Maths

Champs et analyse vectorielle

Sommaire

Savoir-faire exigibles du BO

- Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
- Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
- Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
- Définir $\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
- Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.

.

★ *Prise de notes :* En première année, différents champs ont déjà été étudiés : le champ électrique $\overrightarrow{E}$, magnétique $\overrightarrow{B}$, le champ de pression P, le champ d'énergie potentielle E_p etc. En lien avec ces champs, vous avez commencé à introduire l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$, pour relier une force conservative et la variation spatiale d'énergie potentielle : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Synthétiser, dans le même chapitre, toutes les connaissances à avoir sur l'analyse vectorielle, du point de vue mathématique.
2. S'entraîner à manipuler ou interpréter les outils d'analyse vectorielle sur des exemples.

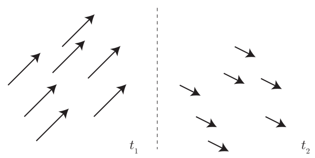
I Champs scalaires et vectoriels

I.1 Définitions

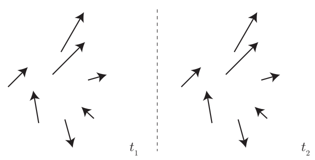
Définition : Champ : grandeur physique définie en tout point de l'espace (et pouvant également dépendre du temps).

Cette double dépendance spatio-temporelle des champs sera notée $f(M,t)$ ou en coordonnées cartésiennes $f(x,y,z,t)$. Ces champs peuvent être scalaires (champ de température, de pression, de potentiel électrique, etc.) ou vectoriels (champ de vitesse, champ électrique, magnétique, etc.), par exemple en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{f}(M,t) = f_x(M,t)\overrightarrow{e_x} + f_y(M,t)\overrightarrow{e_y} + f_z(M,t)\overrightarrow{e_z}$.

Un champ est *uniforme* dans une région de l'espace si la valeur du champ est la même en tous les points de cette région à un instant donné : il est donc seulement dépendant du temps ($f(t)$ ou $\overrightarrow{f}(t)$).

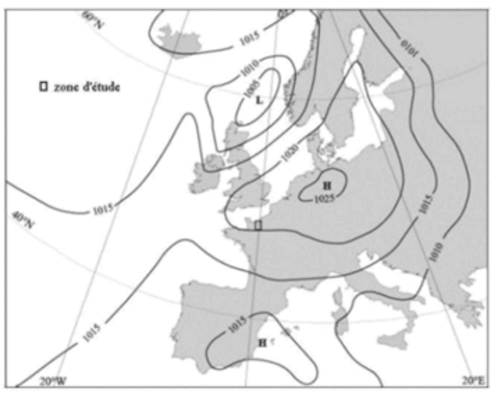


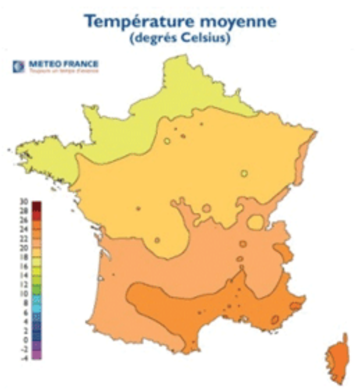
Un champ est *stationnaire* si la valeur du champ est la même à chaque instant, en un point donné : il ne dépend donc que des coordonnées d'espace ($f(M)$ ou $\overrightarrow{f}(M)$).



I.2 Surfaces de niveau d'un champ scalaire

Pour représenter spatialement un champ scalaire, on utilise une surface de niveau. Une *surface de niveau* est une surface en tout point de laquelle le champ scalaire prend la même valeur. L'intersection d'une surface de niveau avec un plan constitue une ligne de niveau. On les rencontre fréquemment en météorologie pour représenter les champ de pression et de température.





