

# Mécanique terrestre

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Mouvement et géométrie de la Terre</b>	<b>2</b>
I.1	Vitesse angulaire de rotation de la Terre . . . . .	2
I.2	Géométrie associée à la Terre . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Quelle est la différence entre le champ gravitationnel et le champ de pesanteur ?</b>	<b>3</b>
II.1	Champ gravitationnel . . . . .	4
II.2	Champ de pesanteur . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Applications : comment étudier le mouvement d'un système dans le référentiel terrestre non galiléen ?</b>	<b>6</b>
III.1	Choix du repère et principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	6
III.2	Cas n°1 : mouvement principalement vertical : étude qualitative . . . . .	7
III.3	Cas n°2 : mouvement principalement horizontal . . . . .	7
	<b>Exercices</b>	<b>12</b>

## Questions de cours

- Champ de pesanteur terrestre : définition, modélisation, évolution qualitative avec la latitude et ordres de grandeurs.
- Présenter un exemple au choix illustrant le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

*Prise de notes* : Histoire des sciences (c'est le bon chapitre pour le faire, il faut les marquer !) (on pourrait faire une intro avec une carte météo aussi) : Depuis bien longtemps, des scientifiques ont supposé que la Terre tourne sur elle-même. Plusieurs scientifiques grecs de l'école de Pythagore avaient proposé ceci au Vème et IVème siècle avant JC. Sauf que, à l'époque, ce n'était que des suppositions sans preuve scientifique, càd sans expérience le démontrant.

Une date particulière dans l'histoire de la théorie de la rotation de la Terre sur elle-même est 1543 avec la publication d'un ouvrage de Copernic, dans lequel il propose que la Terre tourne autour du Soleil ET sur elle-même. Le gros point fort de cette théorie est que les explications des observations célestes sont grandement simplifiées en prenant ce point de vue. Mais là encore, aucune preuve claire de la rotation.

★ Quelle expérience pourrait prouver la rotation de la Terre sur elle-même ? Deux idées : dans le réf terrestre, montrer la présence d'une force axifuge ou de la force de Coriolis. Pour la force axifuge, on va le voir, mais en odg, son effet est quasi imperceptible, du fait de la gravitation qui domine très largement. Mais, il y a un effet mesurable : l'aplatissement de la Terre aux pôles. Mesure effectuée dans les années 1730 par Maupertuis. Ne convainc pas toute la communauté scientifique de la rotation de la Terre.

Il faut attendre la fin du XVIIIème siècle et le début du XIXème siècle pour obtenir des preuves claires de la rotation de la Terre, grâce à la démonstration de la présence de la force de Coriolis : déviation vers l'Est lors de la chute d'un corps et pendule de Foucault.

Le gros point fort de l'expérience de Foucault est son potentiel attracteur pour le public. Il vend l'expérience comme un moyen de voir la Terre tourner et il l'installe au Panthéon de Paris en 1851 ! Méga attrait, et l'année suivante, 150 pendules de Foucault existent à travers le monde. Communauté scientifique convaincue.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Identifier les situations où l'on doit distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel.
2. Déterminer les forces à prendre en compte lors de l'étude d'un mouvement sur Terre si le référentiel terrestre est considéré non galiléen.
3. Maths : Se ré-entraîner à calculer des produits scalaires et des produits vectoriels.

Dans tout ce chapitre, on considère que **le référentiel géocentrique est galiléen** (mais pas le référentiel terrestre). On souhaite alors caractériser le mouvement de systèmes évoluant au niveau du sol terrestre : c'est le domaine de la mécanique terrestre.

## I Mouvement et géométrie de la Terre

- Référentiel  $\mathcal{R}$  géocentrique galiléen
- Référentiel  $\mathcal{R}'$  terrestre, en rotation uniforme, autour de l'axe des pôles, fixe dans le référentiel géocentrique

Pour déterminer les forces d'inertie à considérer, il va donc falloir déterminer la vitesse angulaire de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### I.1 Vitesse angulaire de rotation de la Terre

**Définition** : Jour solaire

Durée entre deux instants où le Soleil est au zénith. On a  $T_{\text{sol}} = 24$  h.

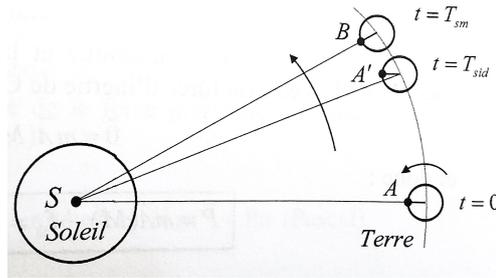
**Définition** : Jour sidéral

Durée mise par la Terre pour faire un tour autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique. On a :

$$T_{\text{sid}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} \neq T_{\text{sol}}$$

En effet :

