

Dynamique dans des référentiels non galiléens

Sommaire

I	Comment choisir un référentiel galiléen ?	2
I.1	Existe-t-il un référentiel rigoureusement galiléen ?	2
I.2	Des référentiels galiléens de manière approchée	2
II	Principe fondamental de la dynamique (PFD) dans un référentiel non galiléen	3
II.1	Énoncé	3
II.2	Exercices d'application	5
III	Théorème du moment cinétique (TMC) dans un référentiel non galiléen	6
III.1	Énoncé	6
III.2	Exercice d'application : pendule à extrémité supérieure oscillante	8
IV	Théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen	8
IV.1	Énoncé	8
IV.2	Exercice d'application : anneau sur un cerceau en rotation	11
V	Etude des positions d'équilibre dans un référentiel non galiléen	11
V.1	Méthode dynamique (PFD ou TMC)	12
V.2	Méthode énergétique	12
	Exercices	13

Questions de cours

- Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen : démontrer le principe fondamental de la dynamique. Présenter la force d'inertie d'entraînement. Exemple.
- Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen : forces d'inertie. Présenter le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique. Exemple.
- Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen : présenter le théorème de l'énergie cinétique, en explicitant les travaux des forces d'inertie. Exemple.

Prise de notes : Reprenons l'exemple de l'intro du chapitre M1 : un passager se trouve dans un bus qui freine, et se sent attiré vers l'avant. Si on veut comprendre le ressenti du passager, il faut que l'on décrive le mouvement dans le référentiel \mathcal{R}' du bus. Problème : ce référentiel n'est pas galiléen... Avec les outils de sup', on peut uniquement appliquer le PFD dans le réf terrestre \mathcal{R} galiléen, et donc on fait intervenir $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$. Mais, on sait désormais faire une chose : relier $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$ (cf. chapitre M1) ! On va donc pouvoir ré-écrire le PFD et les autres lois de la dynamique en faisant directement intervenir les grandeurs cinématiques de \mathcal{R}' !

★

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Choisir les forces à considérer selon le référentiel choisi et selon qu'on étudie un mouvement ou une position d'équilibre.
2. Déterminer l'expression des forces d'inertie sur des exemples concrets.
3. Choisir le théorème de la dynamique le plus efficace à appliquer dans un problème donné.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre de la **mécanique du point**.

I Comment choisir un référentiel galiléen ?

I.1 Existe-t-il un référentiel rigoureusement galiléen ?

On définit un référentiel galiléen grâce à la 1ère loi de Newton (= le principe d'inertie) :

Principe d'inertie (1687) = définition d'un référentiel galiléen

Il existe une famille de référentiels, appelés référentiels galiléens, tels que le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne uniforme.

Remarque : On appelle aussi parfois les référentiels galiléens des référentiels inertiels.

Toutes les lois de la mécanique que vous avez vues en sup' s'appliquent dans des référentiels galiléens. Il est donc fondamental d'explicitier des exemples de référentiels galiléens.

Tout d'abord, si l'on trouve ne serait-ce qu'un seul référentiel galiléen, on les connaîtra tous. En effet, considérons un point matériel M isolé dans un référentiel \mathcal{R} galiléen. Le principe d'inertie impose alors que le vecteur vitesse par rapport à \mathcal{R} est constant : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \text{csté} = \vec{v}_0$. Considérons alors un second référentiel \mathcal{R}' en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Grâce à la loi de composition des vitesses, on obtient :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}_e(M,t) = \vec{v}_0 - \vec{v}_e(M,t)$$

Le seul moyen que \mathcal{R}' soit galiléen est alors que $\vec{v}_e(M,t) = \vec{\text{csté}}$, et ceci quelque soit le point matériel M considéré. Nécessairement, le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} . La réciproque étant vraie, on peut affirmer :

Famille de référentiels galiléens

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Les référentiels galiléens sont alors les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} .

Il ne reste alors plus qu'à explicitier un référentiel galiléen... Vu la définition, la seule vérification possible du caractère galiléen d'un référentiel est une vérification expérimentale. A l'heure actuelle, on n'a jamais mis en évidence un seul référentiel rigoureusement galiléen.

I.2 Des référentiels galiléens de manière approchée

Si l'on ne souhaite prendre en compte que les effets liés au système solaire, le référentiel de Copernic est la meilleure approximation possible d'un référentiel galiléen. Dans cette partie, supposons donc que le référentiel de Copernic \mathcal{R} soit galiléen.

Dans quelle condition peut-on considérer que le référentiel géocentrique \mathcal{R}' est galiléen avec une approximation satisfaisante ?

Le référentiel géocentrique \mathcal{R}' pourra être considéré galiléen si on peut approximer le mouvement de \mathcal{R}' par un MRU par rapport au référentiel de Copernic galiléen. Schéma avec la translation elliptique + Sur le schéma, on a associé un repère cartésien à chacun des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

- ★ (Si on zoome sur la trajectoire, et qu'on regarde qu'une petite portion : oui, on a l'impression que \mathcal{R}' est en MRU par rapport à \mathcal{R} .)
En première approximation, si la durée de l'expérience à décrire est bien plus petite que la période de révolution de \mathcal{R}' autour de \mathcal{R} , alors on pourra considérer le référentiel \mathcal{R}' comme galiléen.

La condition est similaire concernant le référentiel terrestre.