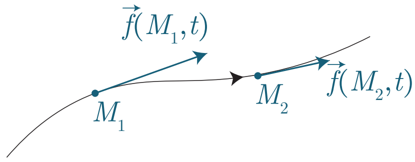
I.3 Lignes et tubes de champ pour un champ vectoriel

Pour représenter spatialement un champ vectoriel, on peut représenter un certain nombre de vecteurs à un instant donné, en 2D ou en 3D. Par exemple sur une carte météo des vents, la longueur des flèches est proportionnelle à la valeur de la vitesse des vents.

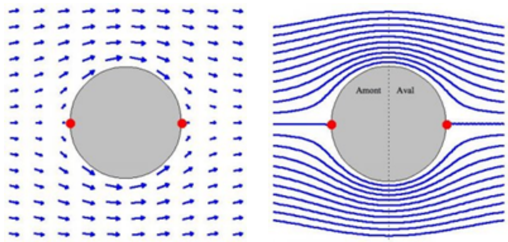
On utilise néanmoins plus couramment une *carte de champ*, constituée d'un ensemble de lignes de champ.

Ligne de champ

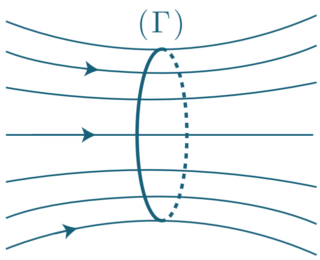
Une *ligne de champ* est une courbe qui est tangente, en chacun de ses points, au vecteur $\vec{f}(M,t)$ défini en ce point.



Cela permet par exemple de visualiser facilement un écoulement de fluide, si on considère le champ vectoriel des vitesses $\vec{v}(M,t)$ d'un fluide, comme illustré ci-contre.



L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé (Γ) constitue un *tube de champ* (c'est donc une surface) :



I.4 Circulation d'un champ vectoriel

Considérons un contour élémentaire orienté $\mathrm{d}\vec{r}$ à partir du point M. On appelle *circulation élémentaire* d'un champ vectoriel $\vec{f}$ le scalaire :

$$\delta C = \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

La *circulation* d'un champ vectoriel $\vec{f}$ sur un parcours AB fini est la somme de toutes les circulations élémentaires :

★

$$C = \int_{(AB)} \delta C = \int_{(AB)} \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

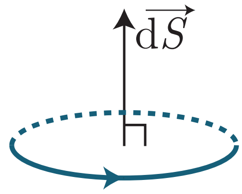
Si le parcours (Γ) est fermé, on place un rond au niveau de l'intégrale :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Remarque : Ce concept est une généralisation du travail d'une force à tous les champs vectoriels $\vec{f}$.

I.5 Flux d'un champ vectoriel

★ Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ autour d'un point M. Cette surface est limitée par un contour fermé orienté, où la règle de la main droite (ou du tire-bouchon) donne le sens du vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, normal à cette surface.



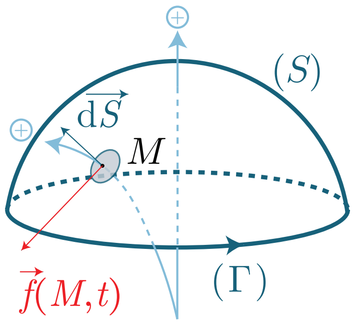
Le flux élémentaire du champ de vecteur $\overrightarrow{f}(M,t)$ à travers la surface élémentaire orientée est défini par

$$\delta\Phi = \overrightarrow{f}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Un flux est une grandeur caractérisant une quantité vectorielle traversant une surface. Il est souvent associé en physique à un débit d'une grandeur physique : débit de particules, d'énergie thermique, de charge électrique, de volume de fluide, etc.

Si une surface (S) finie s'appuie sur un contour fermé orienté (Γ), le flux de $\overrightarrow{f}$ à travers cette surface se calcule en sommant l'ensemble des flux élémentaires :

$$\Phi = \iint_{(S)} \delta\Phi = \iint_{(S)} \overrightarrow{f}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$



Le flux dépend a priori de la surface (S) choisie s'appuyant sur (Γ).