★



$$T_{\text{sol}} > T_{\text{sid}}$$

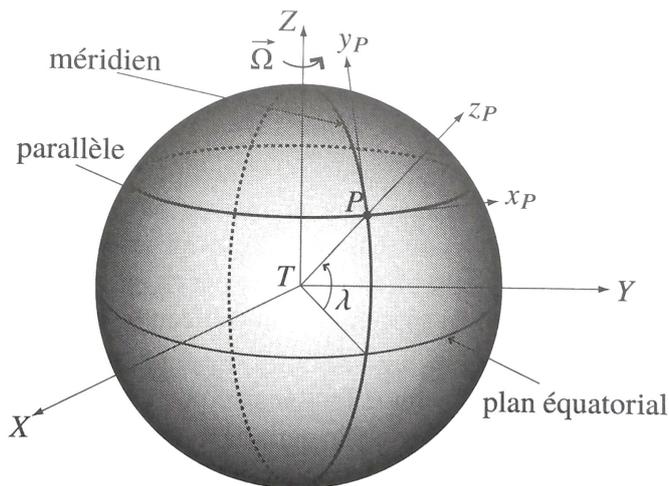
On peut alors déterminer la vitesse de rotation de la Terre par rapport au référentiel

$$\text{géocentrique : } \Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

**Remarque :** Inutile de connaître le jour sidéral par coeur : si on ne vous le redonne pas, faites l'approximation que  $T_{\text{sid}} \simeq T_{\text{sol}}$ .

## I.2 Géométrie associée à la Terre

Il sera nécessaire de savoir repérer un point  $P$  à la surface de la Terre. Certaines dénominations usuelles sont alors à retenir :



L'angle orienté  $\lambda$  se nomme la latitude : il est positif dans l'hémisphère Nord et négatif dans l'hémisphère Sud.

**Exemples :** D'ordinaire, la latitude est donnée en degrés, minutes d'arc et secondes d'arc. Il faut alors la convertir en degrés (ou radians).

- Latitude de Saint Brieuc :  $48^{\circ}30'49''$  Nord

★  $\lambda = 48.51^{\circ}$

- Latitude de Sydney :  $33^{\circ}51'22''$  Sud

★  $\lambda = -33.86^{\circ}$

Dans la suite, on notera  $M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  la masse de la Terre et  $R_T = 6370 \text{ km}$  le rayon de la Terre.

## II Quelle est la différence entre le champ gravitationnel et le champ de pesanteur ?

## II.1 Champ gravitationnel

### a Définition

L'interaction gravitationnelle s'observe via ses effets sur une masse (force gravitationnelle).

*Notion de champ* Plutôt que de raisonner en terme de force s'appliquant sur une masse, on va préférer raisonner sur le champ gravitationnel. Ce champ existe en tout point de l'espace, avant même de venir y placer une masse. L'intérêt est que, une fois que l'on connaît localement le champ gravitationnel, on peut décrire entièrement la force qui s'applique, sans avoir à faire appel à la description détaillée des sources de champ.

Pour un champ gravitationnel  $\vec{\mathcal{G}}(M)$ , la force gravitationnelle qui s'exerce si on vient placer une masse  $m$  en  $M$  est alors simplement

$$\vec{F}_g(M) = m\vec{\mathcal{G}}(M)$$

Le champ gravitationnel s'exprime en  $\text{m s}^{-2}$  (ou de manière équivalente en  $\text{N kg}^{-1}$ ).

### b Expression du champ gravitationnel terrestre au niveau de la surface de la Terre

Rappelons la force d'interaction gravitationnelle s'exerçant entre deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  placées aux points  $M_1$  et  $M_2$  :

★ Schéma + 
$$\vec{F}_{g,1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{(M_1M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

avec  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  la constante de gravitation.

Ainsi, d'après la force gravitationnelle, on peut définir le champ gravitationnel créé en  $M_2$  par la masse ponctuelle  $m_1$  :

★ 
$$\vec{\mathcal{G}}(M_2) = -\frac{Gm_1}{(M_1M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On peut le réécrire par un choix d'origine du repère approprié en plaçant une masse  $m$  à l'origine du repère, en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r$$

Dans le chapitre EM2, on montrera que, dans l'hypothèse où la Terre est modélisée par une boule à répartition de masse sphérique (i.e. sa masse volumique ne dépend que du rayon  $r$  depuis le centre  $T$  de la Terre), alors le champ gravitationnel à la surface de la Terre est le même que celui créé par une masse ponctuelle  $M_T$  située en  $T$ .

#### Champ gravitationnel à la surface de la Terre

Pour un point  $M$  à la surface de la Terre, si on modélise la Terre comme une boule à répartition de masse sphérique, alors le champ gravitationnel s'écrit, dans un repère sphérique ayant pour centre le centre  $T$  de la Terre :

$$\vec{\mathcal{G}}_T(M) = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

A.N. :  $\mathcal{G}_T = \left\| \vec{\mathcal{G}}_T \right\| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

## II.2 Champ de pesanteur

## a Définition du poids et de la verticale apparente

La définition du poids est de nature *expérimentale*. Un observateur situé sur Terre peut déterminer le poids d'un corps en suspendant celui-ci à un ressort (principe du dynamomètre linéaire).

Par définition, le **poids**, noté  $\vec{P}$ , est alors la force opposée à celle qui maintient le corps en équilibre dans le référentiel terrestre :  $\vec{P} = -\vec{T}$ .

★ Expérience de cours : dynamomètre linéaire + schéma !

On définit également grâce à cette expérience la **verticale apparente** : c'est la direction faite par le vecteur  $\vec{P}$ . Le sens de  $\vec{P}$  définit le sens "vers le bas".

### Expression mathématique du poids :

On peut modéliser cette expérience pour trouver une expression théorique du poids  $\vec{P}$ .