Exemples de situations concrètes :

Référentiel considéré galiléen avec une approximation satisfaisante	Terrestre	Géocentrique	Copernic
Condition sur la durée Δt de l'expérience			

II Principe fondamental de la dynamique (PFD) dans un référentiel non galiléen

II.1 Énoncé

a Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen

- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R}
- Système : {Point matériel M } de masse m

On considère que le système est soumis à un ensemble de forces \vec{F}_k , avec k allant de 1 à N .

On applique le PFD dans le référentiel \mathcal{R} galiléen :

★
$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

On fait apparaître $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$ en utilisant la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(t)$$

Ainsi, le PFD s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k - m \vec{a}_e(t)$$

PFD dans un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R} galiléen

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{f}_{ie}$$

- ★ avec $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(t)$, un terme homogène à une force, appelé force d'inertie d'entraînement

Caractéristique de la force d'inertie d'entraînement : La force d'inertie d'entraînement est opposée à l'accélération d'entraînement.

On peut donc enfin expliquer le ressenti du passager dans le bus qui freine !

- Référentiel \mathcal{R} terrestre galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' lié au bus, en translation par rapport à \mathcal{R}
- Système : {Passager M de masse m }

- ★ Schéma avec le bus, son \vec{a}_e et \vec{f}_{ie}

b Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel \mathcal{R} galiléen

La démonstration est similaire.

- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour de l'axe fixe Δ du référentiel \mathcal{R}
- Système : {Point matériel M } de masse m

On considère que le système est soumis à un ensemble de forces \vec{F}_k , avec k allant de 1 à N .

On applique le PFD dans le référentiel \mathcal{R} galiléen :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

On fait apparaître $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$ en utilisant la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

Ainsi, le PFD s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M)$$

PFD dans un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R} galiléen

On note le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, avec $\Omega = \|\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\| = \text{cste}$. Le PFD dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

avec :

- ★
- $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$, un terme homogène à une force, appelé force d'inertie d'entraînement. Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ .
 - $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$, un terme homogène à une force, appelé force d'inertie de Coriolis.

Pour mettre en lumière les caractéristiques des deux forces d'inertie, illustrons les avec la situation de l'enfant qui lance un ballon en étant sur un manège.

Caractéristique de la force d'inertie d'entraînement :

Schéma (l'enfant doit être plus grand que le plateau et vient juste de lancer le ballon) en ne représentant que l'axe Δ , H et \vec{f}_{ie}

- ★ La force d'inertie d'entraînement est dirigée de l'axe de rotation vers le système, on dit qu'elle est axifuge. C'est cette force d'inertie qu'on désigne sous le terme "familier" de force centrifuge !
Elle évolue de manière quadratique avec la vitesse de rotation.

Caractéristique de la force d'inertie de Coriolis :

Schéma (l'enfant doit être plus grand que le plateau et vient juste de lancer le ballon) en ne représentant que l'axe $\vec{\Omega}$, $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ et \vec{f}_{ic}

- ★ La force d'inertie de Coriolis dépend de la vitesse du système dans le référentiel \mathcal{R}' et est orthogonale à cette vitesse. On lui associe donc l'effet de "dévier" la trajectoire d'un système.
Si le système est à l'équilibre dans \mathcal{R}' , alors $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ et donc $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$.

Du point de vue pratique, voici quelques erreurs classiques à éviter lors de l'utilisation du PFD :



- Mauvaise analyse du mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .
- Erreur dans les signes.
- Mauvais positionnement de H dans le cas de la rotation.
- Mauvais choix de la vitesse ou oubli du facteur 2 dans \vec{f}_{ic} .

c Les forces d'inertie sont-elles des vraies forces ?

Qu'est-ce qu'une vraie force ?

Prise de notes : Une force est la **modélisation d'une interaction** entre deux corps.

- ★ A la fin du collège et au début du lycée, vous avez introduit ces forces via le diagramme objet-interaction (DOI), qui avait justement pour objectif d'explicitier les interactions et donc les forces à considérer dans un problème donné.

Quand faut-il prendre en compte des forces inertielles dans un problème ?

Prise de notes : La démonstration fait clairement apparaître que les forces inertielles ne sont pas liées à des interactions, mais juste à un changement de référentiel. Donc,

- ★ non, **les forces d'inertie ne sont pas des vraies forces** (on les appelle parfois des pseudo-forces). **On ne les considère que quand on travaille dans un référentiel non galiléen.**

II.2 Exercices d'application

a Pendule à extrémité supérieure oscillante

Un pendule simple de longueur ℓ et de masse m est suspendu en un point A . Ce point d'accroche A est relié à un système le faisant osciller autour du point fixe O dans le référentiel terrestre, de telle sorte que $\vec{OA} = b \sin(\omega t) \vec{e}_x$. On repère la position du pendule par l'angle $\theta(t)$ qu'il fait avec la verticale passant par A .

Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $\theta(t)$.

- ★ Voir feuille scannée

b Anneau sur un cerceau en rotation uniforme

Un anneau M de masse m est mobile sans frottements sur un cerceau (C), de centre O et de rayon b . Le cerceau (C) est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical du cerceau.

Déterminer l'équation différentielle régissant la position de l'anneau.

★ Voir feuille scannée

III Théorème du moment cinétique (TMC) dans un référentiel non galiléen

III.1 Énoncé

a Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen

- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R}
- Système : {Point matériel M } de masse m

On considère que le système est soumis à un ensemble de (vraies) forces \vec{F}_k , avec k allant de 1 à N .

Soit O' un point fixe de \mathcal{R}' .