Si la surface est fermée, on ajoute également un rond au niveau de l'intégrale double : $\oiint_{(S)} \overrightarrow{f}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. Dans ce cas, par convention, tous les *vecteurs surface élémentaire sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur.*

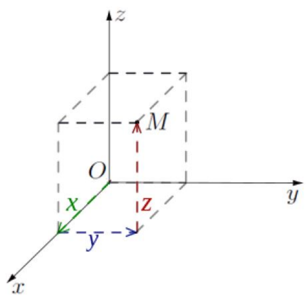
II Surfaces et volumes élémentaires

Étant donné que les grandeurs précédentes se calculent grâce à des intégrations sur des contours ou surfaces élémentaires, rappelons certains résultats sur les systèmes de coordonnées usuels en physique.

II.1 Coordonnées cartésiennes

a Base

En coordonnées cartésiennes, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (x,y,z).
Le vecteur position est : $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$



b Déplacement élémentaire

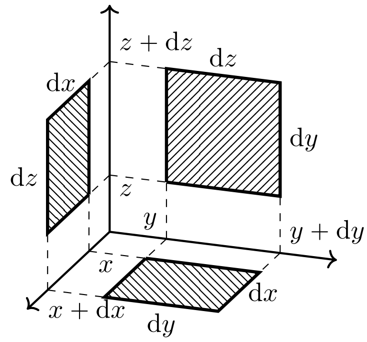
Le vecteur déplacement élémentaire est alors :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z} \qquad \text{(II.1)}$$

c Surfaces élémentaires

On peut définir trois surfaces élémentaires simples, perpendiculaires soit :

- au vecteur $\overrightarrow{e_x}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}$;
- au vecteur $\overrightarrow{e_y}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{e_y}$;
- au vecteur $\overrightarrow{e_z}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{e_z}$.



d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées cartésiennes :

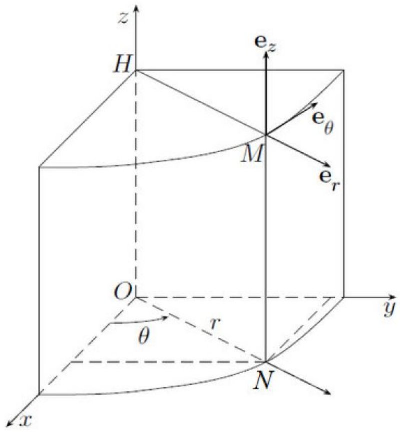
$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{II.2}$$

Remarque : Notons qu'il est possible de noter le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$, en référence au fait qu'il s'agit d'un infiniment petit d'ordre 2. De même, on pourra noter le volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau$, en référence au fait qu'il s'agit d'un infiniment petit du 3$^{\text{e}}$ ordre.

II.2 Coordonnées cylindriques

a Base locale

En coordonnées cylindriques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r,θ,z).
Le vecteur position est : $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$



b Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$$

c Surfaces élémentaires

On peut exprimer les trois surfaces élémentaires :

- selon $\overrightarrow{e_r}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{e_r}$;
- selon $\overrightarrow{e_\theta}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\overrightarrow{e_\theta}$;
- selon $\overrightarrow{e_z}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_z}$.

d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r(r\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{II.3}$$

Exercice : Déterminer le volume d'un manchon cylindrique d'épaisseur dr et de hauteur h.

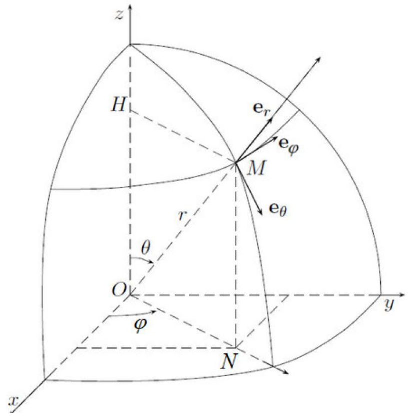
★

Schéma + stratégie : calcul du volume élémentaire, puis intégration en faisant tourner d'un angle θ et en déplaçant suivant z.

$$\mathrm{d}\tau = \iint_{\theta,z} \mathrm{d}^3\tau = r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h \mathrm{d}z = 2\pi r\mathrm{d}rh = \mathcal{A}_{base} \times hauteur$$

où l'aire de la base correspond au périmètre du cercle de rayon r multipliée par son épaisseur dr.