- Référentiel  $\mathcal{R}$  géocentrique galiléen
- Référentiel  $\mathcal{R}'$  terrestre, en rotation uniforme autour de l'axe fixe des pôles dans  $\mathcal{R}$
- Système : {Masse ponctuelle  $M$ } de masse  $m$

★ A l'équilibre, on a, dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{0} = \vec{T} + m\vec{g}_T + \vec{f}_{ie} \iff \vec{P} = -\vec{T} = m\vec{g}_T + \vec{f}_{ie}$$

car à l'équilibre,  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$  : la force d'inertie de Coriolis est nulle.

Ainsi :  $\vec{P} = m(\vec{g}_T + \Omega^2 \overline{HM})$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des pôles.

## b Définition du champ de pesanteur

De la même manière que pour le champ gravitationnel, on définit le champ de pesanteur  $\vec{g}(M)$  telle que si on place une masse  $m$  en  $M$ , alors le poids subi par la masse sera :

$$\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$$

En reprenant la modélisation précédente du poids, on en déduit :

### Champ de pesanteur terrestre

Le champ de pesanteur terrestre prend en compte à la fois le champ gravitationnel radial  $\vec{g}_T$  à la surface de la Terre et l'effet axifuge de la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \Omega^2 \overline{HM}$$

avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique (i.e. l'axe des pôles).



Le champ gravitationnel et le champ de pesanteur sont donc deux notions différentes, à bien distinguer dans le cas d'un référentiel terrestre non galiléen.

Ainsi, la différence entre le champ gravitationnel et le champ de pesanteur provient de la force d'inertie d'entraînement. Donc,

- si dans un problème, vous considérez le référentiel terrestre galiléen, alors cette force d'inertie n'a plus de raison d'être, et les deux champs sont confondus :  
★  $\vec{g} = \vec{g}_T$ .
- si vous étudiez un satellite terrestre dans le référentiel géocentrique galiléen, sans passer par une description dans le référentiel terrestre, aucune force d'inertie n'est à considérer : on ne considère que le champ gravitationnel  $\vec{g}_T$

### c Évolution du champ de pesanteur avec la latitude

Schéma en coupe de la Terre en plaçant  $T, M, H$ , les champs et la verticale apparente  $z$ .

La norme du terme axifuge se ré-écrit donc :  $\Omega^2 \|\overrightarrow{HM}\| = \Omega^2 R_T \cos(\lambda)$  : il est nul aux

- ★ pôles ( $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ ) et maximal à l'Equateur ( $\lambda = 0$ ). On en déduit une carte du champ de pesanteur (en exagérant très fortement les variations de champ) :

Schéma et tracer  $\vec{g}$  aux deux pôles, à l'Equateur, et aux tropiques. Ecrire sur le côté la norme  $g$  aux pôles et à l'Equateur.

#### Conséquences du modèle effectué :

- Hormis aux pôles et à l'Equateur, la verticale apparente ne passe pas par le centre  $T$  de la Terre.
- En norme,  $\|\vec{g}\|$  est plus important aux pôles et est minimal à l'Equateur.

#### Ordres de grandeurs :

On a déjà établi que, en supposant la Terre à répartition de masse sphérique, on a  $\|\vec{G}_T\| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ .

Au maximum (i.e. à l'Equateur), le terme axifuge vaut

$$\|\Omega^2 \overrightarrow{HM}\| = \Omega^2 R_T = 3 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \ll \|\vec{G}_T\|$$

. Ainsi, au maximum, le terme axifuge représente 0.3% du champ de pesanteur.

#### Confrontation aux données expérimentales :

Expérimentalement, on peut mesurer le champ de pesanteur aux pôles et à l'Equateur :

- aux pôles :  $g = 9.83 \text{ m s}^{-2}$
- à l'Equateur :  $g = 9.78 \text{ m s}^{-2}$

Plusieurs commentaires sur notre modèle peuvent alors être faits :

- $g$  diminue bien des pôles vers l'Equateur
- L'odg de  $g$  est très proche de celui estimé.
- ★ La variation entre le maximum et le minimum de  $g$  est plus importante que prévue ( $5 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  contre  $3 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  prévu). On ne peut donc pas expliquer la variation de  $g$  en ne faisant intervenir que l'effet axifuge de la force d'inertie d'entraînement.

En pratique, l'hypothèse mise en défaut dans notre modèle est l'hypothèse d'une répartition de masse sphérique de la Terre : la Terre est légèrement aplatie au niveau des pôles. Ainsi, le champ gravitationnel est plus grand au niveau des pôles qu'au niveau de l'Equateur. C'est cette combinaison de la variation de  $\mathcal{G}_T$  et de la variation de  $\Omega^2 R_T \cos(\lambda)$  qui explique entièrement les données expérimentales.

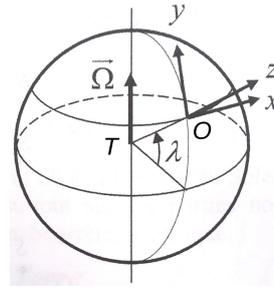
## III Applications : comment étudier le mouvement d'un système dans le référentiel terrestre non galiléen ?

