Mécanique

M1

Cinématique des changements de référentiels

Sommaire

Questions de cours

- Référentiel en translation par rapport à un autre : notion de point coïncident, expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement. Citer les lois de composition et les illustrer sur un exemple.
- Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un autre référentiel : notion de point coïncident, expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement.
- Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un autre référentiel : citer les lois de composition, l'expression de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis. Illustration sur un exemple.

.

★ *Prise de notes* : Vous avez déjà pris le bus. Au moment où le bus freine, on se sent projeter vers l'avant (et si on ne se tient pas : boom). Comment expliquer le fait qu'on se sente attiré vers l'avant ? (Laisser un temps de discussion : la force de frottements aurait tendance à nous retenir pour éviter qu'on tombe.)
Le souci vient du fait qu'au moment où le bus freine, le référentiel du bus n'est plus galiléen : les lois de la mécanique que vous avez étudiées en sup' ne peuvent alors pas être appliquées dans le référentiel du bus. On prend du recul : sup' = galiléen systématiquement ; spé = pas forcément.
(En pratique, il existe de très nombreuses situations où le référentiel le plus naturel pour décrire le mouvement n'est pas galiléen. Par exemple : voiture dans un virage, ascenceur qui freine ou accélère, référentiel terrestre (pendule de Foucault, marée, vent géostrophique...).)
La première étape pour traiter la mécanique dans les référentiels non galiléens est de comprendre ce qui change quand on passe d'une description cinématique dans un référentiel (galiléen) à la description du même mvt dans un autre référentiel (non galiléen).

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Avoir l'automatisme de préciser systématiquement, dans tout exercice de mécanique, le référentiel, le repère et le système.
2. Comprendre comment choisir un référentiel et un repère adaptés à la résolution d'un problème.
3. Utiliser les trois repères usuels pour réaliser des projections.
4. Montrer comment se transforment les vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel lors d'un changement de référentiel.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre de la **mécanique du point**.

I Rappels : référentiels et repères

I.1 Référentiel

a Définition et exemples

<u>Définition</u> : Référentiel Ensemble de points de l'espace, immobiles les uns par rapport aux autres, auquel on adjoint une horloge (= une référence pour mesurer le temps).
Tous les mouvements du système sont décrits par rapport à ce référentiel.

En mécanique newtonienne, le temps est absolu et s'écoule de la même façon dans tous les référentiels. On se placera dans cette hypothèse dans ce chapitre, c'est-à-dire que les vitesses v en jeu restent négligeables devant la vitesse de la lumière c.

Le plus souvent, désigner un référentiel reviendra donc simplement à désigner quel solide sera considéré comme fixe.

Exemple : On souhaite décrire le mouvement d'une caisse qui est posée dans un camion qui accélère.

★ Deux référentiels sont pertinents :
- le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre.
- le reférentiel $\mathcal{R}'$ lié au camion.

Suivant les questions posées dans un exercice, on choisit le référentiel d'étude le plus pertinent :

- soit le référentiel dans lequel évolue un opérateur humain,
- soit le référentiel dans lequel la trajectoire du système est la plus simple.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. Lors de la formulation des lois de la dynamique, on supposera le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. On donne alors deux noms aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

- le référentiel $\mathcal{R}$ est le référentiel **absolu** (ou **fixe**).
- le référentiel $\mathcal{R}'$ est le référentiel **relatif** (ou **mobile**).

Quatre référentiels particuliers sont à connaitre.

Quatre référentiels à connaître

- Le **référentiel de Copernic** possède comme origine le centre de masse du système solaire et des axes dirigés vers 3 étoiles lointaines considérées fixes non coplanaires. Il est bien adapté pour l'étude des astres en attraction gravitationnelle avec le Soleil.
- Le **référentiel héliocentrique** (ou référentiel de Kepler) possède comme origine le centre du Soleil et des axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic. En pratique, le Soleil représentant 99,9 % de la masse du système solaire, les référentiels de Copernic et de Kepler sont quasiment confondus.
- Le **référentiel géocentrique** possède comme origine le centre de la Terre et des axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Il est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic. Il est bien adapté pour l'étude des satellites en attraction gravitationnelle avec la Terre.
- Le **référentiel terrestre** (ou le **référentiel du laboratoire**) est lié à la Terre. Il est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique.

b La trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un système dépendent du référentiel

Vous savez déjà que la trajectoire d'un système dépend d'un référentiel. Il en va de même pour sa vitesse et son accélération. On peut même aller plus loin :

★ "Expérience" de cours : je tiens ma trousse à bout de bras et je tourne sur moi-même. Faire le schéma en indiquant le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (prof vers trousse), puis faire l'expérience.

- Référentiel $\mathcal{R}$ terrestre : le vecteur $\vec{u}$ varie dans le temps : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$
- Référentiel $\mathcal{R}'$ lié au prof : le vecteur $\vec{u}$ reste constant (du point de vue des yeux du prof) : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$

La dérivée temporelle de n'importe quel vecteur dépend a priori du référentiel choisi.

⚠ Il est donc indispensable d'indiquer le référentiel dans lequel vous calculez la dérivée d'un vecteur. C'est l'intérêt de la notation : $\left(\dfrac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$.

Vitesse absolue et relative ; accélération absolue et relative

★ Soient O un point <u>fixe</u> du référentiel absolu $\mathcal{R}$, O' un point <u>fixe</u> du référentiel relatif $\mathcal{R}'$ et M le point matériel du système. On définit :

- la vitesse absolue $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$
- la vitesse relative $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$
- l'accélération absolue $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}}$
- l'accélération relative $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'}$

L'objectif de la suite de ce chapitre sera de déterminer la vitesse ou l'accélération absolue connaissant la vitesse ou l'accélération relative du système. Avant d'arriver à cela, rappelons comment on peut décrire mathématiquement les vecteurs position, vitesse et accélération d'un système.

I.2 Repère

a Définition

Définition : Repère Outil mathématique constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires. Un repère permet d'exprimer mathématiquement les vecteurs position, vitesse et accélération d'un système.

★ ⚠ On ne choisit pas un repère en fonction du référentiel. On le choisit en fonction des mouvements possibles du système, de sorte à faciliter la mise en équation.