II.3 Coordonnées sphériques



a Base locale

En coordonnées sphériques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r, θ, φ).
Le vecteur position est : $\vec{r} = r\vec{e_r}$

b Déplacement élémentaire

Ainsi le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + r\ \sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e_\varphi}$$

c Surfaces élémentaires

Exercice : Déterminer les trois vecteurs surfaces élémentaires en coordonnées sphériques.

★
- selon $\vec{e_r}$, $\mathrm{d}\vec{S} = r^2\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e_r}$;
- selon $\vec{e_\theta}$, $\mathrm{d}\vec{S} = r\ \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\vec{e_\theta}$;
- selon $\vec{e_\varphi}$, $\mathrm{d}\vec{S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\vec{e_\varphi}$.

d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées sphériques :

$$\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r(r\mathrm{d}\theta)(r\ \sin\theta\mathrm{d}\varphi) = r^2\ \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{II.4}$$

Exercice : Déterminer le volume d'une coquille sphérique d'épaisseur $\mathrm{d}r$.

★

$$\mathrm{d}\tau = \iint_{\theta,\varphi} \mathrm{d}^3\tau = r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = r^2\mathrm{d}r\big[-\ \cos\theta\big]_0^\pi \times 2\pi = 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

correspondant à la surface de la sphère de rayon r multipliée par l'épaisseur $\mathrm{d}r$ de la coquille sphérique.

III Opérateurs différentiels

Dans toute la suite, on omet (momentanément) la dépendance temporelle des champs scalaires ou vectoriels, car les opérateurs que l'on va introduire n'agissent que sur les dépendances spatiales.

III.1 Le gradient

a Définition intrinsèque et interprétation physique

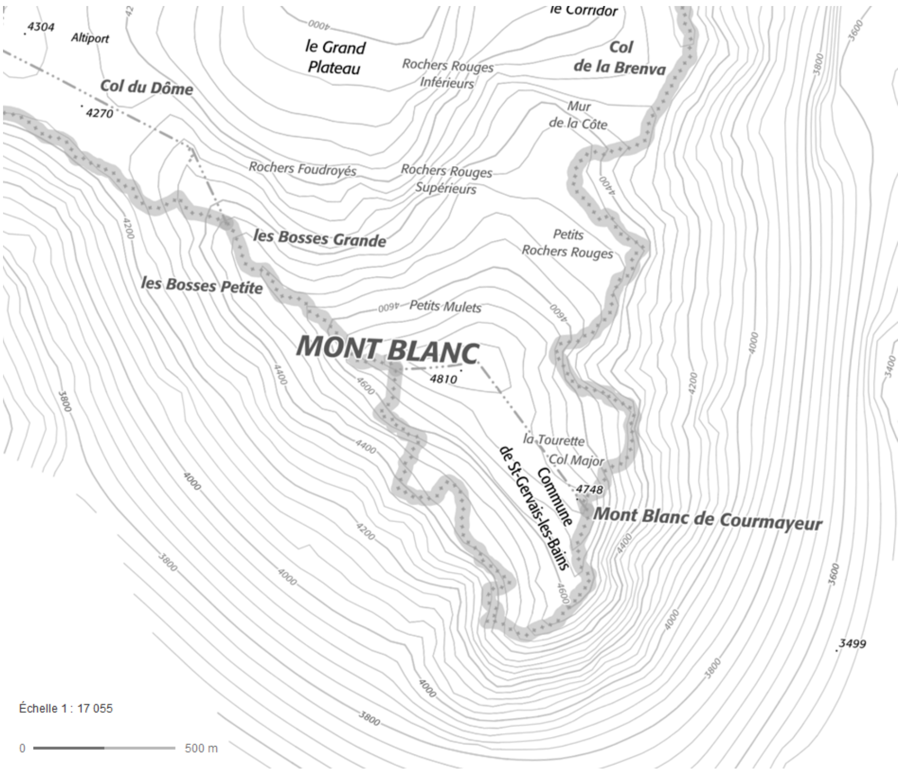
L'opérateur gradient est un opérateur linéaire qui *associe à un champ scalaire un champ vectoriel.* Considérons un champ scalaire $f(M)$. À un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$ est associée une variation élémentaire $\mathrm{d}f$ de f. On définit l'opérateur gradient par :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(M)) \cdot \mathrm{d}\vec{r}} \tag{III.1}$$

