Exercice 28. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est le polynôme $(X^2-1)(X^2-9)$. A est-elle diagonalisable?

2. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique que A. Justifier que A et B sont semblables.

3. Montrer que A^2 et T ont le même polynôme caractéristique.

4. T est-elle diagonalisable? A^2 et T sont-elles semblables?

Exercice 29. • Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi_{A_k}(z) = \chi_A(z)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Prouver qu'il n'existe pas de suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$. *Indication : Considérer $\chi_{A_k}(i)$ où $i^2=-1$.* .

Exercice 30. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulles.

1. Vérifier que $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)B$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $f \circ f$.

2. Préciser les valeurs propres de f. f est-il diagonalisable?

Exercice 31. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y, l'espérance et la variance de Y.

2. Déterminer la covariance de X et Y.

Exercice 32. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1$ et

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt.$$

0. Vérifier que chaque fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f qu'on ne cherchera pas à déterminer.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Justifier que f est continue sur $[0,1]$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t-t^2)\,dt$.

En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = f(x-x^2)$.

Exercice 33. Déterminer tous les triplets (u,v,w) de complexes non nuls tels que $u+v+w=1$, $uvw=1$ et $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=1$.

Indication : considérer un polynôme bien choisi.

Exercice 34. Soit $\ell \in [0,1[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 35. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note : $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Soit $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x+h)$ et $f(x-h)$ en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale et en déduire que :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On note $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$. Montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 36. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n+1) = \frac{1}{n+1}P(X=n) \text{ et } P(X=-n) = P(X=n).$$

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer $P(X=n)$ en fonction de $P(X=0)$. En déduire $P(X=0)$ et la loi de X.

2. Justifier que X admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Indications et/ou solutions.

Exercice 35. 1. On a : $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)\,dt$ et $f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\int_x^{x-h}(x-h-t)f''(t)\,dt$. D'où

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) - \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)\,dt - \int_x^{x-h}(x-h-t)f''(t)\,dt \ (*)$$

On rappelle que <u>si $a < b$</u> et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a : $|\int_a^b g(t)\,dt| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$. Alors par $(*)$ et l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue :

$$2h|f'(x)| \leq 2M_0 + M_2\int_x^{x+h}(x+h-t)\,dt + M_2\int_{x-h}^{x}(t-(x-h))\,dt.$$

Or $\int_x^{x+h}(x+h-t)\,dt = [-\frac{(x+h-t)^2}{2}]_x^{x+h} = \frac{h^2}{2}$, de même $\int_{x-h}^{x}(t-(x-h))\,dt = \frac{h^2}{2}$ d'où l'inégalité demandée en divisant par $2h > 0$.

2. D'après 1. f' est donc bornée sur $\mathbb{R}$ avec $M_1 \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$ avec $h > 0$ quelconque. On est conduit à distinguer deux cas :

• Supposons $M_2 > 0$. L'étude de la fonction $\phi : t \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$ sur $]0,+\infty[$ montre que ϕ est minimale en $t = \tau = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ et que le minimum $\phi(\tau)$ est égal à $\sqrt{2M_0M_2}$. D'où la majoration : $M_1 \leq \phi(\tau) = \sqrt{2M_0M_2}$.

• Si $M_2 = 0$, f est alors une fonction affine qui ne peut être bornée sur $\mathbb{R}$ que si c'est une fonction constante. Alors f' est la fonction nulle, donc $M_1 = 0$, et l'inégalité demandée est encore vérifiée : $0 \leq 0$!

Exercice 36. *Indications.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = P(X=-n) = \frac{1}{n!}P(X=0)$. On doit avoir : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=-n) + P(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$ car $(X=n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système complet d'évènements. D'où $P(X=0) = \frac{1}{2e-1}$ et la loi de X est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=-n) = P(X=n) = \frac{1}{2e-1}\cdot\frac{1}{n!}.$$

2. On utilise le théorème du transfert. Le critère de D'Alembert jusitifie la convergence absolue des séries $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ et $\sum_{n\geq 1}(-n)P(X=-n)$. Donc X admet une espérance et X est une v.a. centrée : $E(X) = 0$. Le critère de D'Alembert permet également de justifier que X^2 admet une espérance avec : $E(X^2) = \frac{2}{2e-1}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$. En utilisant $n^2 = n(n-1)+n$, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) &= \frac{2}{2e-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}\right) = \frac{2}{2e-1}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}\right) \\ &= \frac{2}{2e-1}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{4e}{2e-1}. \end{aligned}$$