Fiche-méthode : La résolution d'un exercice de mécanique commence systématiquement par :

- Faire un schéma et décrire qualitativement le mouvement du système.
- Préciser le système.
- Choisir le référentiel d'étude et préciser le ou les deux référentiel(s) utile(s). En dynamique, il faut préciser le référentiel galiléen.
- Préciser le repère utile, associé au référentiel d'étude. Représenter ce repère sur le schéma. Parfois, on devra aussi associer un repère au référentiel absolu.

Exemple 1 : On étudie un pendule placé dans un train en translation rectiligne par rapport au sol. Le train accélère avec une accélération constante $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_x}$.

★
- Faire un schéma de train avec un pendule dedans.
- Système : {Masse M}
- Référentiel $\mathcal{R}$ terrestre (galiléen).
- Référentiel $\mathcal{R}'$ lié au train, en translation par rapport à $\mathcal{R}$.
- Repère associé à $\mathcal{R}'$: cylindrique $(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$

.

Exemple 2 : Une portière s'ouvre à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe (Oz) vertical. On étudie le mouvement d'une balle, assimilée à un point matériel M de masse m, qui se déplace contre cette porte. La balle est lâchée initialement à une distance d de l'axe.

★
Je les laisse chercher.
- Schéma (2D ou 3D). Préciser avec une flèche courbe le sens de rotation.
- Système : {Balle M}
- Référentiel $\mathcal{R}$ terrestre (galiléen).
- Référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la portière, en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}$
- Repère associé à $\mathcal{R}'$: cartésien $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$. Aucun intérêt de se compliquer la tache avec un repère cylindrique, vu qu'il n'y a aucune contrainte sur le fait que la balle doive rester à une certaine distance de l'axe (Oz) : le mouvement de la balle ne dessinera pas un cylindre !

.

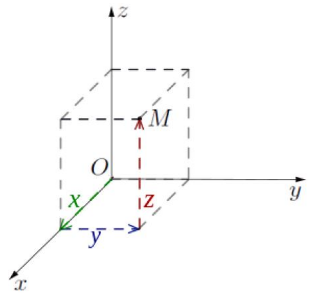
★

Rappelons désormais quelques propriétés des trois repères couramment utilisés en physique.

b Repère cartésien

Base

En coordonnées cartésiennes, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (x,y,z).



Le vecteur position est : $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire est alors :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z} \tag{I.1}$$

c Repère cylindrique

Base locale

En coordonnées cylindriques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r,θ,z).

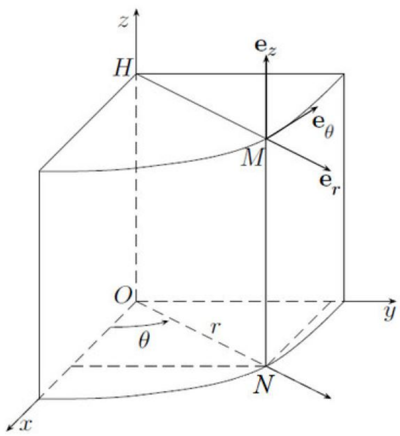
Le vecteur position est : $\vec{r} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

Déplacement élémentaire

Rappelons les déplacements élémentaires selon les trois directions de la base locale cylindrique :

★

- si r varie de $\mathrm{d}r$ à θ et z fixés, le point matériel se déplace de $\mathrm{d}r\vec{e_r}$;
- si θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r et z fixés, le point matériel se déplace de $r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}$;
- si z varie de $\mathrm{d}z$ à r et θ fixés, le point matériel se déplace de $\mathrm{d}z\vec{e_z}$.



Ainsi le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

★

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$$

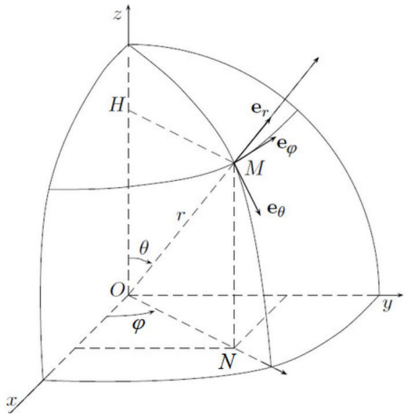
> **Exercice :** Exprimer le vecteur vitesse dans les coordonnées cylindriques.
>
> Utiliser l'expression du déplacement élémentaire :
>
> ★
>
> $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$$

d Repère sphérique

Base locale

En coordonnées sphériques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r,θ,φ).

Le vecteur position est : $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$



Déplacement élémentaire

Rappelons les déplacements élémentaires selon les trois directions de la base locale sphérique :

- si r varie de $\mathrm{d}r$ à θ et φ fixés, le point matériel se déplace de $\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}$;
- si θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r et φ fixés, le point matériel se déplace de $r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$;
- si φ varie de $\mathrm{d}\varphi$ à r et θ fixés, le point matériel se déplace de $r\ \sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$.

Ainsi le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\ \sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

Le vecteur vitesse se déduit de manière similaire à précédemment.

Exercice : Exprimer le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ en fonction des vecteurs de la base sphérique $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$.

★ Si besoin, refaire un schéma avec uniquement les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. Penser à vérifier le résultat en prenant $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

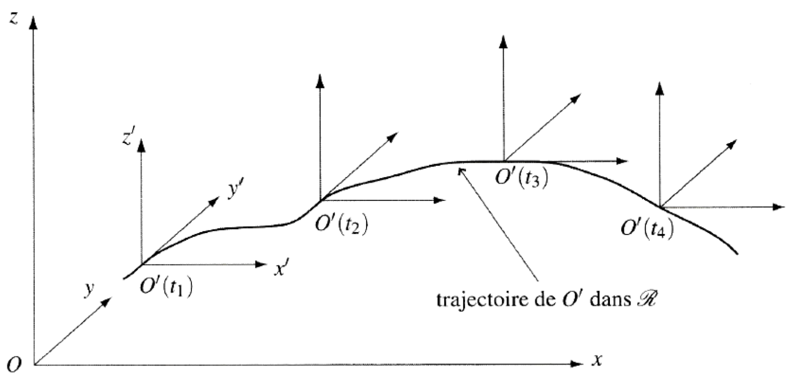
$$\overrightarrow{e_z} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$$

II Référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$

Dans le cadre du cours, on va établir des formules générales valables pour n'importe quel point matériel M. On choisit alors d'associer un repère cartésien $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ au référentiel $\mathcal{R}$ et un repère cartésien $(O',\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

II.1 Qu'est-ce qu'un mouvement de translation ?

