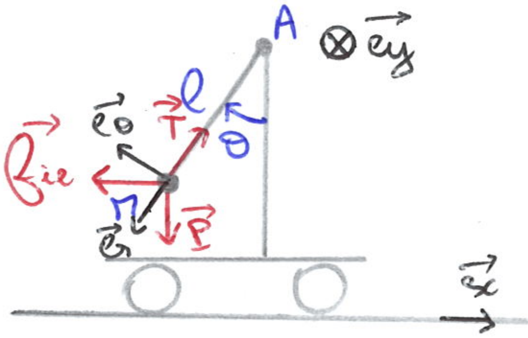
PENDULE DANS UN VÉHICULE



- Référentiel $\mathcal{R}$ terrestre galiléen
- Référentiel $\mathcal{R}'$, lié au véhicule, en translation par rapport à $\mathcal{R}$.
- Repère cylindrique $(A, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_y})$ associé à $\mathcal{R}'$
- Système : {Point matériel M}

Choix de la loi de la dynamique utilisée :
- TEM : on doit démontrer Ep, ie : long.
- ✓ TMC en A : on fait disparaître $\vec{T}$ et bras de levier.
- PFD : 1 peu + long, mais marcherait.

Rq : Ici, vu le sens de $\vec{e_y}$, l'angle $\theta > 0$. Le point clé est surtout d'orienter $\vec{e_\theta}$ dans le sens de $\theta \nearrow$.

1) Théorème du moment cinétique au point A, fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\left(\frac{d\vec{L_A}(M)/\mathcal{R}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{T})}_{= \vec{0} \text{ car la droite d'action de } \vec{T} \text{ passe par A.}} + \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{f_{ie}}) \quad (A)$$

avec : • à l'équilibre $\left(\frac{d\vec{L_A}(M)/\mathcal{R}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$.

• $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e} = -m a_0 \vec{e_x}$

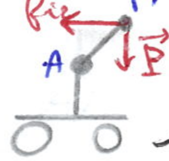
Donc, on projette (A) sur $\vec{e_y}$. (Toutes les forces sont $\perp$ à $\vec{e_y}$: méthode du bras de levier.)

On a : $\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) \cdot \vec{e_y} = -mgl\sin\theta$

$\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{f_{ie}}) \cdot \vec{e_y} = m a_0 l \cos\theta$

$\Rightarrow (A) \cdot \vec{e_y}$: $0 = -\cancel{m} g \cancel{l} \sin\theta + \cancel{m} a_0 \cancel{l} \cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a_0}{g} \Rightarrow \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a_0}{g}\right)$ ou $\underbrace{\theta = \pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{a_0}{g}\right)}_{\text{pas un équilibre si la masse est retenue par un fil souple}}$



Cohérent : si $a_0 \nearrow$ alors $\theta \nearrow$.

2) On reprend (A) hors équilibre. On a :

$\vec{AM} = \ell \vec{e_r} \Rightarrow \vec{v}(M)/_{R'} = \ell \dot{\theta} \vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \vec{L_A}(M)/_{R'} = \vec{AM} \wedge m \vec{v}(M)/_{R'}$

$= m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e_y}$

En projetant (A) sur $\vec{e_y}$:

$\cancel{m} \ell^2 \ddot{\theta} = -\cancel{m} g \cancel{\ell} \sin\theta + \cancel{m} a_0 \cancel{\ell} \cos\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta - \frac{a_0}{\ell} \cos\theta = 0.$

On cherche l'intégrale 1ère du mouvement (cf. on veut avoir uniquement une équation avec du $\dot{\theta}$, et non plus du $\ddot{\theta}$). Donc, on multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre :

$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \dot{\theta} \sin\theta - \frac{a_0}{\ell} \dot{\theta} \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell} \cos\theta - \frac{a_0}{\ell} \sin\theta = c^{te}$

$\Rightarrow \dot{\theta}^2 + \phi(\theta) = c^{te}$ (B) avec $\phi(\theta) = -\frac{2}{\ell}(g\cos\theta + a_0 \sin\theta)$

On détermine la c^{te} avec les conditions initiales :

$\begin{cases} \dot{\theta}(t=0) = 0 \\ \theta(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2g}{\ell} = c^{te}$

3) On souhaite que le pendule ne dépasse pas les angles limites $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$: sa vitesse doit donc s'annuler à ces positions là : $\dot{\theta} = 0$.

Critère 1 : En $\theta = 0$: $\dot{\theta} = 0 \overset{(B)}{\Rightarrow} -\frac{2g}{\ell} = -\frac{2g}{\ell}$: OK.

Critère 2 : En $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\dot{\theta} = 0 \overset{(B)}{\Rightarrow} -\frac{2a_0}{\ell} = -\frac{2g}{\ell}$

$\Rightarrow a_0 = g.$

Rq : On voit bien qu'il ne faut pas supposer $\theta \ll 1$, car sinon, l'équation simplifiée serait non valable en $\theta = \frac{\pi}{2}$.