### III.1 Choix du repère et principe fondamental de la dynamique (PFD)

- Référentiel  $\mathcal{R}$  géocentrique galiléen
- Référentiel  $\mathcal{R}'$  terrestre, en rotation uniforme autour de l'axe fixe des pôles dans  $\mathcal{R}$
- Système : {Masse ponctuelle  $M$ } de masse  $m$

Le plus souvent, pour décrire le mouvement du système au voisinage de la Terre, on choisit de prendre un repère cartésien associé à  $\mathcal{R}'$ . On définit alors conventionnellement ce repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de la manière suivante :

- L'origine  $O$  est à la surface de la Terre.
- L'axe  $(Oz)$  est la verticale ascendante.
- L'axe  $(Ox)$  va d'Ouest en Est.
- L'axe  $(Oy)$  va du Sud au Nord.



On fait alors couramment l'approximation que l'axe vertical  $(Oz)$  passe par le centre  $T$  de la Terre.

### Quelles forces doit-on prendre en compte dans le référentiel $\mathcal{R}'$ ?

Répondons à cette question sur l'exemple du pendule de Foucault (pendule accroché à un fil inextensible de plusieurs dizaines de mètres de long).

Les forces à considérer dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont :

- la tension du fil  $\vec{T}$
- ★ le poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ , qui contient l'effet de la force gravitationnelle  $\vec{F}_g$  et de la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie}$ . On rappelle que la valeur précise de  $g$  dépend de la latitude  $\lambda$ .
- la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$

Lors de la projection du PFD sur les axes du repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on aura donc besoin de connaître la projection de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ .

**Exercice :** Décomposer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  dans le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

★ 
$$\vec{\Omega} = \Omega(\cos(\lambda)\vec{e}_y + \sin(\lambda)\vec{e}_z)$$

Pour aller plus loin, nous devons considérer des exemples concrets de mouvements dans le référentiel terrestre non galiléen.

### III.2 Cas n°1 : mouvement principalement vertical : étude qualitative

Prenons l'exemple de la chute d'un point matériel dans un puits de mine de 158 m de hauteur, mené à une latitude  $\lambda$  (expérience historique menée en 1833). La chute est principalement verticale.

Qualitativement, on peut choisir de modéliser le vecteur vitesse comme étant dirigé selon  $-\vec{e}_z$  :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = -V\vec{e}_z$ , avec  $V \geq 0$ . Quel est l'effet de la force de Coriolis lors de la chute ?

- ★ On a :  $\vec{f}_{ic} = 2m\Omega V \cos(\lambda)\vec{e}_x$   
Or,  $2m\Omega V \cos(\lambda) \geq 0$ . Donc, l'effet de la force de Coriolis est de dévier le point matériel dans le sens  $+\vec{e}_x$ , c'est-à-dire vers l'Est. Cet effet, indépendant de l'hémisphère dans lequel on se trouve, se nomme la *déviations vers l'Est* des corps en chute libre.

Cet effet, démontrable expérimentalement, reste faible : 2.8 cm de déviation vers l'Est durant une chute de 158 m de haut à la latitude de  $\lambda = 51^\circ$ .

### III.3 Cas n°2 : mouvement principalement horizontal

#### a Étude qualitative

Considérons, comme premier exemple, le mouvement des vents géostrophiques dans l'atmosphère. Loin de la surface de la Terre (c'est-à-dire hors d'une couche limite atmosphérique, d'une épaisseur verticale de l'ordre du km), on modélise l'écoulement horizontal du vent dans le référentiel terrestre

comme dépendant uniquement des forces de pression et de la force d'inertie de Coriolis.

Quel est l'effet de la force de Coriolis ?

- Si le vent souffle du Sud vers le Nord :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = V\vec{e}_y$ , avec  $V \geq 0$  :  
 $\vec{f}_{ic} = 2m\Omega V \sin(\lambda)\vec{e}_x$ . Donc, dans l'hémisphère Nord ( $\lambda \geq 0$ ), la force d'inertie de Coriolis dévie le vent vers l'Est. Dans l'hémisphère Sud ( $\lambda \leq 0$ ), déviation vers l'Ouest.
- Si le vent souffle d'Est en Ouest :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = V\vec{e}_x$ , avec  $V \geq 0$  :  
 Les laisser chercher.  
 $\vec{f}_{ic} = 2m\Omega V(-\sin(\lambda)\vec{e}_y + \cos(\lambda)\vec{e}_z)$ . Si on ne s'intéresse qu'au mouvement horizontal, l'effet de la force d'inertie de Coriolis est de dévier le vent vers le Sud dans l'hémisphère Nord et vers le Nord dans l'hémisphère Sud.

Synthèse : On dit ainsi souvent que, dans l'hémisphère Nord, la force d'inertie de Coriolis a tendance à dévier le mouvement d'un système vers sa droite (dans le sens du mouvement) ; dans l'hémisphère Sud, elle a tendance à dévier le mouvement vers sa gauche.

Images satellites illustrant le sens du vent à proximité de dépressions (Etats-Unis, Madagascar) :

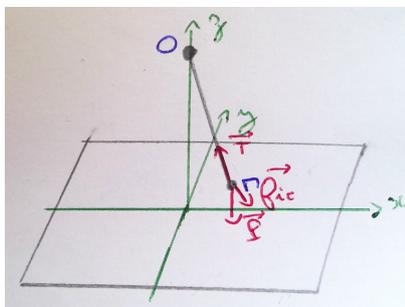


- ★ On explique avec les mains le mouvement du vent dans l'hémisphère Nord (Etats-Unis), puis dans l'hémisphère Sud (Madagascar).