D'un point de vue physique :

- $\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\right\|$, de dimension $[f]\cdot \text{L}^{-1}$, mesure les variations spatiales locales de f : plus f varie fortement au voisinage de M, plus $\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\right\|$ est grand ;
- la direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement : $\mathrm{d}f$ est le plus grand si $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ est dirigé selon $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$;
- ★ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est dirigé vers les valeurs de f croissantes.
- l'ensemble des points M tels que $f = cste$ définit une surface dans l'espace, et une ligne dans un plan. Si, à partir d'un point de cette surface, on se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ sur cette surface / ligne, $\mathrm{d}f = 0$: *le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est orthogonal aux surfaces/lignes $f = cste$.*
- un champ scalaire uniforme a un gradient nul, et réciproquement un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région

On peut illustrer ces concepts sur une carte IGN en traçant $\overrightarrow{\text{grad}}(h)$, où l'on observe les lignes de même altitude (= lignes de niveau) :



b Expression analytique

★ En coordonnées cartésiennes, on sait que $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, et comme $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$, il vient par identification :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(f(M)) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}}$$

Attention, en coordonnées cylindriques ou sphériques, l'expression du déplacement élémentaire étant plus complexe, on trouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{III.2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \tag{III.3}$$

Exercice : On considère une force newtonienne $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques. Cette force est conservative, de sorte qu'il existe une fonction énergie potentielle E_p telle que : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$. Déterminer E_p.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

★ Donc, ici, $E_p(r)$. On cherche donc $E_p(r)$ tel que

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{K}{r} + \text{cste}$$

c L'opérateur nabla

Il est courant d'introduire un opérateur que l'on traite "comme un vecteur" (mais qui est en réalité un opérateur), appelé nabla et noté $\overrightarrow{\nabla}$, tel que par exemple en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{III.4}$$

Ainsi par exemple, l'opérateur gradient s'écrit $\overrightarrow{\nabla}(f)$.

⚠ En dehors des coordonnées cartésiennes, il faut être très prudent quant à l'usage du vecteur nabla.

III.2 Le rotationnel

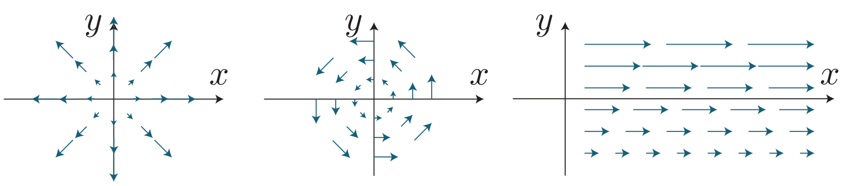
a Définition intrinsèque et interprétation physique

★ L'opérateur *rotationnel* est un opérateur linéaire qui associe à un champ vectoriel un autre champ vectoriel. On considère un champ vectoriel $\overrightarrow{f}$ et un élément de surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ défini autour du point M. On peut alors construire la circulation élémentaire du champ $\overrightarrow{f}$ le long du contour élémentaire fermé délimitant la surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. L'opérateur rotationnel est alors défini par la relation :

$$\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{f}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

D'un point de vue concret, le rotationnel d'un champ en un point est un vecteur décrivant la propension du champ à tourner autour de ce point, vu qu'alors la circulation du champ le long d'un contour élémentaire entourant ce point est non nulle. La direction du rotationnel est celle de l'axe autour duquel le champ tourne, et sa norme est d'autant plus grande que le champ tourne "vite". Il permet par exemple de décrire des écoulements dans des tornades, en mécanique des fluides.

