Fiche n°1

Électronique

Notation complexe et filtrage

L'objectif de cette fiche synthèse est de récapituler tous les savoirs à connaître par coeur concernant la notation complexe et l'étude des filtres. Elle vient en complément du TP n°1 qui travaillait les savoir-faire associés.

I Notation complexe

Un signal sinusoïdal s'écrit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ (ou $s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$).

La grandeur complexe $\underline{s}(t)$ associée à $s(t)$ est obtenue en remplaçant $\cos(\ldots)$ par $e^{j\cdots}$. Ainsi on peut écrire :

$$s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s}(t)) \qquad \text{et} \qquad \underline{s}(t) = S_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S}_\mathrm{m} e^{j\omega t} \tag{I.1}$$

avec $\underline{S}_\mathrm{m} = S_\mathrm{m} e^{j\varphi}$ l'*amplitude complexe*, de sorte que :

$$S_\mathrm{m} = |\underline{S}_\mathrm{m}| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{S}_\mathrm{m}) \tag{I.2}$$

L'intérêt d'introduire la notation complexe est de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par des opérations simples :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{s} \quad \text{et} \quad \int \underline{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\underline{s}(t) + \text{cste} \tag{I.3}$$

⚠ L'utilisation des grandeurs complexes est à proscrire dès qu'on manipule des produits de signaux (ou des produits de champs) ou des équations différentielles non linéaires !

II Régime forcé et filtrage

Le système est en régime forcé lorsque l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$.

II.1 Intérêt de la notation complexe

De manière générale pour un système régi par une équation différentielle linéaire, la solution se met sous la forme :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \tag{II.1}$$

- où $s_h(t)$ est la solution de l'équation homogène, correspondant au régime libre ou régime transitoire, avec $s_h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ si le système est stable ;
- et $s_p(t)$ est la solution particulière correspondant au régime forcé ou permanent.

Dans le cas d'une entrée sinusoïdale $e(t) = E_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_e)$, la solution particulière est aussi sinusoïdale de même pulsation $s(t) = S_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_s)$. Lorsque l'on passe en notation complexe, on suppose déjà que $s(t) = S_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_s)$: *la notation complexe permet donc de déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (i.e. la solution en régime permanent).*

II.2 Fonction de transfert

Pour des systèmes particuliers, qui ont entre autres la propriété d'être linéaires, il existe une propriété fondamentale :

Propriété d'un système linéaire, continu et temporellement invariant

Dans le domaine fréquentiel, il existe une fonction $\underline{H}(\omega)$, appelée fonction de transfert, telle que :

$$\text{Quelque soit l'entrée,} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R},\ \underline{s}(\omega) = \underline{H}(\omega)\ \underline{e}(\omega) \tag{II.2}$$

Cette propriété implique que si un système fait apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre du signal de sortie par comparaison au spectre du signal d'entrée, alors ce système n'est pas **linéaire**.

Quelques définitions :

- la *fonction de transfert* ou *transmittance* du système :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} \tag{II.3}$$

- le *gain linéaire* $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$.
- le *gain logarithmique* ou *gain en décibel* G_{dB}, dont l'unité est le décibel (dB), tel que

$$G_{\mathrm{d}B} = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \tag{II.4}$$

- la *bande-passante à* $-3\,\mathrm{dB}$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $G_{dB}(\omega) \geqslant G_{\mathrm{dB,\ max}} - 3\,\mathrm{dB}$ ou, de manière équivalente, $G(\omega) \geqslant \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Les pulsations à la limite de la bande-passante s'appellent des pulsations de coupure ω_c.
- la *phase* $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$

II.3 Étude d'un filtre

L'étude théorique complète d'un filtre se réalise en 4 étapes (voir TP 1) :

1. Détermination de la nature du filtre, grâce aux schémas équivalents basses fréquences (BF) et hautes fréquences (HF).
2. Détermination de la fonction de transfert $\underline{H}$.
3. Tracé du diagramme de Bode asymptotique, en déterminant l'équivalent le plus simple possible de $\underline{H}$.
4. Tracé du diagramme de Bode réel.

a Filtre passe-bas d'ordre 1

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{et} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Exemples : Circuit RC en sortie sur C ; circuit RL en sortie sur R

b Filtre passe-haut d'ordre 1

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{et} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Exemples : Circuit RC en sortie sur R ; circuit RL en sortie sur L

c Passe-bas d'ordre 2

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{II.5}$$

Exemple : Circuit RLC série en sortie sur C

d Passe-bande d'ordre 2

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{H_0 \times \dfrac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{II.6}$$

Exemple : Circuit RLC série en sortie sur R

Propriété à savoir : largeur de bande-passante à $-3\,\text{dB}$: $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$ avec ω_0 la pulsation centrale du passe-bande

II.4 Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Par la définition de la fonction de transfert $\underline{H}$, on déduit que la sortie s'écrit : $\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e}$, d'où avec les amplitudes complexes $\underline{S_m} = \underline{H} \times \underline{E_m}$ On trouve alors l'amplitude S_m et la phase φ_s du signal de sortie :

$$S_m = \left|\underline{S_m}\right| = |\underline{H}| \times E_m = G(\omega)E_m \qquad \text{et} \qquad \varphi_s = \arg(\underline{S_m}) = \arg(\underline{H} \times \underline{E_m}) = \arg(\underline{H}) + \varphi_e = \varphi(\omega) + \varphi_e$$

Ainsi, la sortie du filtre est, en notation réelle : $s(t) = G(\omega)E_m \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$

II.5 Effet d'un filtre sur un signal périodique

Le signal d'entrée étant périodique de pulsation ω, il existe une (unique) décomposition en série de Fourier du signal :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n\right)$$

où

- E_0 est la composante continue du signal, c'est-à-dire sa *valeur moyenne* ;
- la composante $E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'*harmonique de rang* n, de pulsation $n\omega$ multiple du fondamental ;
- pour $n = 1$, on parle du *fondamental* du signal périodique.

Exemples de spectres en amplitude :

Signal triangulaire : Signal créneau :

Pour déterminer le signal de sortie du filtre, on détermine tout d'abord la réponse du filtre à chacune des harmoniques du signal d'entrée prises séparément. Par linéarité du filtre, la sortie complète est alors la somme des réponses déterminées.

On en déduit une propriété fondamentale des systèmes linéaires :

Méthode de raisonnement à adopter pour un système linéaire

Pour déterminer la sortie d'un filtre, il faut raisonner dans le domaine fréquentiel. Les deux seules exceptions à faire sont les cas où le filtre a un comportement dérivateur ou intégrateur.

II.6 Comportement dérivateur, intégrateur et moyenneur

- Dérivateur : $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \iff \underline{H} \propto j\omega$: le gain a une pente de $+20\,\mathrm{dB/dcade}$ et la phase vaut $+90°$
- Intégrateur : $s(t) \propto \int e(t)\mathrm{d}t \iff \underline{H} \propto \dfrac{1}{j\omega}$: le gain a une pente de $-20\,\mathrm{dB/dcade}$ et la phase vaut $-90°$
- Moyenneur : le filtre coupe toutes les fréquences sauf la composante continue (qui a une fréquence nulle). Donc, le filtre doit être passe-bas et la fréquence f du fondamental du signal d'entrée doit vérifier $f \gg f_c$.