## b Étude quantitative : résolution numérique

Études, comme deuxième exemple du mouvement horizontal, le pendule de Foucault (1851). Ce pendule est modélisé par un point matériel  $M$  de masse  $m = 28 \text{ kg}$  suspendu à un fil inextensible de longueur  $\ell = 67 \text{ m}$  à la latitude  $\lambda = 48.52^\circ$  (Panthéon de Paris). On se limite à une étude des petites oscillations. A l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre de  $a = 4.0 \text{ m}$  et est lâché avec une vitesse nulle dans le référentiel terrestre. L'objectif est d'obtenir les positions  $(x(t), y(t), z(t))$  du pendule dans le référentiel terrestre.

Mise en équation :



- Référentiel  $\mathcal{R}$  géocentrique galiléen
- Référentiel  $\mathcal{R}'$  terrestre, en rotation uniforme autour de l'axe fixe des pôles dans  $\mathcal{R}$
- Système : {Masse ponctuelle  $M$ } de masse  $m$
- Repère cartésien associé à  $\mathcal{R}'$  :  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , avec  $(Oz)$  vertical ascendant,  $(Ox)$  d'Ouest en Est et  $(Oy)$  du Sud vers le Nord.

Principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{f}_{ic}$$

avec :

$$\vec{a}(\lambda)_{/R'} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} ; \vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} ; \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(\lambda)_{/R'}$$

$$= -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \omega \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2m\Omega(-\omega \lambda \dot{y} + \sin \lambda \dot{z}) \\ -2m\Omega \sin \lambda \dot{x} \\ 2m\Omega \omega \lambda \dot{x} \end{pmatrix}$$

★

Donc, en projection :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x + 2m\Omega(\sin(\lambda)\dot{y} - \cos(\lambda)\dot{z}) \\ m\ddot{y} = T_y - 2m\Omega \sin(\lambda)\dot{x} \\ m\ddot{z} = T_z - mg + 2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x} \end{cases}$$

Ré-écriture du système d'équations :

- La tension du fil  $\vec{T}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{OM}$ . Donc, il existe une constante  $k$  telle que  $\vec{T} = k\vec{OM}$  :

$$\begin{cases} T_x = kx \\ T_y = ky \\ T_z = kz \end{cases} \Rightarrow T_x = T_z \frac{x}{z} \quad \text{et} \quad T_y = T_z \frac{y}{z}$$

- En ordre de grandeur, comparons le terme  $2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x}$  devant le terme  $mg$  :

$$\frac{2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x}}{mg} = \frac{\dot{x}}{1.0 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}} \ll 1 \iff 2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x} \ll mg$$

- Comme on étudie des mouvements de faible amplitude, le mouvement est principalement horizontal.

Donc, en ordre de grandeur, on a

$$\ddot{z} \ll g \quad \text{et} \quad \cos(\lambda)\dot{z} \ll \sin(\lambda)\dot{y} \quad \text{et} \quad z \simeq -\ell$$

Ainsi, le système d'équations simplifié s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_z \frac{x}{-\ell} + 2m\Omega \sin(\lambda)\dot{y} \\ m\ddot{y} = T_z \frac{y}{-\ell} - 2m\Omega \sin(\lambda)\dot{x} \\ 0 = T_z - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x + 2\Omega \sin(\lambda)\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{g}{\ell}y - 2\Omega \sin(\lambda)\dot{x} \end{cases}$$

### Résolution numérique :

On se propose de résoudre ce système de deux équations différentielles d'ordre 2 via une méthode numérique.

i) Définition des constantes du problème et de l'intervalle de résolution

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 ## Definition des constantes du probleme
6 g=9.81 # en m.s^-2
7 l=67 # en m
8 omega=7.3e-5 # en rad.s^-1
9 lambda=48.52*np.pi/180 # en rad
10 a=4 # en m
11
12 ## Definition de l'ensemble des valeurs t (en s) pour lesquelles
13 ## on cherche la solution
14 t=np.linspace(0,6*3600,10000) # 10000 points entre 0 et 6 h

```

## ii) La résolution en elle-même

On propose de conduire la résolution en utilisant la fonction *odeint* du module *scipy.integrate*.

Pour utiliser la fonction *odeint*, on ré-écrit le système de 2 équations différentielles d'ordre 2 portant sur  $(x,y)$  en un système de 4 équations d'ordre 1 portant sur  $(x,y,\dot{x} = u,\dot{y} = v)$  (attention, on n'a pas le droit de mettre une dérivée seconde à gauche, et tout doit dépendre des 4 variables à droite) :

$$\star \quad \begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{u} = -\frac{g}{\ell}x + 2\Omega \sin(\lambda)v \\ \dot{v} = -\frac{g}{\ell}y - 2\Omega \sin(\lambda)u \end{cases}$$

L'appel de la fonction *odeint* requiert les trois arguments suivants :

- la fonction (nommée ici *systDiff*) définissant le système différentiel à résoudre, qui doit elle-même présenter impérativement deux arguments : le vecteur inconnu que l'on souhaite déterminer, suivi de la variable d'influence par rapport à laquelle on conduit l'intégration numérique du système. Cette fonction retourne le vecteur dérivée première.
- les conditions initiales/aux limites du problème, données sous forme d'une liste ou d'un tableau numpy à une dimension.
- le tableau numpy des valeurs de  $t$  pour lesquelles on cherche à obtenir une estimation numérique de la solution ; le premier élément de ce tableau doit impérativement correspondre à "l'endroit" où les conditions initiales/aux limites précédemment données s'appliquent.

La fonction *odeint* retourne alors la solution du système différentiel sous la forme d'un tableau numpy, dans lequel le nombre de lignes correspond au nombre de valeurs  $t$  et le nombre de colonnes correspond au nombre de coordonnées du vecteur cherché.

Voici un exemple d'implémentation :