Définition : Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ si les directions et les sens de $\overrightarrow{e_{x'}}$, $\overrightarrow{e_{y'}}$ et $\overrightarrow{e_{z'}}$ sont fixes dans $\mathcal{R}$.



Exemples : Selon la nature de la trajectoire du point O' dans le référentiel $\mathcal{R}$, on parlera de **translation rectiligne**, **translation circulaire**, **translation elliptique**, etc.

Citer des exemples de référentiel en translation rectiligne, translation circulaire ou translation elliptique par rapport à un autre.

★

- Translation rectiligne : véhicule de transport en ligne droite, ascenseur...
- Translation circulaire : nacelle d'une grande roue
- Translation elliptique : réf géocentrique par rapport au réf de Copernic

On insiste : ne pas confondre translation et translation rectiligne.

Propriétés dans le cas d'un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$

★

- Les vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}$, $\overrightarrow{e_{y'}}$ et $\overrightarrow{e_{z'}}$ étant fixes dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

- Tous les points fixes du référentiel $\mathcal{R}'$ ont le même type de trajectoire, la même vitesse $\vec{V}(t)$ et la même accélération $\vec{A}(t)$ dans $\mathcal{R}$.

II.2 Point coïncident

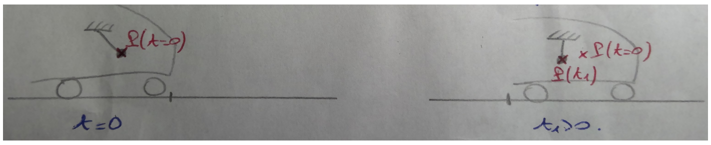
Définition : Point coïncident

Le **point coïncident** avec le point M à l'instant t, est le point P, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$, qui est confondu avec le point M à l'instant t.

Etant donné que le point M se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le point coïncident change à chaque instant t.

Pour plus de clarté :

★



Exercice : Déterminer la vitesse et l'accélération du point coïncident dans le cas d'un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse $\vec{V}(t)$ et à l'accélération $\vec{A}(t)$ par rapport à $\mathcal{R}$.

★ Par définition, le point coïncident est fixe dans $\mathcal{R}'$. Donc : $\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = \vec{V}(t)$ et $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}} = \vec{A}(t)$

Définitions : Vitesse d'entraînement et accélération d'entraînement

★ La **vitesse d'entraînement** $\vec{v_e}(M,t)$ et l'**accélération d'entraînement** $\vec{a_e}(M,t)$ sont la vitesse et l'accélération du point coïncident dans le référentiel $\mathcal{R}$. Si le point M restait fixe dans $\mathcal{R}'$, alors $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v_e}(M,t)$ et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a_e}(M,t)$.

Donc, dans le cas de référentiels en translation, on a :

$$\vec{v_e}(M,t) = \vec{V}(t) \qquad \text{et} \qquad \vec{a_e}(M,t) = \vec{A}(t)$$

★ On barre au tableau pour voir qu'ici $\vec{v_e}$ et $\vec{a_e}$ ne dépendent pas du point M.

II.3 Loi de composition des vitesses

★

Pour faire le lien entre la vitesse d'un point M dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on utilise la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

L'objectif est de déterminer la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc on dérive dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{O pt fixe de } \mathcal{R}} \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

On décompose $\overrightarrow{O'M}$ dans le repère associé à $\mathcal{R}'$ (car on veut faire apparaître la vitesse relative) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'M} &= x'(t)\overrightarrow{e_{x'}} + y'(t)\overrightarrow{e_{y'}} + z'(t)\overrightarrow{e_{z'}} \\
\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{x'}} + x'(t)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{y'}} + y'(t)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{z'}} + z'(t)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} \\
&= \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$$

Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation

Pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse $\vec{V}(t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v_e}(t)$$

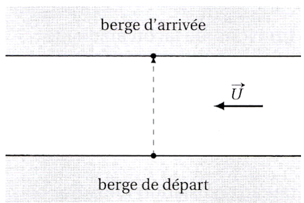
avec $\vec{v_e}(t) = \vec{V}(t)$ la vitesse d'entraînement.

Interprétation :

★ Si M restait fixe dans $\mathcal{R}'$, i.e. si $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$, alors on retrouve bien que $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v_e}(t)$: cohérent avec la notion de pt coïncident.

Remarque : La démonstration précédente s'est appuyée sur deux éléments : la relation de Chasles et le caractère absolu du temps.

Exercice : Un nageur compte traverser une rivière et rejoindre l'autre rive. On suppose que les berges sont parallèles entre elles. On note $\vec{U}$ la vitesse du courant supposée parallèle aux berges.



Dans quelle direction doit-il nager pour arriver sur l'autre rive en face de son point de départ ? On déterminera l'angle θ par rapport au trajet en ligne droite.

A.N. : Au niveau de Nantes, la Loire a un courant moyen de $2.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Aux JO de Paris, le Chinois Pan Zhanle a battu le record du monde du 100 m nage libre en 46.4 s.

★ Référentiels, repère cartésien avec $\overrightarrow{e_x}$ (horizontal) et $\overrightarrow{e_y}$ (vertical), système.
Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{U} + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$. Or, $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ doit être selon $\overrightarrow{e_y}$. Faire un schéma en plaçant les vecteurs vitesses. On en déduit :

$$\sin(\theta) = \frac{U}{\left\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}\right\|}$$

Analyse : possible que si $\left\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}\right\| > U$: cohérent (explique pourquoi il est si dangereux de se baigner dans la Loire !)
A.N. (unités !!) : $\theta = 19°$

II.4 Loi de composition des accélérations

De manière similaire, pour relier l'accélération du point M dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, il suffit de dériver deux fois la relation de Chasles dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

Or,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_{z'}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$$

Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en translation

Pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à l'accélération $\vec{A}(t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a_e}(t)$$

avec $\overrightarrow{a_e}(t) = \vec{A}(t)$ l'accélération d'entraînement.

Interprétation : A nouveau, si M était fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$, alors $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a_e}(t)$.

II.5 Cas particulier de la translation rectiligne uniforme

Dans le cas bien particulier d'une translation rectiligne uniforme, la vitesse d'entraînement est une constante : $\vec{V}(t) = \overrightarrow{\text{cste}}$. On peut alors choisir de définir le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ tel que : $\vec{V} = V\overrightarrow{e_x}$.

De même, comme il s'agit d'une translation, on peut choisir les vecteurs unitaires du repère associé à $\mathcal{R}'$ identiques à ceux de $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{e_{x'}} = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_{y'}} = \overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_{z'}} = \overrightarrow{e_z}$.