Exemples : De gauche à droite : champ radial $\overrightarrow{f} = g(r)\overrightarrow{e_r}$, orthoradial du type rotation solide $\overrightarrow{f} = \omega r\overrightarrow{e_\theta}$, champ du type $\overrightarrow{f} = (ay+b)\overrightarrow{e_x}$ $(a>0)$.



★ Mettre une particule carré dans le fluide. Ecrire $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{e_z} > 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{e_z} < 0$

Pour interpréter ces cartes de champs, il faut avoir en tête que deux effets peuvent faire tourner une particule dans un fluide :

- la forme des lignes de champ
- la norme des vecteurs vitesse

b Expression analytique

En coordonnées cartésiennes, on peut démontrer l'expression analytique de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})$ (cf. annexe). Cette expression est à connaître :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}} \tag{III.5}$$

Exercice : Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})$ pour $\vec{f} = (ay+b)\vec{e_x}$ en coordonnées cartésiennes.

★ La difficulté est de comprendre qu'ici : $\vec{f} = f_x(y)\vec{e_x}$. Donc, ici : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = -a\vec{e_z}$ Cohérent avec ce qu'on a dit sur les cartes de champs.

En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions sont plus complexes et ne sont pas à connaître :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f}(r,\theta,z)) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial f_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r f_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f}(r,\theta,\varphi)) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial(\,\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r f_\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r f_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

Exercice : On considère, dans le référentiel terrestre, un solide en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{e_z})$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$ constant. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ des points M du solide. Relier alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$ au vecteur $\vec{\Omega}$.

★ Coordonnées cartésiennes $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ (associées au réf terrestre par exemple) : (On raisonne sur un pt fixe dans le référentiel du solide, et utilise la vitesse d'entraînement.)

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) &= \underbrace{\vec{v}(O)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \\ &= \Omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ &= \Omega(-y\vec{e_x} + x\vec{e_y}) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$$

OU de manière plus simple :
Coordonnées cylindriques $(O,\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} \Rightarrow \vec{v}(M) = r\Omega\vec{e_\theta} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\Omega\vec{e_z}$$

En mécanique des fluides, $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$ est appelé vecteur tourbillon et caractérise la rotation des particules de fluide au voisinage de chaque point du fluide : interprétation cohérente avec la mécanique des solides.

Exemples :

- un champ radial du type $\vec{f} = g(r)\vec{e_r}$ possède un rotationnel nul ;
- un champ orthoradial en coordonnées cylindriques du type $\vec{f} = \omega r\vec{e_\theta}$ possède un rotationnel non nul : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = 2\omega\vec{e_z}$...

- ... mais celui du type $\vec{f} = a\vec{e_\theta}$ avec a une constante possède un rotationnel nul (alors que la topographie de ce champ pourrait laisser penser que "le champ tourne")

⚠ Il faut donc faire attention aux interprétations des cartes de champ, qui peuvent sembler trompeuses de prime abord...

c Théorème de Stokes-Ampère

En lien avec la définition intrinsèque du rotationnel, citons un théorème régulièrement utilisé en électromagnétisme :

Théorème de Stokes-Ampère

★ La circulation d'un champ vectoriel $\vec{f}$ le long d'une courbe fermée orientée (Γ) est égale au flux de son rotationnel sortant de toute surface (S) orientée qui s'appuie sur (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

d Champs à circulation conservative

On peut alors généraliser le concept de force conservative à d'autres champs vectoriels.