```

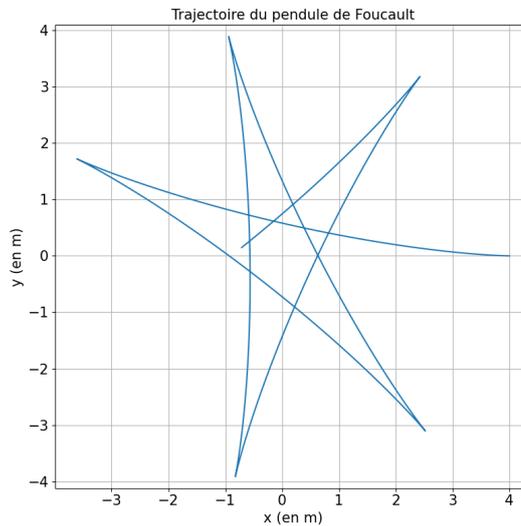
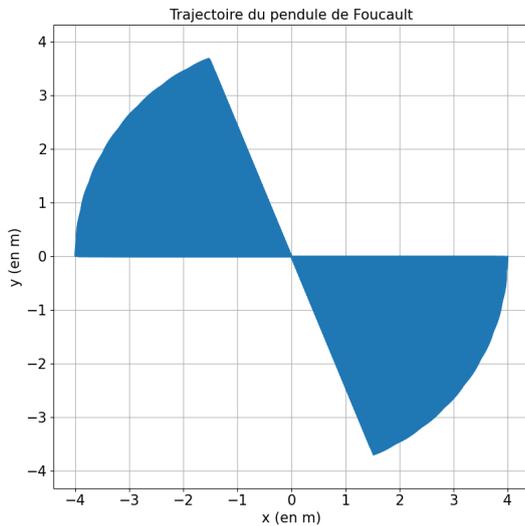
16 ## Definition du systeme differentiel
17 def systDiff(pos,t):
18     # pos est le vecteur position inconnu de dimension 4
19     # (pos[0] : x, pos[1] : y, pos[2] : u, pos[3] : v)
20     # t est le vecteur contenant les instants t de resolution
21     # La fonction renvoie la derivee 1ere temporelle du vecteur pos
22     dx=pos[2]
23     dy=pos[3]
24     du=-g/l*pos[0]+2*omega*np.sin(lambda)*pos[3]
25     dv=-g/l*pos[1]-2*omega*np.sin(lambda)*pos[2]
26     return([dx,dy,du,dv])
27
28 ## Definition des conditions initiales
29 CI=[a,0,0,0]
30
31 ## Resolution
32 sol=odeint(systDiff, CI, t)
33 x=sol[:,0] # Extraction des valeurs x pour chaque instant t
34 y=sol[:,1] # Extraction des valeurs y pour chaque instant t

```

### iii) Tracé graphique et analyse

On termine par des instructions pour le tracé graphique :