On peut désormais projeter la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V + \dot{x}'(t)\\ \dot{y}(t) &= \dot{y}'(t)\\ \dot{z}(t) &= \dot{z}'(t)\end{aligned}$$

★ On intègre par rapport au temps :

$$\begin{aligned}x(t) &= Vt + x'(t) + cste\\ y(t) &= y'(t) + cste'\\ z(t) &= z'(t) + cste''\end{aligned}$$

On fait alors souvent le choix de définir l'origine des temps tel qu'à $t = 0$, les origines O et O' des deux repères soient confondues. On obtient alors avec cette condition initiale :

$$0 = cste \qquad \text{et} \qquad 0 = cste' \qquad \text{et} \qquad 0 = cste''$$

c'est-à-dire :

$$x(t) = Vt + x'(t)$$
$$y(t) = y'(t)$$
$$z(t) = z'(t)$$

On appelle ces relations la **transformation de Galilée**. La loi de composition des vitesses est d'ailleurs parfois nommée **loi de composition galiléenne** des vitesses, dans le cas de deux référentiels en translation rectiligne uniforme.

III Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$

III.1 Qu'est-ce qu'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ ?

Définition : Un référentiel $\mathcal{R}'$ est en **rotation uniforme** autour de l'axe fixe Δ du référentiel $\mathcal{R}$, si tous les points fixes dans $\mathcal{R}'$ sont animés dans $\mathcal{R}$ d'un mouvement circulaire uniforme de même axe fixe Δ et de même vitesse angulaire $\Omega = \text{cste}$.

On appelle alors **vecteur rotation** de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ et noté $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur dont :

- $\left\|\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\right\| = \Omega$;
- la **direction** est celle de l'axe de rotation Δ ;
- le **sens** indique, par la règle de la main droite, le sens de rotation algébrique.

★ Schéma avec un plateau tournant, pour représenter le vecteur rotation (illustration simple, sans définir de repère).

III.2 Point coïncident

Déterminons la vitesse d'entraînement $\vec{v_e}(M,t)$ et l'accélération d'entraînement $\vec{a_e}(M,t)$.

★ On s'intéresse donc à la vitesse et l'accélération du point coïncident P dans le référentiel $\mathcal{R}$. Quel est le mouvement du point P ?
Schéma en plaçant le pt P + axe Δ + trajectoire de P dans $\mathcal{R}$. Laisser de la place. Plus tard, ajouter :
- "H : projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation"
- O et les vecteurs du repère cylindrique

Dans $\mathcal{R}$, P décrit un mouvement circulaire uniforme, d'axe Δ et de rayon $r = \text{cste} = HP$.

★ Repère associé à $\mathcal{R}$: cylindrique d'axe Δ

Exercice : Exprimer la vitesse et l'accélération du point P dans le référentiel $\mathcal{R}$.

★ $\overrightarrow{OP} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ $\quad \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = r\Omega\vec{e_\theta} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}$ $\quad \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}} = -r\Omega^2\vec{e_r} = -\Omega^2\overrightarrow{HP}$

Vitesse et accélération d'entraînement pour $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme

$$\vec{v_e}(M,t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{et} \qquad \vec{a_e}(M,t) = -\Omega^2\overrightarrow{HM}$$

avec :

- O : un point de l'axe fixe Δ
- H : le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ

★ Barrer au tableau pour voir qu'ici $\vec{v_e}$ et $\vec{a_e}$ ne dépendent pas du temps.

Remarque : On peut déterminer une autre expression (moins pratique) de l'accélération d'entraînement :

★
$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \cdots = -r\Omega^2\vec{e_r} = \vec{a_e}(M)$$

Remarque : Dans le calcul de la vitesse et de l'accélération d'entraînement, on a utilisé deux formules :

- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} = \Omega\vec{e_\theta} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e_r}$
- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} = -\Omega\vec{e_r} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e_\theta}$

Remarque : Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$, l'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée dans $\mathcal{R}$ de la vitesse d'entraînement.

III.3 Formule de dérivation vectorielle

a Dérivée dans $\mathcal{R}$ d'un vecteur unitaire de $\mathcal{R}'$

Dans cette sous-partie, afin de démontrer des formules valables pour n'importe quel point M dans le cas d'un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$, on choisit :

- d'associer un repère cartésien $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ à $\mathcal{R}$. On place à nouveau le point O sur l'axe de rotation et on oriente $\vec{e_z}$ de sorte que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega\vec{e_z}$.
- d'associer un repère cartésien $(O', \vec{e_{x'}}, \vec{e_{y'}}, \vec{e_{z'}})$ à $\mathcal{R}'$. On peut choisir, pour simplifier les calculs, de confondre les points O et O' ($O = O'$) et de confondre les vecteurs $\vec{e_z}$ et $\vec{e_{z'}}$ ($\vec{e_z} = \vec{e_{z'}}$).

Schéma avec les deux repères et l'angle θ.
On décompose sur la base associée à $\mathcal{R}$:

★
$$\begin{aligned} \vec{e_{x'}} &= \ \cos\theta\vec{e_x} + \ \sin\theta\vec{e_y} \\ \vec{e_{y'}} &= -\ \sin\theta\vec{e_x} + \ \cos\theta\vec{e_y} \\ \vec{e_{z'}} &= \vec{e_z} \end{aligned}$$

On dérive dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e_{x'}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} &= -\Omega\ \sin\theta\vec{e_x} + \Omega\ \cos\theta\vec{e_y} \\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e_{y'}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} &= -\Omega\ \cos\theta\vec{e_x} - \Omega\ \sin\theta\vec{e_y} \\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e_{z'}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

On remarque alors que, quelque soit le vecteur unitaire $\vec{e_{i'}}$ du repère associé à $\mathcal{R}'$, on peut écrire :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e_{i'}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e_{i'}}$$

b Dérivée dans $\mathcal{R}$ d'un vecteur quelconque

Pour obtenir la formule générale, il suffit alors de décomposer un vecteur $\vec{u}$ quelconque dans la base associée à $\mathcal{R}'$:

$$\vec{u} = u_{x'}(t)\vec{e_{x'}} + u_{y'}(t)\vec{e_{y'}} + u_{z'}(t)\vec{e_{z'}}$$

On dérive alors dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Après calculs, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}$$

III.4 Loi de composition des vitesses

Appliquons simplement la formule de dérivation vectorielle précédente dans le cas du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Or, $O = O'$. On identifie donc les vitesses du point M dans les deux référentiels :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Loi de composition des vitesses pour $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v_e}(M)$$

avec la vitesse d'entraînement $\vec{v_e}(M) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$ où le point O est un **point de l'axe de rotation**.