Dans le référentiel \mathcal{R}' , le moment cinétique de M en O' s'exprime (on se pose, on étudie un pt matériel et non un solide, d'où le choix de la formule ci-après) : $\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{O'M} \wedge m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$. Pour trouver le TMC exprimé dans le référentiel \mathcal{R}' , il suffit de dériver ce moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned}
 \star \quad \left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} &= \underbrace{\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}} \wedge m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{O'M} \wedge m \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}} \\
 &= \vec{0} + \vec{O'M} \wedge (m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}) \\
 &= \vec{O'M} \wedge \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{f}_{ie} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \vec{O'M} \wedge \vec{F}_k + \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ie}
 \end{aligned}$$

TMC dans un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R} galiléen

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ie})$$

avec :

- O' un point fixe de \mathcal{R}'
- $\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{O'M} \wedge m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ le moment cinétique en O' du point matériel M dans le référentiel \mathcal{R}'
- $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) = \vec{O'M} \wedge \vec{F}_k$ le moment de chaque force \vec{F}_k par rapport à O'
- $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ie}) = \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ie}$ le moment de la force d'inertie d'entraînement par rapport à O'

Interprétation : L'interprétation du moment de la force d'inertie d'entraînement est identique à celle de n'importe quel moment de force :

- La direction du moment de la force au point O' indique l'axe passant par O' autour duquel la force a tendance à faire tourner le système. Le sens du moment indique le sens de rotation avec la règle de la main droite.
- La norme du moment de la force indique la capacité de cette force à faire tourner le système autour de l'axe précédent.

b Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel \mathcal{R} galiléen

La démonstration est similaire.

- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour de l'axe fixe Δ du référentiel \mathcal{R}
- Système : {Point matériel M } de masse m

On considère que le système est soumis à un ensemble de (vraies) forces \vec{F}_k , avec k allant de 1 à N .

Soit O' un point fixe de \mathcal{R}' .

Dans le référentiel \mathcal{R}' , le moment cinétique de M en O' s'exprime : $\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{O'M} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$. On dérive ce moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} &= \underbrace{\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{O'M} \wedge m \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}} \\ &= \vec{0} + \vec{O'M} \wedge (m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}) \\ &= \vec{O'M} \wedge \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \vec{O'M} \wedge \vec{F}_k + \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ie} + \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ic} \end{aligned}$$

TMC dans un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R} galiléen

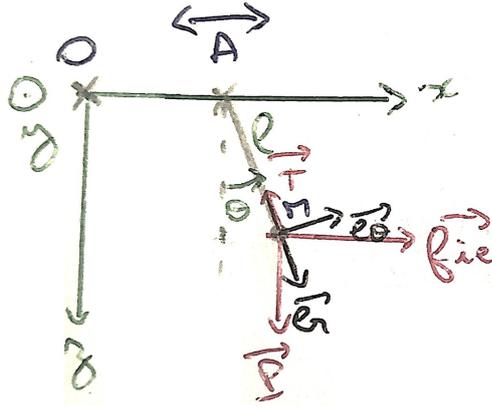
$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ic})$$

avec :

- O' un point fixe de \mathcal{R}'
- $\vec{L}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{O'M} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ le moment cinétique en O' du point matériel M dans le référentiel \mathcal{R}'
- ★ $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) = \vec{O'M} \wedge \vec{F}_k$ le moment de chaque force \vec{F}_k par rapport à O'
- $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ie}) = \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ie}$ le moment de la force d'inertie d'entraînement par rapport à O'
- $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ic}) = \vec{O'M} \wedge \vec{f}_{ic}$ le moment de la force d'inertie de Coriolis par rapport à O' .

Interprétation : L'interprétation est identique à précédemment.

III.2 Exercice d'application : pendule à extrémité supérieure oscillante



- Système : {Point matériel M }
- Référentiel \mathcal{R} terrestre galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' , lié au point A , en translation par rapport à \mathcal{R}
- Repère associé à \mathcal{R}' : cylindrique ($A, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y$)

★ Voir feuille scannée. Dire "prbl plan, donc bras de levier utilisable".

IV Théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen

IV.1 Énoncé

a Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen

- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R}
- Système : {Point matériel M } de masse m

On considère que le système est soumis à un ensemble de (vraies) forces \vec{F}_k , avec k allant de 1 à N .

i) Théorèmes de la puissance cinétique (TPC) et de l'énergie cinétique (TEC)

On détermine le théorème de la puissance cinétique en dérivant l'énergie cinétique exprimée dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_c(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}\|^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \right) \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \\
 &= (m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{f}_{ie} \right) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}
 \end{aligned}$$

TPC/TEC dans un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R} galiléen

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_c(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_{k=1}^N P(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} + P(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'}$$

avec :

- $E_c(M)_{/\mathcal{R}'} = \frac{1}{2}m \|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}\|^2$ l'énergie cinétique dans \mathcal{R}'
- ★ $P(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} = \vec{F}_k \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ la puissance de la force \vec{F}_k dans \mathcal{R}'
- $P(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{ie} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ la puissance de la force d'inertie d'entraînement dans \mathcal{R}'

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_c(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} + W_{i \rightarrow f}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'}$$

avec :