```
36 ## Trace graphique
37 plt.plot(x,y)
38 plt.title('Trajectoire du pendule de Foucault')
39 plt.xlabel('x (en m)')
40 plt.ylabel('y (en m)')
41 plt.axis('equal')
42 plt.grid()
43 plt.show()
```



(a) Résolution pour la vitesse de rotation terrestre  $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  pendant 6 h, à Paris  
(b) Résolution pour la vitesse de rotation  $\Omega = 7.3 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$  pendant 45 s, à Paris

Plusieurs commentaires peuvent être faits :

(Placer le point initial.)

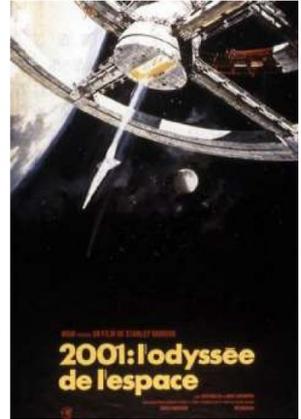
- On observe bien que le plan d'oscillation change avec le temps, signe du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Dans l'expérience réelle, le plan d'oscillation tourne de  $11^\circ$  par heure, ce qui semble conforme avec la simulation.
- Si  $\Omega$  augmente, la norme de la force d'inertie de Coriolis augmente, et le plan de rotation tourne plus rapidement.
- ★ Dans l'hémisphère Nord, on retrouve bien la déviation du pendule vers sa droite. Dans l'hémisphère Sud : vers sa gauche.
- Au niveau de l'Equateur, le paramètre de Coriolis  $f = 2\Omega \sin(\lambda) = 0$  : la force de Coriolis n'a pas d'effet sur le mouvement horizontal du pendule. Au contraire, l'effet est maximal aux pôles.
- (La simulation permet de vérifier a posteriori les hypothèses faites en odg. Pour  $z$ , il y aurait un peu de calcul, mais pour  $\dot{x}$ , on obtient :  $\dot{x} \leq 1.5 \text{ m/s}$  !)

## Exercices

### Ex. 1 (Oral CCINP MP 2023 et Ecrit CCINP MP 2022) Pesanteur artificielle et apesanteur

#### Pesanteur artificielle :

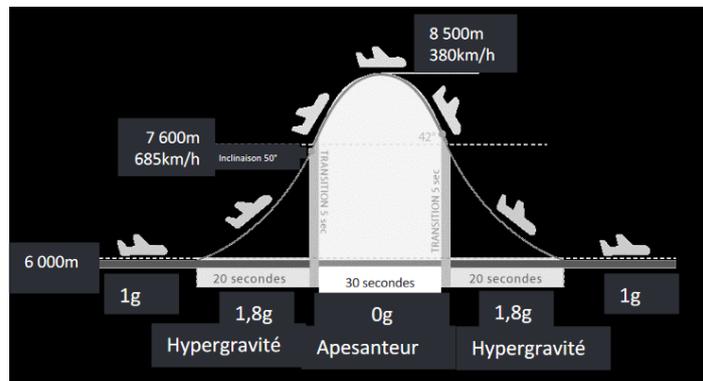
On considère une station spatiale, comme dans le film « 2001, l'odyssée de l'espace ». Cette station est constituée d'un tore de rayon  $R = 25$  m en rotation autour de son axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre : ils sont soumis à une gravité artificielle.



1. Exprimer le poids apparent d'un astronaute immobile de masse  $m = 70$  kg.
2. Calculer la vitesse angulaire  $\omega$  pour qu'au repos, le poids apparent soit égal au poids de l'astronaute sur Terre.
3. Dans une des scènes du film, un astronaute fait un jogging dans le tore. Montrer que s'il court trop vite, il décolle. Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?

#### Impesanteur :

Sur Terre, on peut recréer une situation d'impesanteur au cours d'un vol parabolique dans un avion, appelé "avion zéro-g". Les pilotes effectuent une trentaine de fois une manœuvre particulière dite "manœuvre parabolique" au cours de laquelle l'état d'apesanteur est recréé à bord pendant 30 secondes. La portion parabolique de la trajectoire de l'avion doit être confondue avec la parabole de chute libre de même sommet.



4. On raisonne sur un passager de masse  $m$  dans le référentiel en translation à la vitesse du centre d'inertie de l'avion zéro-g par rapport au référentiel terrestre galiléen. Expliquer pourquoi il y a impesanteur au cours de la portion parabolique de la trajectoire.
5. Vérifier la valeur de la durée de l'impesanteur à partir des caractéristiques du début du mouvement parabolique ( $v_0 = 685 \text{ km h}^{-1}$ , inclinaison par rapport au plan horizontal  $\alpha = 50^\circ$ ).

## Correction de l'exercice 1

#### Pesanteur artificielle

- Système :  $\{\text{Astronaute}M\}$
- Référentiel  $\mathcal{R}'$  de la station en rotation uniforme autour de l'axe ( $Oz$ ) fixe dans un référentiel galiléen
- Repère associé à  $\mathcal{R}'$  : cylindrique  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

1. L'astronaute étant à l'équilibre, loin de toute source d'interaction gravitationnelle, on a dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{0} = \vec{f}_{ie} + \vec{R}$$

avec  $\vec{R}$  la réaction du support. Le poids apparent se définit alors comme  $\vec{P}_{app} = -\vec{R} = \vec{f}_{ie}$ . Aini :

$$\vec{P}_{app} = m\omega^2 R \vec{e}_r$$

2. On a  $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$  avec  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ . A.N. :  $\omega = 0.63 \text{ rad s}^{-1} = 6.0 \text{ tours/min}$ .

3. Bilan des forces :

- Réaction du support :  $\vec{R} = -R\vec{e}_r$  avec  $R \geq 0$ . La réaction du support s'annule si l'astronaute décolle.
- Force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 R \vec{e}_r$
- Force d'inertie de Coriolis : responsable d'un potentiel décollement de l'astronaute.

### Cas i) Rotation dans le sens trigonométrique autour de (Oz)

L'astronaute courant dans le tore, son vecteur vitesse dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = V\vec{e}_\theta = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . On suppose qu'il court à vitesse constante dans  $\mathcal{R}'$  :  $\dot{\theta} = \text{cte}$ .



$\dot{\theta} \neq \omega$  :  $\omega$  est la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , ce qui n'a rien à voir avec la vitesse de rotation de l'astronaute par rapport à  $\mathcal{R}'$  !

On peut alors calculer  $\vec{f}_{ic} = -2m\omega\vec{e}_z \wedge V\vec{e}_\theta = +2m\omega V\vec{e}_r$ . Si  $V > 0$ , cette force est dirigée selon  $+\vec{e}_r$  : la réaction du support ne pourra jamais s'annuler (je vous conseille de représenter les forces sur un schéma). L'astronaute ne décolle pas s'il court dans le sens trigo.

### Cas ii) Rotation dans le sens horaire autour de (Oz)

Dans ce cas, on peut écrire  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = -V\vec{e}_\theta = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  avec  $V > 0$ . Donc,  $\vec{f}_{ic} = -2m\omega V\vec{e}_r$ . Cette force, dirigée selon  $-\vec{e}_r$ , peut permettre d'annuler la réaction du support si l'astronaute court assez vite.