Interprétation : A nouveau, si M était fixe dans $\mathcal{R}'$, alors $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v_e}(M)$.

Illustration : Un enfant se déplace, à vitesse constante, vers le centre d'un carrousel en rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe.

Représenter sur un schéma les différents vecteurs vitesses de la loi de composition des vitesses.

★ Schéma + préciser la trajectoire qu'a l'enfant dans le référentiel $\mathcal{R}$, et vérifier la cohérence.

III.5 Loi de composition des accélérations

De même que pour la loi de composition des vitesses, on applique la formule de dérivation vectorielle avec le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$:

★

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\end{aligned}$$

En identifiant les différents termes :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Loi de composition des accélérations pour $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a_c}(M) + \vec{a_e}(M)$$

avec :

- l'**accélération de Coriolis** $\vec{a_c}(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$.
- l'**accélération d'entraînement** $\vec{a_e}(M) = -\Omega^2\overrightarrow{HM}$ avec H **le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation**.

Interprétations :

1. Si le point M reste fixe dans $\mathcal{R}'$, alors :
   - $\vec{a_c}(M) = \vec{0}$
   - on retrouve alors bien : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a_e}(M)$

★ 2. L'accélération de Coriolis dépend de la vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et orthogonale au mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3. L'accélération d'entraînement est dirigée du point M vers l'axe de rotation : on dit qu'elle est axipète.

Illustration : On reprend le cas de l'enfant se déplaçant à vitesse constante vers le centre d'un carrousel en rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe.

Représenter sur un schéma les différents vecteurs accélérations de la loi de composition des accélérations.

★ Schéma. Cohérent avec le fait que l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la trajectoire.

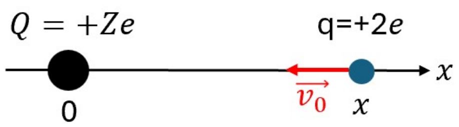
Récapitulatif

$\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$
★ $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v_e}(t)$ ★ avec $\vec{v_e} = \vec{V}(t)$	★ $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v_e}(M)$ ★ avec $\vec{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ si O : pt de l'axe de rotation
★ $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a_e}(t)$ ★ avec $\vec{a_e} = \vec{A}(t)$	★ $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a_c}(M) + \vec{a_e}(M)$ ★ avec $\vec{a_c}(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a_e} = -\Omega^2\overrightarrow{HM}$ avec H projeté orthogonal sur l'axe de rotation

Exercices

Ce TD contient un exercice associé au chapitre M1 (ex. 4) et quatre exercices de révisions de sup'.

Ex. 1 Bombardement d'une particule α



On note e la charge électrique élémentaire. Une particule α (noyau d'hélium de masse m et de charge $q = +2e$) est lancée vers un noyau immobile de charge $Q = +Ze > 0$ placé en O. On étudie le mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La trajectoire de la particule α est portée par la demi-droite (Ox), la particule venant initialement de l'infini avec la vitesse $\vec{v}_0$.

La charge Q placée en O exerce sur la particule α une force de Coulomb $\vec{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$. On néglige l'influence de la pesanteur.

1. Décrire qualitativement le mouvement de la particule α.
2. Justifier que la force $\vec{F}$ est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle électrique dont elle dérive. On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.
3. En déduire l'énergie mécanique de la particule α. Montrer que cette énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
4. Déterminer la distance minimale d à laquelle la particule α s'approche du noyau de charge Q.

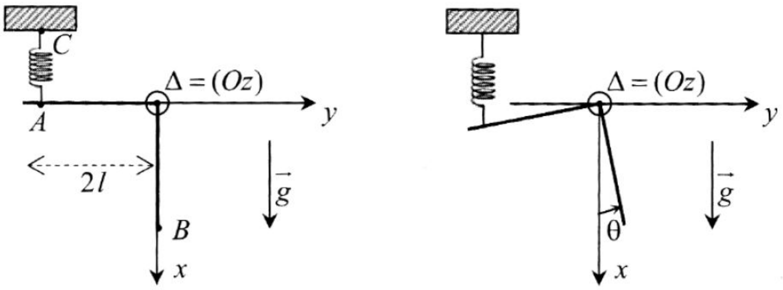
Correction de l'exercice 1

- Système : {Particule α}
- Référentiel du laboratoire galiléen

1. Comme $qQ > 0$, la force $\vec{F}$ est répulsive. Ainsi, la particule va s'approcher à une distance d du noyau, puis rebrousser chemin et avoir une trajectoire vers $x = +\infty$.
2. Cherchons s'il existe une fonction E_p telle que
$$\mathrm{d}E_p = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}r}$$
On se place dans la base cartésienne pour effectuer le produit scalaire :
$$\mathrm{d}E_p = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}$$
Toute fonction du type
$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} + \text{cste}$$
convient. Ainsi, la force $\vec{F}$ est conservative et on choisit par convention
$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}$$
3. La seule force agissant étant $\vec{F}$, on en déduit que
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 x}$$
Aucune force non conservative ne travaille : l'énergie mécanique se conserve.
4. TEM entre l'instant initial (particule à l'infini) et l'instant où la particule est à la distance d (vitesse nulle) :
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d} \Rightarrow d = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}$$
On vérifie la cohérence avec le sens physique et on remarque que cette distance n'est jamais strictement nulle.

Ex. 2 (*Oral CCINP MP 2022*) Oscillations d'un solide soumis à une force élastique

Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant un angle droit entre elles. Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2ℓ. (S) peut tourner autour d'un axe horizontal $\Delta = (Oz)$ et possède un moment d'inertie $J = 8/3m\ell^2$. La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale.



1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.
2. On se propose d'étudier les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit, on pourra considérer que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.
3. Déterminer l'expression de la période en fonction de m, g, k et ℓ.

