Exercice 37. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)f(1-x) = 1$.
Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1$. *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient B_n et C_n deux variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.
On note E_n l'évènement : « le polynôme $X^2 + B_n X + C_n$ admet deux racines réelles ».
1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n^2 \leq 4n) = 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 1$.

Exercice 39. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.
1. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et diagonaliser A_n.
2. Calculer $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$. *On exprimera les coefficients de L à l'aide des fonctions ch et sh.*

Exercice 40. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.
3. Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. *Indication : considérer* $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Exercice 41. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)^2\,dt$ converge. Pour tout $x \geq 1$, on pose : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.
1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $x_0 > 1$ tel que $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(t)^2\,dt \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$.
En déduire que $\forall x \geq x_0$, $|g(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} |\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,dt| + \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Prouver finalement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Exercice 42. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$.
1. Justifier que n est pair.
2. [Cours] Justifier que le spectre complexe de M n'est pas vide.
Justifier que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, et λ et $\overline{\lambda}$ ont le même ordre de multiplicité.
3. Calculer $\mathrm{tr}(M)$ et $\det(M)$.
4. Donner un exemple d'une telle matrice M si $n = 2$ et si $n = 4$.

Exercice 43. Déterminer toutes les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Indication : On posera : $(u,v) = (x, ye^{\frac{x^2}{2}})$.

Exercice 44. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}$ où C est une constante à déterminer, de deux façons :
a) en encadrant S_n avec deux intégrales, **b)** en faisant intervenir une somme de Riemann.

Exercice 45. Soient $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx$ et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. Vérifier l'existence de I et S et prouver que $I = S$.

Exercice 46. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Prouver que $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,dt \geq e^{-1}$.
Indication : considérer $g(t) = f(t)e^{-t}$.

Exercice 47. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\ z|^n \leq |P(z)|$.

Exercice 48. Soient a, b, c les racines de $P(X) = X^3 - X - 1$. Calculer $\dfrac{1-a}{1+a} + \dfrac{1-b}{1+b} + \dfrac{1-c}{1+c}$.

Exercice 49. 1. Soit $a = e^{\frac{i\pi}{11}}$. Simplifier $a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9$.
2. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11}$.

Exercice 50. Soit $a > 0$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}$. *Indication : poser $t = \tan x$.*