

Exercice 19. 1. Préliminaire. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note : $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$.

Vérifier que $|a| = a^+ + a^-$ et $a = a^+ - a^-$.

2. Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

2. a. Justifier que $(f - f_n)^+ \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(x) - f_n(x))^+ dx$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

2. b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = 0$.

3. Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx$.

3. a. Utiliser 2. pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 ||f(x)| - |f_n(x)|| dx$.

3. b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (|f_n(x) - f(x)| - ||f_n(x)| - |f(x)||) dx$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

3. c. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = 0$.

Exercice 20. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

1. Déterminer $(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))^\perp$. En déduire que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

2. Montrer que $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_p\| \leq 1$.

3. Montrer que $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_p\| \geq 1$.

Indication : Soit x un vecteur non nul appartenant à $(\text{Vect}(e_2, \dots, e_n))^\perp$. Considérer $\|x\|^2$ et en déduire que $\|e_1\| \geq 1$.

4. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$. Déterminer suivant la valeur de a le rang de la famille (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est égal à $+\infty$.

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et, pour tous $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $f_r(t) = f(re^{it})$.

1. Soit $r > 0$. Prouver que f_r est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π -périodique.

2. Soient $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) e^{-ipt} dt = a_p r^p$.

3. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq C$.

3. a. Montrer que $\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq \frac{C}{r^p}$.

3. b. En déduire que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$, autrement dit que f est constante.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Prouver que $(\int_0^1 f'(x)^2 dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \cdot \int_0^1 f''(x)^2 dx$.

Exercice 24. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique et croissante. Montrer que f est constante.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(A + B)^k$ est une somme de 2^k produits $C_1 \cdots C_k$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $C_i \in \{A, B\}$.

2. On suppose que $AB = O_n$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}((A + B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k)$.

Exercice 26. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $E_0, E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $\dots$, $f_n \in \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n)$ tels que :

• f_1 est injectif, f_n est surjectif et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$.

Démontrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E_k = 0$. *Indication : utiliser la formule du rang.*

Exercice 27. Soient $C > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt.$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.