Correction de l'exercice 2

Voir corrigé manuscrit à la fin du poly

Ex. 3 (*Inspiré de Ecrit Centrale MP 2018*) Mission Parker-Solar-Probe

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page[3]

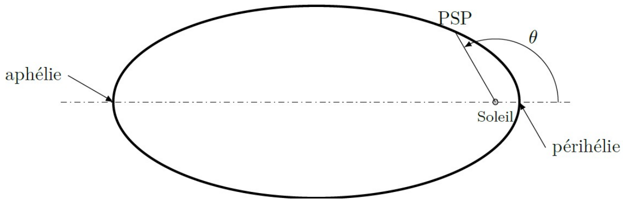
On rappelle que la Terre décrit une trajectoire quasi-circulaire autour du Soleil, de rayon $r_T = 1$ u.a. (unité astronomique, 1 u.a. $\simeq 1.5 \times 10^{11}$ m).

1. Démontrer la 3ème loi de Kepler dans le cas de l'orbite circulaire de la Terre. On admettra dans la suite que cette loi est valable également pour une orbite elliptique.

La sonde Parker Solar Probe (PSP) de masse m, dont le lancement a été effectué en 2018 et dont la mission va se terminer en 2025, s'approche à une distance $r_p = 9{,}6R_s$ du centre du Soleil. La réalisation des objectifs scientifiques de la mission dépend de la durée passée par la sonde en-deçà de la distance $r_{10} = 10R_s$ au centre du Soleil.

2. L'orbite finale de PSP autour du Soleil est une ellipse de distance au périhélie $r_p = 4.6 \times 10^{-2}$ u.a. et de distance à l'aphélie $r_a = 0{,}73$ u.a. En déduire la période de révolution, en jours, de la sonde.

Dans le plan de l'orbite de la sonde, on note θ l'angle entre le grand axe de l'orbite et le rayon joignant le centre du Soleil et la sonde. On repère la position de PSP par un point matériel M de coordonnées polaires (r,θ) d'origine au centre S du Soleil.



3. Rappeler et justifier les deux lois de conservation usuelles dans le cadre de l'étude mécanique d'un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservatif.
4. Mettre l'énergie mécanique de la sonde sous la forme $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{eff}(r)$ et donner l'expression de $E_{eff}(r)$.

---

[3] **5.** En utilisant le résultat de la Q.4, exprimer l'énergie mécanique au périhélie et à l'aphélie. $v_p = 1.9 \times 10^5$ m s^{-1}. **7.** Supposer que la portion utile de la trajectoire s'effectue à $r \approx r_p$.

5. Déterminer la vitesse v_p de la sonde à son périhélie.

L'équation polaire de la trajectoire elliptique s'écrit $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\,\cos(\theta)}$ avec p et e des constantes positives.

6. Exprimer e et p en fonction de r_a et r_p. Calculer leurs valeurs numériques.
7. Estimer la durée passée, pendant une révolution, à $r \leqslant r_{10}$. On fera les approximations que l'on jugera utiles pour effectuer cette estimation.

Correction de l'exercice 3

1.
   - Système : {Terre T} de masse M_T
   - Référentiel héliocentrique supposé galiléen
   - Coordonnées polaires de centre S le centre du Soleil

   La trajectoire étant circulaire $\overrightarrow{ST} = r_T\overrightarrow{e_r}$; $\overrightarrow{v} = r_T\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$; $\overrightarrow{a} = -r_T\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r_T\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Le PFD donne :

$$M_T\,\overrightarrow{a} = -\frac{GM_SM_T}{r_T^2}\overrightarrow{e_r}$$

   avec M_S la masse du Soleil et G la constante de gravitation.
   En projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$, on en déduit que $\dot{\theta} = \text{cste}$, ce qui signifie que le mouvement est circulaire uniforme.
   La projection sur $\overrightarrow{e_r}$ donne :

$$-r_T\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_S}{r_T^2} \Rightarrow ||\overrightarrow{v}||^2 = \frac{GM_S}{r_T}$$

   On peut relier cette vitesse constante à la période T_T de révolution de la Terre autour du Soleil : $T_T = \dfrac{2\pi r_T}{||\overrightarrow{v}||}$.
   Ainsi :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cste}$$

   ne dépend que de la masse du corps attracteur. Il s'agit de la 3ème loi de Kepler.
2. D'après la 3ème loi de Kepler, comme la Terre et la sonde tournent autour du même corps attracteur :

$$\frac{T_{PSP}^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$$

   avec $a = \dfrac{r_p + r_a}{2}$ le demi grand axe de l'ellipse. Ainsi :

$$T_{PSP} = T_T \times \left(\frac{r_p + r_a}{2r_T}\right)^{3/2}$$

   A.N. : $T_{PSP} = 88\,\text{jours}$. Cette période de révolution est largement inférieure à celle de la Terre, ce qui est cohérent avec une orbite de PSP plus proche du Soleil que celle de la Terre.
3.
   - Système : {Sonde PSP M} de masse m
   - Référentiel héliocentrique supposé galiléen
   - Coordonnées polaires de centre S

   (a) Conservation de l'énergie mécanique : La seule force s'appliquant sur M est conservative, donc l'énergie mécanique se conserve.
   (b) Conservation du moment cinétique par rapport à S : Le TMC s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_S(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_S(\overrightarrow{F}_g) = \overrightarrow{SM} \wedge \overrightarrow{F}_g = \overrightarrow{0}$$

   où $\overrightarrow{F}_g$ est la force centrale s'exerçant sur M. Donc, le moment cinétique par rapport à S se conserve.
4. En coordonnées polaires, on a $\overrightarrow{SM} = r\overrightarrow{e_r}$; $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ sur la trajectoire elliptique. On en déduit :
   (a) $\overrightarrow{L}_S(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cste}}$, donc $C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$, appelée la constante des aires
   (b)

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{GM_Sm}{r}$$

   En utilisant la constante des aires, on en déduit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{eff}(r) \qquad \text{avec} \quad E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_Sm}{r}$$

5. La stratégie consiste à déterminer l'E_m au niveau du périhélie, pour en déduire la vitesse en ce point. Au périhélie et à l'aphélie, on a $\dot{r} = 0$, ce qui permet de ré-écrire l'énergie mécanique (qui se conserve) :

$$\begin{cases} E_m = \dfrac{1}{2} m \dfrac{C^2}{r_a^2} - \dfrac{GM_s m}{r_a} \\ E_m = \dfrac{1}{2} m \dfrac{C^2}{r_p^2} - \dfrac{GM_s m}{r_p} \end{cases}$$

Il reste à éliminer C qu'on ne connait pas. En combinant les deux équations du système ci-dessous, on obtient après calculs :

$$E_m = -\frac{GM_s m}{r_a + r_p} = -\frac{GM_s m}{2a}$$

On peut ré-écrire l'énergie mécanique au périhélie avec la vitesse v_p :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM_s}{r_p} = -\frac{GM_s m}{r_a + r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2GM_s r_a}{r_p(r_a + r_p)}}$$

