculer $I(x)$.

**3.** Soit $x > 0$. Montrer que $I(x) \leq f(x) \leq I(x) + \dfrac{1}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et prouver que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln x$.

**Exercice 4.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

**1.** Pour tout $x \in [a,b[$, on pose : $h(x) = (f(x) - f(a)) \exp(\dfrac{1}{x-b})$. Justifier que $h$ est dérivable sur $]a,b[$ et préciser $h'$.

**2.** Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{(c-b)^2}$.

**Exercice 5.** Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose : $f(P) = P(X+a)$.

**1.** Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

**2.** Justifier que $A$ est inversible en considérant $f$ et préciser $A^{-1}$.

**Exercice 6.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(AMN) = \mathrm{tr}(ANM)$.

**Exercice 7.** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)|\, dt$.

**2.** Montrer en encadrant $I(x)$ que $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$.

**Exercice 8.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

**1.** Justifier l'existence de $R_n$ et montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

**2.** Justifier que $|2R_n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}| \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. En déduire un équivalent de $R_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**3.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$.

**Exercice 9.** Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = (1 - \dfrac{1}{n})^{X_1 + \cdots + X_n}$.

**1.** *a*) Calculer l'espérance $E(Z_n)$ et la variance $V(Z_n)$ de la variable aléatoire $Z_n$.

*b*) Déterminer la constante réelle $C$ telle que $V(Z_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$.

**2.** Soit $\varepsilon > 0$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Z_n - e^{-\lambda}| \geq \varepsilon)$.

**Exercice 10.** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que les restrictions à $[-1,0]$ et $[0,1]$ sont des fonctions affines. Démontrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension finie à préciser.

**Exercice 11.** Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n + 2t^{2n}}{1 + t^n + t^{2n}}\,dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**1.** Montrer sans utiliser le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**2.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

**3.** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$. *Indication : commencer par effectuer le changement de variable $x = t^n$ dans $u_n$.*

**Exercice 12.** **1.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur $p$ que la propriété $\mathcal{P}_p$ suivante : « si $z_1, \ldots, z_p$ sont des nombres complexes deux à deux distincts et si $a_1, \ldots, a_p$ sont des nombres complexes non nuls, alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_1 z_1^k + \cdots + a_p z_p^k = 0 \Rightarrow |z_1| < 1, \ldots, |z_p| < 1$ » est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathrm{tr}(A^k) = 0$ si et seulement si les valeurs propres complexes de $A$ sont de module strictement inférieur à 1.

**Exercice 13.** **1.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. On pose : $u = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.

**1. a.** Montrer que $u$ est réel en considérant $\bar{u}$.

**1. b.** Soit $\theta \in ]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Exprimer $u$ en fonction de $\sin(\theta)$. En déduire que $u \leq -\frac{1}{4}$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P_n(X) = X^n + 1$.

**2. a.** Justifier que $P_n$ admet $n$ racines simples dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sans calculer les racines de $P_n$.

On note $z_1, \ldots, z_n$ les $n$ racines complexes du polynôme $P_n$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $v_k = \dfrac{1}{z_k - 1}$.

**2. b.** Déterminer un polynôme $V_n$ de degré $n$ dont les racines sont les complexes $v_1, \ldots, v_n$.

*Indication : Commencer par exprimer $z_k$ en fonction de $v_k$.*

**2. c.** En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k = -\frac{n}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k^2 = -\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$.

**2. d.** Déduire de 2. c. que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

**3.** Expliciter les racines de $P_n$ et calculer $\dfrac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n})} + \dfrac{1}{\sin^2(\frac{3\pi}{2n})} + \cdots + \dfrac{1}{\sin^2((2n-1)\frac{\pi}{2n})}$.

**Exercice 14.** Soit $E$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissantes, telles que :

$$\forall n \geq 2,\ nx_n = (n-1)x_{n-2}.$$

**1.** *Un premier exemple.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

**2.** Soit $x \in E$.

**2. a.** Montrer que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

**2. b.** Montrer que la suite $(\dfrac{x_n}{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $x_0 = \dfrac{\pi}{2} x_1$.

**3.** *Un second exemple.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ et $q_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

**3. a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $u_n$ et que $u_n$ est strictement positif.

**3. b.** Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $2u_n = (n-1)u_{n-2}$.

**3. c.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \leq u_{n-1}u_{n+1}$. *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

**3. d.** Montrer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

**4.** Calculer $u_1$. Déduire de 3. d., 3. b., 2. b. que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Exercice 15.** Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, de paramètre $p > 0$.

On considère la variable aléatoire $Y = \lfloor \dfrac{X-1}{r} \rfloor + 1$, où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de $t$.

Déterminer et reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y$.

**Exercice 16.** **1.** Soient $u \in \mathbb{C}^*$ et $v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v| = |u| + |v|$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $v = ku$.

**2.** Déterminer $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|u| = |v| = 1$ et $|u+v| = 2$.

**Exercice 17.** **1.** Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que pour tout $x \in ]-\infty, -a[ \cup ]a, +\infty[$, $f(x) \geq f(0)$.
En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, de degré $n$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Soit $Q(X) = P(X) + P'(X) + \cdots + P^{(n)}(X)$.
Déduire de 1. l'existence d'un réel $c$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq Q(c)$, et finalement que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 0$.

**Exercice 18.** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, inversible, et semblable à son inverse. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geq n$ et que $\mathrm{tr}(A^2) = n \Leftrightarrow A^2 = I_n$.