- $\Delta E_c(M)_{/\mathcal{R}'}$ la variation de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}' entre l'instant initial et l'instant final
- ★ $W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} = \int_i^f \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{dO'M}$ le travail de la force \vec{F}_k entre l'instant initial et l'instant final dans \mathcal{R}' . Le vecteur $\overrightarrow{dO'M}$ est le vecteur déplacement élémentaire dans \mathcal{R}' .
- $W_{i \rightarrow f}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'} = \int_i^f \vec{f}_{ie} \cdot \overrightarrow{dO'M}$ le travail de la force d'inertie d'entraînement dans \mathcal{R}'

Interprétation : L'interprétation du travail de la force d'inertie d'entraînement est la même que celle de n'importe quelle force :

- Si le travail est positif, alors la force participe à augmenter la norme de la vitesse du système (et donc son énergie cinétique) : on dit que la force est motrice.
- Si le travail est négatif, alors la force participe à diminuer la norme de la vitesse du système : on dit que la force est résistante.
- Si le travail est nul, la force ne modifie pas la norme de la vitesse du système : on dit que la force ne travaille pas.

ii) La force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?

- ★ Dans le cas général, la force d'inertie d'entraînement n'est **pas conservative**.

Dans certains cas bien particuliers, la force d'inertie d'entraînement est conservative et on peut alors définir une énergie potentielle d'inertie d'entraînement. C'est notamment le cas dans l'exemple suivant.

Exemple : \mathcal{R}' en translation uniformément accélérée par rapport à \mathcal{R} galiléen

Si le référentiel \mathcal{R}' est en translation uniformément accélérée par rapport à \mathcal{R} , cela implique que l'accélération d'entraînement est constante : $\vec{a}_e = \text{cste}$.

Montrons que la force d'inertie d'entraînement est, dans ce cas, conservative. Pour cela, on cherche s'il existe une fonction $E_{p,ie}$ telle que, dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \star \quad dE_{p,ie} &= -\delta W(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'} \\ &= -\vec{f}_{ie} \cdot \overrightarrow{dO'M} \\ &= +m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{dO'M} \\ &= d(m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{O'M}) \end{aligned}$$

Remarque : Mathématiquement, les opérations sur les différentielles s'effectuent comme des opérations sur les dérivées. En particulier : $d(\text{cste} \times f(x)) = \text{cste} \times df$

Donc, toute fonction du type $E_{p,ie} = m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{O'M} + \text{cste}$ convient. La force d'inertie d'entraînement est conservative dans ce cas particulier.

iii) Théorèmes de la puissance mécanique (TPM) et de l'énergie mécanique (TEM)

2 situations :

- ★ 1. \vec{f}_{ie} n'est pas conservative : elle intervient dans les forces non conservatives \vec{F}_{nc}
- 2. \vec{f}_{ie} est conservative : elle intervient dans l'énergie mécanique (via son énergie potentielle)

TPM/TEM dans un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R} galiléen

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit :

$$\frac{dE_m(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum P(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$$

avec :

- ★ • l'énergie mécanique dans \mathcal{R}' $E_m(M)_{/\mathcal{R}'} = E_c(M)_{/\mathcal{R}'} + \sum E_p(M)_{/\mathcal{R}'}$, contenant la somme de toutes les énergies potentielles
- $P(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$ la puissance de chacune des forces non conservatives qui travaillent

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\Delta E_m(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$$

avec :

- ★ • la variation de l'énergie mécanique dans \mathcal{R}' $E_m(M)_{/\mathcal{R}'} = E_c(M)_{/\mathcal{R}'} + \sum E_p(M)_{/\mathcal{R}'}$
- $W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$ le travail de chacune des forces non conservatives qui travaillent

b Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel \mathcal{R} galiléen

i) Théorèmes de la puissance cinétique (TPC) et de l'énergie cinétique (TEC)

La démonstration est similaire (on ne la refait pas ici).

Cas particulier de la force d'inertie de Coriolis :

La puissance de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel \mathcal{R}' est :

$$\star P(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = (-2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = 0$$

Ainsi, la force de Coriolis ne travaille jamais.

Remarque : Le travail associé est donc nul : $W_{i \rightarrow f}(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}'} = \int_i^f P(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}'} dt = 0$.

Ainsi, la force d'inertie de Coriolis **n'apparaîtra jamais** dans les théorèmes en puissance et dans les théorèmes énergétiques.

TPC/TEC dans \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R} galiléen

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_c(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_{k=1}^N P(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} + P(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'}$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_c(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_k)_{/\mathcal{R}'} + W_{i \rightarrow f}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'}$$

Interprétation : Concernant la force d'inertie d'entraînement, l'interprétation est identique à précédemment.

ii) La force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?

On cherche s'il existe une fonction $E_{p,ie}$ telle que :

$$dE_{p,ie} = -\delta W(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}'} = -m\Omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{dO'M}$$

On choisit le système de coordonnées cylindriques $(O', \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, car la force d'inertie d'entraînement est axifuge. On a alors : $\overrightarrow{HM} = r\vec{e}_r$. (Schéma conseillé)

★

Donc :

$$dE_{p,ie} = -m\Omega^2 r dr \iff E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 + \text{cste}$$

Ainsi, la force d'inertie d'entraînement est conservative dans ce cas et l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement est $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HM^2 + \text{cste}$.

iii) Théorèmes de la puissance mécanique (TPM) et de l'énergie mécanique (TEM)