Enfin, on ne peut pas encore faire l'A.N., car il nous manque la valeur de GM_S. Mais, en se rappelant de la Q.1, on remarque que la 3ème loi de Kepler donne la valeur de ce produit : $GM_S = \dfrac{4\pi^2 r_T^3}{T_T^2}$. Ainsi, finalement :

$$v_p = \frac{2\pi}{T_T} \sqrt{\frac{2 r_T^3 r_a}{r_p(r_a + r_p)}}$$

A.N. : $v_p = 1.9 \times 10^5 \, \mathrm{m\,s^{-1}}$

6. On remarque que

$$r_p = \frac{p}{1+e} \qquad \text{et} \qquad r_a = \frac{p}{1-e}$$

. Il suffit donc de résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues. On obtient :

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{2 r_a r_p}{r_a + r_p}$$

A.N. : $e = 0.88$ et $p = 8.7 \times 10^{-2}$ u.a.

7. On remarque que l'écart entre r_{10} et r_p est bien plus petit que l'écart entre r_a et r_p. Ainsi, la portion de la trajectoire utile à des fins scientifiques est une petite portion au voisinage du périhélie, sur laquelle on peut négliger la variation de r par rapport à la variation de r sur le reste de la trajectoire. Donc, on supposera que $r \simeq r_p$.

Cette approximation implique que la portion étudiée est modélisable par un arc de cercle de rayon r_p. Comme toute orbite circulaire, cette portion de la trajectoire est parcourue à vitesse constante (cf. loi des aires si vous avez besoin de vous convaincre) : $v = v_p$. Ainsi, si on appelle $\Delta\theta$ l'angle entre les deux rayons vecteurs définissant la portion de l'orbite utile, alors la durée utile est $\tau = \dfrac{r_p \Delta\theta}{v_p}$, car $r_p \Delta\theta$ est par définition la longueur de l'arc de cercle.

On obtient $\Delta\theta$ grâce à l'équation de l'ellipse :

$$\Delta\theta = 2\theta_{lim} \qquad \text{avec} \quad r_{10} = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta_{lim})}$$

Or,

$$r_{10} = \frac{10}{9.6} r_p = \frac{10}{9.6} \frac{p}{1+e}$$

Ainsi, on obtient

$$\theta_{lim} = \arccos\left(0.96 - \frac{0.04}{e}\right) = 24^\circ$$

D'où : A.N. : $\tau = 3.0 \times 10^4 \, \mathrm{s} = 8.4 \, \mathrm{h}$

On vérifie que $\tau \ll T_{PSP}$, ce qui valide qu'on étudie une portion très courte de l'orbite, et donc qui valide l'approximation effectuée. Seules 8 heures sur 88 jours sont intéressants dans le but de l'étude scientifique !

Ex. 4 (*Ecrit CCINP MP 2025*) Directivité du rayonnement synchrotron

Un synchrotron est un instrument électromagnétique de grande taille destiné à l'accélération de particules chargées. Le rayonnement synchrotron est un rayonnement électromagnétique émis par une particule chargée possédant une accélération. Ce rayonnement est utilisé pour des analyses physiques. Dans le synchrotron SOLEIL, situé à Saclay, des électrons, de masse notée m_e et de charge $-e$, accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière, sont déviés par des champs magnétiques. On note c la célérité de la lumière dans le vide.

On constate que le rayonnement synchrotron est très intense dans une direction privilégiée (on parle de rayonnement anisotrope). On s'intéresse dans cette partie à un modèle particulaire visant à expliquer la directivité du rayonnement synchrotron.

On considère un électron se déplaçant à vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}'$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à l'électron, celui-ci émet des particules de manière isotrope dans le plan xOy (figure 4). La moitié des particules est donc émise dans le demi-espace $x > 0$.

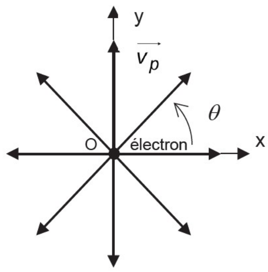


Figure 4 - Particules émises par un électron dans le référentiel $\mathcal{R}$

1. On suppose que la règle de composition des vitesses est la règle de composition galiléenne. Exprimer et représenter la vitesse $\vec{v}'_p$ (par rapport à $\mathcal{R}'$) de la particule émise dans $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}_p$ avec l'angle $\theta = \pi/2$ (figure 4). En déduire l'angle θ' formé par $\vec{v}'_p$ avec l'axe Ox en fonction de v et de $v_p = ||\vec{v}_p||$. Donner la proportion des particules émises dans le cône de demi-angle θ' par rapport à $\mathcal{R}'$.
2. Le calcul précédent permet de comprendre qualitativement l'anisotropie du rayonnement lorsque les particules émises sont des photons, mais ne peut être exact. Expliquer pourquoi.

Les formules de transformation des vitesses dans la relativité restreinte s'écrivent :

$$v'_{p\parallel} = \frac{v_{p\parallel} + v}{1 + \dfrac{v v_{p\parallel}}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad v'_{p\perp} = \frac{v_{p\perp}}{\gamma\left(1 + \dfrac{v v_{p\parallel}}{c^2}\right)}$$

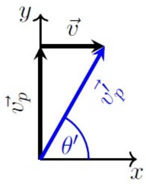
où $v_{p\parallel}$ (respectivement $v_{p\perp}$) est la composante de vitesse parallèle (resp. perpendiculaire) à $\vec{v}$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ le facteur de Lorentz de l'électron.

3. En déduire que pour un électron ultrarelativiste du synchrotron, le demi-angle θ' à l'intérieur duquel est émis la moitié du rayonnement est tel que $\theta' \simeq \dfrac{1}{\gamma}$. Calculer θ' pour $\gamma = 5.0 \times 10^4$. Conclure.

Correction de l'exercice 4

Corrigé rédigé par Catherine Lavainne et Etienne Pertreux.

Q24. Loi de composition de vitesse : $\vec{v_p'} = \vec{v}_{P/\mathcal{R}'} = \vec{v}_{P/\mathcal{R}} + \vec{v}_e$, avec $\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ la vitesse d'entraînement soit la vitesse du référentiel $\mathcal{R}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$, d'où $\vec{v}_e = \vec{v} = v\vec{e}_x$ et $\vec{v_p} = v_p\vec{e}_y$. Donc $\boxed{\vec{v_p'} = v_p\vec{e}_y + v\vec{e}_x}$.