Déterminons cette vitesse limite de course à laquelle l'astronaute décolle. A la limite du décollement,  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{V^2}{R}\vec{e}_r$  et la réaction du support s'annule. Le PFD dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit donc, en projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$-m\frac{V^2}{R} = \underbrace{m\omega^2 R}_{=mg_0} - 2m\omega V \Rightarrow V^2 - 2\omega RV + g_0 R = 0 \Rightarrow V^2 - 2\sqrt{g_0 R}V + g_0 R = 0 = (V - \sqrt{g_0 R})^2$$

La vitesse limite de décollement vaut donc  $V_{lim} = \sqrt{g_0 R}$ . A.N. :  $V_{lim} = 16 \text{ m s}^{-1} = 56 \text{ km h}^{-1}$ . Cette vitesse est donc finalement très élevée et l'astronaute ne pourra jamais décoller en pratique !

## Apesanteur

4. • Système : {Passager  $M$ } de masse  $m$   
 • Référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  galiléen  
 • Référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$

Dans  $\mathcal{R}'$ , on considère un passager à l'équilibre :  $\vec{0} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_{ie}$  avec  $\vec{R}$  la réaction du support. Le poids apparent auquel est soumis le passager à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$  est donc  $\vec{P}_{app} = -\vec{R} = \vec{P} + \vec{f}_{ie}$ . Il nous reste à déterminer  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ , autrement dit à déterminer l'accélération de l'avion dans  $\mathcal{R}$ .

L'avion étant lui-même en chute libre, il n'est soumis qu'à son poids. Le PFD appliqué à l'avion de masse  $M$  dans  $\mathcal{R}$  donne

$$M\vec{a}_e = M\vec{g} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{g}$$

Ainsi, le poids apparent du passager immobile dans  $\mathcal{R}'$  est  $\vec{P}_{app} = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0}$  : le passager est en apesanteur.

5. Il suffit de déterminer la durée que met l'avion à effectuer la trajectoire en chute libre depuis une altitude initiale de  $h = 7600 \text{ m}$  jusqu'à une altitude finale identique de  $h = 7600 \text{ m}$ . Il s'agit donc du problème usuel de la chute libre, avec des conditions initiales non nulles.

- Système : {avion} de masse  $M$
- Référentiel terrestre galiléen  $\mathcal{R}$

• Repère associé à  $\mathcal{R}$  : cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  avec  $\vec{e}_z$  vers le haut  
 On considère qu'à  $t = 0$ , l'avion est à l'altitude  $z = h$  avec une vitesse  $v_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.  
 On intègre deux fois le PFD dans  $\mathcal{R}$ , en projection sur  $\vec{e}_z$  :

$$M\ddot{z} = -Mg \Rightarrow \dot{z} = v_0 \sin(\alpha) - gt \Rightarrow z = h + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Donc, le vol parabolique se termine pour

$$z(t_f) = h = h + v_0 \sin(\alpha)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \Rightarrow t_f = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

A.N. :  $t_f = 30$  s On valide l'indication de la figure fournie.

## Ex. 2 Déviation vers l'Est par la méthode des perturbations

En 1833, Ferdinand Reich réalisa une centaine de lâchers de bille d'une hauteur  $h = 158$  m, sans vitesse initiale, dans un puits de mine à Freiberg (latitude  $\lambda = 51^\circ$ ). Il mesure une déviation moyenne de  $\delta = 28$  mm à l'Est de la verticale du point de lâcher, repérée avec un fil à plomb. On travaille dans le référentiel terrestre non galiléen, auquel on associe un repère cartésien ayant son origine  $O$  au fond du puits. On néglige les frottements de l'air sur la bille.

On cherche une solution approchée du problème par une méthode dite **des perturbations**. Cela consiste à résoudre le problème en ignorant la force de Coriolis, puis à utiliser l'expression de la vitesse ainsi trouvée pour évaluer la force de Coriolis.

### 1. Résolution à l'ordre 0 :

- Écrire les équations du mouvement en l'absence de la force de Coriolis, puis les résoudre.
- En déduire l'ordre de grandeur maximal de l'accélération de Coriolis, et comparer la force d'inertie de Coriolis au poids. Conclure.

### 2. Résolution à l'ordre 1 :

- Déterminer l'expression approchée de la force de Coriolis en utilisant l'expression de la vitesse à l'ordre 0.
- Réécrire les équations du mouvement avec cette approximation. Déterminer les coordonnées du point d'impact. Comparer à la mesure réalisée.

- On entend parfois dire que dans l'hémisphère Sud la bille est déviée vers l'ouest. Qu'en pensez-vous ?

---

## Correction de l'exercice 2

Voir corrigé manuscrit.

## Ex. 3 Conduite d'une moto sur une route orientée Nord-Sud

Un motard roule sur une autoroute horizontale et rectiligne, dans le sens Nord vers Sud, à la vitesse de  $200 \text{ km h}^{-1}$ . La latitude du lieu est de  $45^\circ$ . La masse du système {moto + motard} est de  $400 \text{ kg}$ .

- En utilisant la loi de composition des accélérations, établir l'expression de la force d'inertie de Coriolis qui s'applique sur un point matériel étudié dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- Calculer les composantes de la force d'inertie de Coriolis dans le cas présent. Commenter.
- De quel angle doit-il s'incliner s'il roule à vitesse constante (la réaction de la route doit être parallèle au plan de la moto pour qu'elle roule bien droit) ?

---

## Correction de l'exercice 3

Voir corrigé manuscrit.