TPM/TEM dans \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R} galiléen

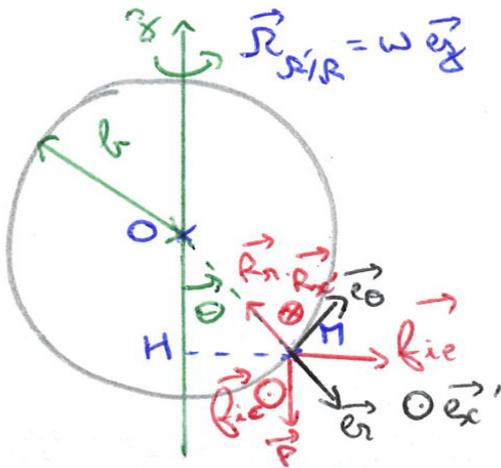
Le théorème de la puissance mécanique s'écrit :

$$\frac{dE_m(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum P(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$$

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\Delta E_m(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}'}$$

IV.2 Exercice d'application : anneau sur un cerceau en rotation



- Système : {Anneau M }
- Référentiel \mathcal{R} terrestre galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' , lié au cerceau, en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans \mathcal{R}
- Repère associé à \mathcal{R}' : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

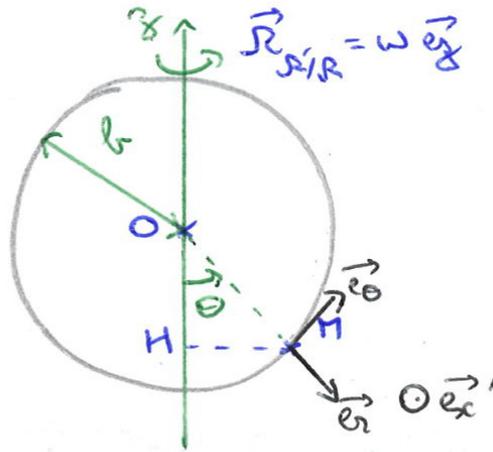
Voir feuille scannée : partie ED seulement

★

Conclusion : lorsque le mouvement est conservatif à un seul paramètre (ici : θ), la méthode énergétique est très souvent la plus efficace.

V Etude des positions d'équilibre dans un référentiel non galiléen

Pour cette dernière partie, on s'appuie exclusivement sur l'exercice d'application de l'anneau sur un cerceau en rotation.



- Système : {Anneau M }
- Référentiel \mathcal{R} terrestre galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' , lié au cerceau, en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans \mathcal{R}
- Repère associé à \mathcal{R}' : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$

On cherche la(les) position(s) d'équilibre du système dans le référentiel \mathcal{R}' , ainsi que leur stabilité. On parle d'équilibre relatif du système, car le système n'est à l'équilibre que dans le référentiel \mathcal{R}' . Dans le référentiel \mathcal{R} , le système est en mouvement.

Il existe deux méthodes pour étudier les positions d'équilibre d'un système.

V.1 Méthode dynamique (PFD ou TMC)

i) Positions d'équilibre

- ★  A l'équilibre, $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$!
Voir feuille scannée. Graphe de la bifurcation avec toutes les positions d'équilibre.

ii) Stabilité de la position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$

Voir feuille scannée. Faire une pause pour réfléchir qualitativement à la stabilité de l'équilibre une fois qu'on a posé $\theta = \varepsilon$.

Après l'ED :

- ★ Si $\frac{g}{b} - \omega^2 > 0$, i.e. si $\omega < \omega_c$, alors l'ED est de la forme $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$: on reconnaît l'équation d'un OH, dont la solution est de la forme $\varepsilon(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. La position d'équilibre est stable.
- Si $\frac{g}{b} - \omega^2 < 0$, i.e. si $\omega > \omega_c$, alors l'ED est de la forme $\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$: la solution est de la forme $\varepsilon(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t} \rightarrow +\infty$. La position d'équilibre est instable.

V.2 Méthode énergétique

i) Positions d'équilibre

- ★ On cherche les extrema locaux de l'Ep. Le mouvement étant à un paramètre θ , on cherche θ tel que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$. Voir feuille scannée.

ii) Stabilité des positions d'équilibre

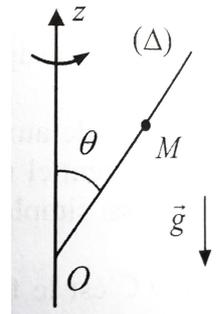
- ★ Calculer $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$, l'évaluer en les différentes positions d'équilibre et conclure.

Exercices

- ★ Dans les corrigés des exercices, je détaille la démarche de réflexion sur le choix du théorème de la dynamique le plus approprié. Ceci n'est pas à écrire sur une copie, c'est juste pour vous aider dans votre apprentissage.

Ex. 1 Anneau sur une tige en rotation

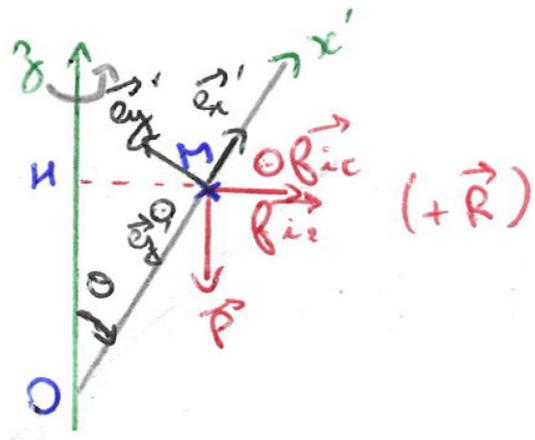
Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , est enfilé sur une tige (Δ) sur laquelle il peut glisser sans frottement. La tige d'extrémité O fait un angle θ constant avec l'axe (Oz) et est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de (Oz) . On pose $OM = x'$.