L'angle θ' est donc déterminé par la relation suivante :

$$\tan(\theta') = \frac{v_p}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta' = \arctan\left(\frac{v_p}{v}\right)}$$

Comme le rayonnement est isotrope dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc dans la zone d'espace comprise entre $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, 50 % des électrons sont émis. On en déduit que dans la référentiel $\mathcal{R}'$, 50 % sont émis dans la zone d'espace comprise entre $-\theta'$ et θ' ce qui correspond au cône de demi-angle θ'.

Q25. La vitesse des photons émis par l'électron étant la vitesse de la lumière c quel que soit le référentiel et que l'électron est relativiste. La loi de composition de vitesse utilisée n'est pas applicable.

Q26. Reprenons la méthode de la **Q24.**, prenons comme référence la particule émise dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $v_{p\parallel} = 0$ et $v_{p\perp} = v_p$. Par application des formules de transformation des vitesses dans la relativité restreinte, sachant que $v_p = c$ et $v \approx c$:

$$v'_{p\parallel} = v \quad \text{et} \quad v'_{p\perp} = \frac{v_p}{\gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad \tan(\theta') = \frac{v'_{p\perp}}{v'_{p\parallel}} = \frac{v_p}{v\gamma} \approx \frac{1}{\gamma}$$

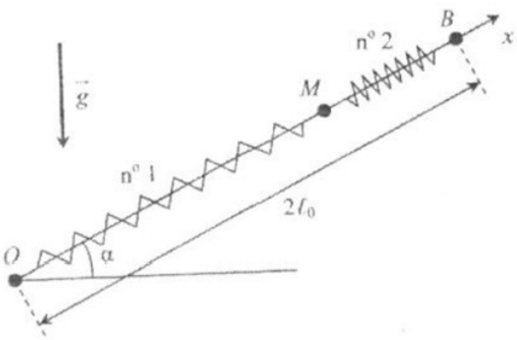
Comme $\gamma \gg 1$, $\tan(\theta') \ll 1$ donc $\tan(\theta') \approx \boxed{\theta' \approx \frac{1}{\gamma}}$. AN : $\underline{\theta' \simeq 2 \cdot 10^{-5}\,\text{rad}} \ll 1$.

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la moitié des photons sont émis dans le cône de demi-angle $\theta' \ll 1$. Donc on retrouve le résultat de la question **Q23.**, l'émission est maximale dans la direction $\theta' = 0$.

Ex. 5 Mobile entre deux ressorts inclinés

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page[5]

Un objet M de masse m, assimilé à un point matériel, est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige rectiligne, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et fixe par rapport au référentiel terrestre $\Re$ supposé galiléen. M peut se déplacer entre l'origine O et un point fixe B tel que $\overrightarrow{OB} = 2\ell_0\overrightarrow{e_x}$. M est lié au point O par un ressort n°1, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et il est également lié au point B par un ressort n°2, de même raideur k mais de longueur à vide nulle (c'est-à-dire négligeable devant ℓ_0).



1. On se propose de déterminer l'abscisse x_{eq} de M lorsqu'il est à l'équilibre par deux méthodes différentes.
   (a) En étudiant les forces agissant sur M, déterminer x_{eq}.
   (b) Le mouvement de M est-il conservatif ? Exprimer l'énergie potentielle du point M. En déduire x_{eq}.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lorsque M est en mouvement. On pourra faire apparaître x_{eq}.
3. A l'instant initial $t = 0$, on lâche M à l'abscisse $x_0 = x_{eq}$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = -v_0\overrightarrow{e_x}$. Déterminer la solution de l'équation différentielle.

[5] **1.a.** Le ressort n°2 exerce sur M la force $\vec{F}_{r2} = k(2\ell_0 - x)\overrightarrow{e_x}$.

4. Quelle est la condition pour que M ne touche pas le point B ? Tracer alors la courbe de x en fonction du temps t, en supposant $x_{eq} > \ell_0$.
5. Déterminer l'expression de la réaction de la tige sur M à tout instant.

Correction de l'exercice 5

- Système : mobile
- Référentiel terrestre galiléen
- Repère cartésien $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$ (avec $\overrightarrow{e_y}$ vers le haut)

1. (a) A l'équilibre, en projection sur $\overrightarrow{e_x}$, la somme des forces est nulle :

$$0 = -k(x-\ell_0) + k(2\ell_0 - x) - mg\,\sin(\alpha) = k(3\ell_0 - 2x) - mg\,\sin(\alpha) \Rightarrow x_{eq} = \frac{3}{2}\ell_0 - \frac{mg}{2k}\,\sin(\alpha)$$

   (b) M n'est soumis à aucune force non conservative qui travaille (attention : la réaction du support n'est pas conservative, mais elle ne travaille pas) : le mouvement est conservatif.

$$E_p = mgx\,\sin(\alpha) + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(2\ell_0 - x)^2$$

   On cherche un extremum de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = mg\,\sin(\alpha) + k(x-\ell_0) - k(2\ell_0 - x) = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{3}{2}\ell_0 - \frac{mg}{2k}\,\sin(\alpha)$$

   Remarque : La méthode énergétique est plus longue, donc privilégiez la méthode PFD. Néanmoins, on remarquera que la méthode énergétique ne nécessite pas de se poser de question sur le signe des forces...

2. PFD en projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\ddot{x} = k(3\ell_0 - 2x) - mg\,\sin(\alpha) = -2k(x - x_{eq}) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}x_{eq}$$

3. Solution générale : $x(t) = x_{eq} + A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Avec les CI : $A = 0$ et $B = -\frac{v_0}{\omega_0}$. Donc :

$$x(t) = x_{eq} - \frac{v_0}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t)$$

4. On veut $x(t) \leqslant 2\ell_0$, donc $x_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0} < 2\ell_0$, soit

$$\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{mg}{2k}\,\sin(\alpha) \leqslant \frac{\ell_0}{2}$$

   Graphe usuel (la condition $x_{eq} > \ell_0$ permet simplement d'assurer que $x(t) > 0, \forall t$).

5. La réaction de la tige est $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e_y}$, dirigée vers le haut. Le PFD donne, selon $\overrightarrow{e_y}$:

$$0 = R - mg\,\cos(\alpha) \iff \overrightarrow{R} = mg\,\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$$