

• Système: { masse m }

• Référentiel terrestre global R

• Référentiel du sismographe en translation par rapport à R.

1) a) $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ et $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$
 $= -m \ddot{x} \vec{e}_x$

b) TNC par rapport à (O_y) :

$$m d^2 \ddot{\theta} = -m \ddot{x} d \underbrace{\cos \theta}_{\approx 1 \text{ car } \theta \ll 1} - c \dot{\theta} - f \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{f}{m d^2} \dot{\theta} + \frac{c}{m d^2} \theta = -\frac{1}{d} \ddot{x}$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m d^2}}$ et $Q = \frac{\omega_0 m d^2}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{c m d^2}$

Donc : $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{\ddot{x}}{d}$

2) a) On a, en RSF : $-\omega^2 \underline{\theta}_0 + \frac{\omega_0 j \omega}{Q} \underline{\theta}_0 + \omega_0^2 \underline{\theta}_0 = +\frac{\omega^2 x_0}{d}$

avec $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0 e^{j \omega t}$

Donc : $\underline{\theta}_0 = \frac{\omega^2 x_0 / d}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$

D'où : $s(t) = D \theta(t) \Rightarrow \underline{s} = \frac{D \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$ avec $s_0 = D \frac{x_0}{d}$
 $\underline{s}(t) = \underline{s} e^{j \omega t}$

b) $S = |\underline{s}| = \frac{s_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{s_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega Q}\right)^2}}$

Allure de S :

→ À BF : $\underline{s} \sim \frac{s_0 \omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow S = \frac{s_0 \omega^2}{\omega_0^2}$

→ À HF : $\underline{s} \sim -s_0 \Rightarrow S = s_0$

Ré: Il s'agit donc d'un filtre passe-haut d'ordre 2!

→ Résonance si $\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega Q}\right)^2$ est min. On pose

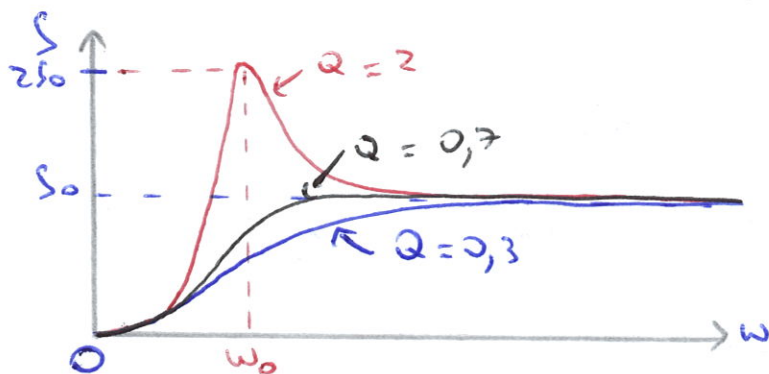
$$f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \frac{df}{dx} &= 2(1-x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} \\ &= 2x \left(\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$$

$$\Leftrightarrow \omega \rightarrow +\infty \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Donc, pour $Q = 2$, il y a résonance à $\omega \approx \omega_0$ et $S(\omega_0) = Q S_0$.



c) L'objectif d'un sismographe est de mesurer les déplacements de la terre, donc d'avoir une image de S_0 , et ce, quel que soit ω .

Donc, il faut $\omega_0 \ll \omega$ et on souhaite éviter la résonance.

On a intérêt à choisir $Q = 0,7$ (on atteint le régime HF + vite) et $\omega_0 \ll 2\pi \times 1 \text{ Hz} = 6 \text{ rad.s}^{-1}$

soit la fréquence d'oscillation du sol.

Par exemple: $\omega_0 = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$