1. En étudiant les forces, déterminer pour quelle valeur x'_e de x' l'anneau est en équilibre par rapport à la tige. Prévoir qualitativement, toujours par l'étude des forces, si cette position d'équilibre est stable ou instable.
2. Retrouver les résultats précédents avec une étude énergétique.
3. On abandonne l'anneau avec une vitesse initiale nulle par rapport à la tige, en une position M_0 définie par $OM_0 = x'_0$ (avec $x'_0 \neq x'_e$). Etablir l'équation différentielle définissant le mouvement de M le long de la tige. La résoudre et en déduire $x' = f(t)$. Dans quel sens se produit le mouvement relatif de M si $x'_0 > x'_e$, si $x'_0 < x'_e$?
4. Déterminer à chaque instant les composantes de la réaction exercée par la tige sur l'anneau, en fonction de x' , \dot{x}' , ω et θ . Commenter l'effet de la force de Coriolis.

Correction de l'exercice 1

- Système : {Anneau M }
- Référentiel \mathcal{R} terrestre galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' de la tige en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans \mathcal{R}
- Repère associé à \mathcal{R}' : cartésien $(O, \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$



1. A l'équilibre dans \mathcal{R}' :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie}$$

avec \vec{R} la réaction du support qui s'applique selon \vec{e}_y' et \vec{e}_z' . En projection sur \vec{e}_x' :

$$0 = -mg \cos(\theta) + 0 + m\omega^2 HM \sin(\theta) \quad \text{avec} \quad HM = x'_e \sin(\theta)$$

Ainsi

$$x'_e = \frac{g \cos(\theta)}{\omega^2 \sin^2(\theta)}$$

On peut vérifier qualitativement que x'_e diminue si ω augmente (cohérent), et que x'_e augmente si θ diminue (cohérent).

Pour conclure sur la stabilité de l'équilibre via une étude des forces, on perturbe légèrement le système alors qu'il est dans sa position d'équilibre. Prenons par exemple $x' > x'_e$. Dans ce cas, la norme de \vec{f}_{ie} augmente et donc la résultante des forces est dirigée selon $+\vec{e}_x'$: le système continue de s'écarter de x'_e . On conclut que la position d'équilibre est instable. (On aboutit à la même conclusion si on perturbe le système en faisant $x' < x'_e$.)

2. Toutes les forces qui travaillent sont conservatives : le mouvement du système est conservatif. On détermine l'énergie potentielle :

$$E_p(x') = mgx' \cos(\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2(x' \sin(\theta))^2$$

La position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx'} = 0 = mg \cos(\theta) - m\omega^2 \sin^2(\theta)x'_e \Rightarrow x'_e = \frac{g \cos(\theta)}{\omega^2 \sin^2(\theta)}$$

Pour conclure sur la stabilité de l'équilibre via une étude énergétique, on cherche si l'extremum de l'énergie potentielle est un maximum ou un minimum. Ici, l'énergie potentielle est une fonction parabolique avec un coefficient négatif devant le terme en x'^2 , donc la parabole a ses branches orientées vers le bas : il s'agit d'un maximum d'énergie potentielle. Donc, la position d'équilibre est instable.

3. On peut par exemple déterminer l'équation du mouvement via un PFD dans \mathcal{R}' . La force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\omega\vec{e}_z \wedge \dot{x}'\vec{e}_x'$ est orthogonale à \vec{e}_x' . Pour éliminer la réaction du support, on projette le PFD sur \vec{e}_x' :

$$m\ddot{x}' = -mg \cos(\theta) + m\omega^2 x' \sin^2(\theta) \Rightarrow \ddot{x}' - (\omega \sin(\theta))^2 x' = -g \cos(\theta)$$

On vérifie que cette équation différentielle est linéaire, d'ordre 2, instable et avec second membre.

La solution générale est : $x'(t) = x_p + x_h(t)$ avec une solution particulière étant $x_p = \frac{g \cos(\theta)}{\omega^2 \sin^2(\theta)} = x'_e$. Pour

la solution homogène, l'équation caractéristique est $r^2 - (\omega \sin(\theta))^2 = 0$. On peut alors écrire, de manière équivalente, la solution homogène sous deux formes :

$$x_h(t) = \begin{cases} \alpha e^{\omega \sin(\theta)t} + \beta e^{-\omega \sin(\theta)t} \\ A \cosh(\omega \sin(\theta)t) + B \sinh(\omega \sin(\theta)t) \end{cases}$$

Au vu des conditions initiales fournies, je décide de travailler plutôt avec la seconde forme d'écriture de la solution homogène.

Conditions initiales :

$$\dot{x}'(t=0) = 0 = B\omega \sin(\theta) \Rightarrow B = 0$$

$$x'(t=0) = x'_0 = x'_e + A \Rightarrow A = x'_0 - x'_e$$

Ainsi, la solution complète s'écrit :

$$x'(t) = x'_e + (x'_0 - x'_e) \cosh(\omega \sin(\theta)t)$$

Analyse de la solution :

- Si $x'_0 > x'_e$, alors x' tend vers $+\infty$.
- Si $x'_0 < x'_e$, alors x' tend vers $-\infty$.

Ceci est cohérent avec le caractère instable de la position d'équilibre.

4. La réaction du support se décompose en deux composantes : $\vec{R} = R'_y\vec{e}_y' + R'_z\vec{e}_z'$. On peut déterminer cette force via le PFD projeté selon \vec{e}_y' et \vec{e}_z' .

Exprimons la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\omega(\cos(\theta)\vec{e}_x' + \sin(\theta)\vec{e}_y') \wedge \dot{x}'\vec{e}_x' = 2m\omega \sin(\theta)\dot{x}'\vec{e}_z'$$

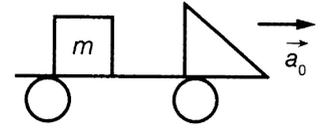
Ainsi, les projections du PFD selon \vec{e}_y' et \vec{e}_z' donnent :

$$\begin{cases} 0 = R'_y - mg \sin(\theta) - m\omega^2 x' \sin(\theta) \cos(\theta) \Rightarrow R'_y = m(g \sin(\theta) + \omega^2 x' \sin(\theta) \cos(\theta)) \\ 0 = R'_z + 2m\omega \sin(\theta)\dot{x}' \Rightarrow R'_z = -2m\omega \sin(\theta)\dot{x}' \end{cases}$$

La force de Coriolis n'influence pas le mouvement du système (cf. sa simplification dans le PFD de la Q.3) et est entièrement compensée par la réaction du support.

Ex. 2 Caisse glissant d'un camion

Une caisse assimilée à un point matériel de masse m est posée sur la plate-forme horizontale d'un camion initialement au repos dans le référentiel terrestre $(R) = (Oxyz)$ supposé galiléen (Fig. ci-contre). Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, est supposé uniforme. À partir de l'instant $t = 0$ le camion est uniformément accéléré avec une accélération $\vec{a} = a_0\vec{u}_x$ avec a_0 constante et positive. On note $T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$ l'action de contact exercée par la plate-forme sur la caisse qui satisfait aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f . On raisonne dans le référentiel (R') lié au camion.



On rappelle les lois de Coulomb du frottement :

- Si le solide ne glisse pas ($\vec{v}_g = \vec{0}$) : $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$
- Si le solide glisse : $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$, $\vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0$ et \vec{T} colinéaire à \vec{v}_g la vitesse de glissement.

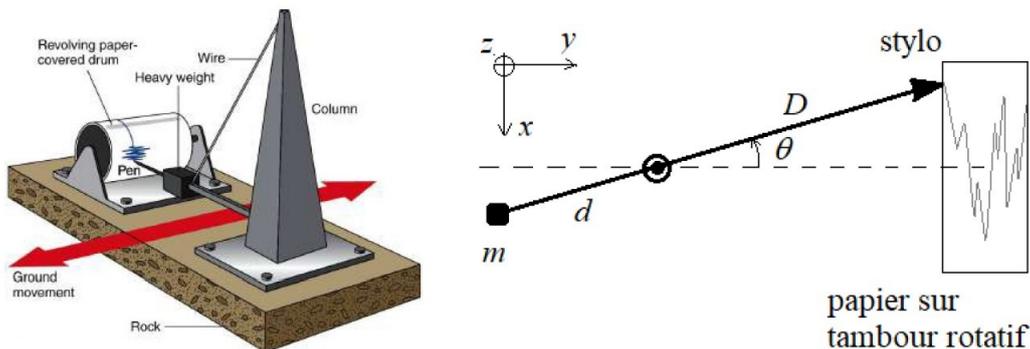
1. On suppose que la caisse ne glisse pas sur la plate-forme.
 - a) Déterminer N et T . En déduire une condition sur a_0 , f et g pour valider cette situation.
 - b) Exprimer l'énergie cinétique de la caisse dans le référentiel absolu. D'où provient-elle?
2. On suppose que la caisse glisse sur la plate-forme avec une vitesse de glissement parallèle à $-\vec{u}_x$.
 - a) Déterminer la vitesse de la caisse dans le référentiel du camion et en déduire une condition sur a_0 , f et g pour valider cette situation.
 - b) Exprimer dans le référentiel absolu la puissance $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}$ des actions exercées par le camion sur la caisse, la puissance $\mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}$ des actions exercées par la caisse sur le camion et leur somme. Commenter.

Correction de l'exercice 2

Correction faite en classe

Ex. 3 (Oral CCINP MP 2022, Ecrit E3A-Polytech PC 2022) Sismographe horizontal

On considère un sismographe horizontal (dont le schéma de principe est sur la figure de gauche). Une tige, sans masse, est en rotation autour de l'axe (Oz) vertical. On repère sa position angulaire par l'angle θ . Une masse m est fixée à une extrémité de la tige, à la distance d de l'axe. Un ressort de torsion de constante $C > 0$ ramène la tige vers la position $\theta = 0$. Des frottements fluides exercent un couple de moment $-f\dot{\theta}$ par rapport à l'axe (Oz) . On se place dans l'approximation des petits angles ($\theta \ll 1$). Le support du sismographe subit des vibrations $x(t)\vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre. Le stylo à l'autre extrémité de la tige enregistre le signal $s(t) = D\theta(t)$ à la distance D de l'axe.



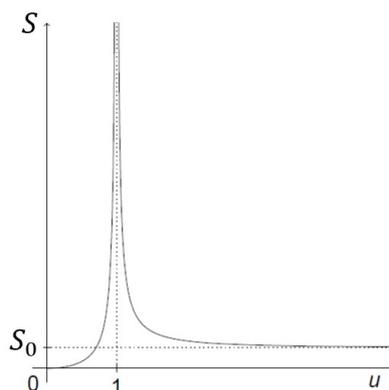
1. (a) Exprimer les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans le référentiel du sismographe.
 (b) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. On se place en régime sinusoïdal forcé avec $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$.
 - (a) Mettre l'amplitude complexe de la sortie du sismographe sous la forme

$$\underline{S} = \frac{S_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

Comment appelle-t-on ω_0 et Q ? Donner les expressions littérales de S_0 , ω_0 et Q .

- (b) Déterminer la condition sur la valeur de Q pour qu'il existe un phénomène de résonance de l'amplitude S .

- (c) On donne ci-après la représentation graphique de $S(u)$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, pour une valeur de Q très élevée. Justifier l'allure de cette courbe à partir des résultats précédents.



- (d) Il faut distinguer trois zones sur cette courbe : zone I ($u \ll 1$), zone II (u tend vers 1) et zone III ($u \gg 1$). A quelle partie de la courbe correspond la zone de fonctionnement souhaitée du sismographe ? Proposer alors un ordre de grandeur pertinent pour ω_0 .

Correction de l'exercice 3

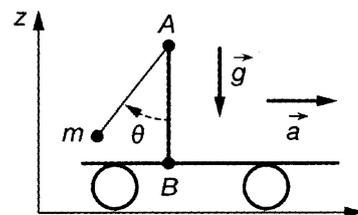
Savoir-faire travaillés dans l'exercice :

- TMC avec référentiel non galiléen en translation par rapport à un réf gal
- Détermination amplitude en RSF
- Le classique sismographe

Voir corrigé manuscrit. J'ai très légèrement modifié les questions 2b, 2c et 2d par rapport au corrigé que j'avais rédigé.

Ex. 4 Pendule dans un véhicule

Un pendule simple de longueur ℓ et de masse m est suspendu en un point A lié à un véhicule. On repère la position du pendule par l'angle θ . Initialement, le véhicule et le pendule sont au repos. A partir de l'instant $t = 0$, on communique une accélération constante $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$ au véhicule.



1. Déterminer l'angle θ à l'équilibre.
2. Montrer que $\theta(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\ddot{\theta} + \Phi(\theta) = \text{cste}$$

où on explicitera la fonction $\Phi(\theta)$ et la constante.

3. En déduire la valeur de a_0 telle que $\theta(t)$ oscille entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4

Voir corrigé manuscrit.

Ex. 5 Chaises volantes

En 2024, l'attraction *La tour de Numérobis* a ouvert dans la zone égyptienne du Parc Astérix. Il s'agit d'une attraction de type "chaises volantes". Des sièges sont suspendus par des chaînes : quand l'attraction est au repos, les chaînes sont verticales, et quand elle tourne, les chaînes s'inclinent. Le support d'accroche des sièges tourne à vitesse de rotation constante autour du mât.

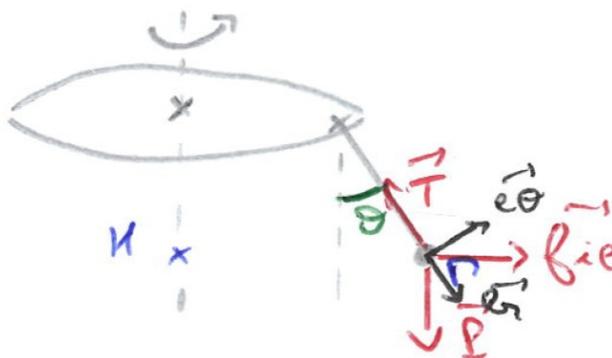
Estimer numériquement la vitesse de rotation de l'attraction, en tours/min.



Echelle de la photographie : Longueur des chaînes retenant les sièges : 6 m

Correction de l'exercice 5

Appropriation :



L'effet de la rotation du manège est d'incliner les chaînes par rapport à la verticale. On cherche donc à relier l'angle θ avec la vitesse de rotation ω .

- Système : {Visiteur} modélisé par un point matériel M de masse m
- Référentiel \mathcal{R} terrestre supposé galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' du support tournant en rotation uniforme autour de l'axe du mât, fixe dans \mathcal{R}
- Repère associé à \mathcal{R}' : polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (le point O est le point d'accroche de la chaîne sur le support tournant)

Dans \mathcal{R}' , le système est à l'équilibre.

Stratégie :

1. Déterminer l'expression de θ à l'équilibre.
2. Mesurer θ et les données pertinentes sur la photo pour trouver ω

Résolution :

A l'équilibre dans \mathcal{R}' , en projection sur \vec{e}_θ :

$$0 = -mg \sin(\theta) + m\omega^2 HM \cos(\theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \tan(\theta)}{HM}}$$

Utilisation de la photo : On considère le visiteur situé le plus à droite de la photo, pour ne pas souffrir d'un effet de profondeur lié à la photo.

En utilisant l'échelle fournie : $HM = 9.3 \text{ m}$

En utilisant un rapporteur (ou en utilisant une formule de trigonométrie) : $\theta = 45^\circ$

A.N. : $\omega = 1.0 \text{ rad/s} = 9.8 \text{ tours/min}$

Validation :

- Cette valeur numérique semble cohérente avec une attraction réelle : un tour dure environ 6 s : OK.
- Si HM est constant et que θ augmente, cela est lié à un ω plus grand : cohérent.