Champ à circulation conservative

Un champ vectoriel $\vec{f}$ est dit à circulation conservative si et seulement si :

★
- sa circulation entre deux points A et B quelconques est indépendante du chemin suivi entre A et B ;
- $\Longleftrightarrow$ sa circulation est nulle sur TOUT parcours fermé ;
- $\Longleftrightarrow$ son rotationnel est nul $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \vec{0}$.
- $\Longleftrightarrow$ il existe un champ scalaire g tel que $\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}g$; on dit alors que $\vec{f}$ dérive de g, ce qui revient à poser $\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)$;

III.3 La divergence

a Définition intrinsèque et interprétation physique

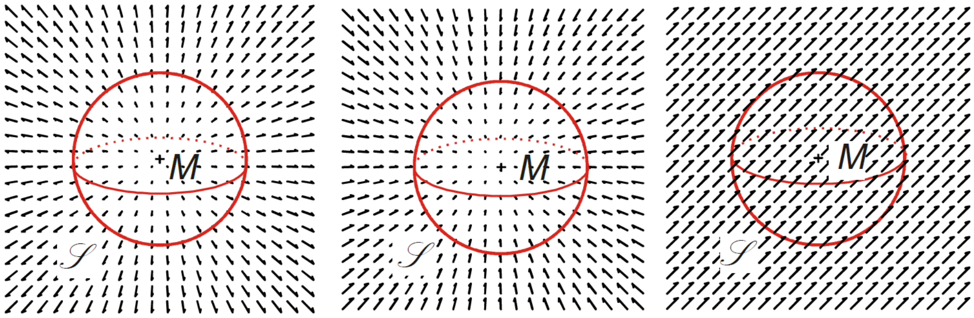
★ L'opérateur divergence, noté div est un opérateur linéaire qui *associe à un champ vectoriel un champ scalaire*. Considérons un champ vectoriel $\vec{f}(M)$ et un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ défini autour du point M. On peut alors construire le flux élémentaire $\delta\Phi$ du champ $\vec{f}$ à travers la surface fermée élémentaire orientée délimitant le volume $\mathrm{d}\tau$:

$$\boxed{\delta\Phi = \mathrm{div}(\vec{f}(M))\mathrm{d}\tau}$$

Un champ de vecteur "diverge" en un point si son flux à travers une surface élémentaire entourant ce point est non nul. L'opérateur divergence calculé en un point permet donc de quantifier le caractère divergent d'un champ de vecteur autour d'un point de l'espace. Concrètement, la divergence quantifie les sources du champ :

- si $\mathrm{div}(\vec{f}) > 0$, au point M, cela veut dire que $\vec{f}$ a tendance à "sortir" de M, c'est-à-dire que M peut être vu comme une source de $\vec{f}$;
- si $\mathrm{div}(\vec{f}) < 0$, $\vec{f}$ a tendance à "être absorbé" par M ;
- si $\mathrm{div}(\vec{f}) = 0$, alors M ne produit ni n'absorbe $\vec{f}$.

Exemples : De gauche à droite, un champ localement radial et divergent, celui d'un champ convergent et celui d'un champ uniforme. Signe de div $\vec{f}$?



b Expression analytique

En coordonnées cartésiennes, on peut démontrer l'expression analytique de $\mathrm{div}(\vec{f})$ (cf. annexe). Cette expression est à connaître :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}} \qquad \text{(III.6)}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions sont plus complexes et ne sont pas à connaître :

$$\mathrm{div}(\vec{f}(r,\theta,z)) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad \text{(III.7)}$$

$$\mathrm{div}(\vec{f}(r,\theta,\varphi)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial(\ \sin\theta f_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \qquad \text{(III.8)}$$

⚠ On ne peut pas utiliser $\vec{\nabla}$ explicitement en terme de vecteur en coordonnées cylindriques ou sphériques, pour la bonne raison que les vecteurs de la base locale varient. Par exemple en coordonnées cylindriques, en écrivant $\vec{\nabla} = \frac{\partial \ldots}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \ldots}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial \ldots}{\partial z}\vec{e_z}$, on trouverait

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad \text{(III.9)}$$

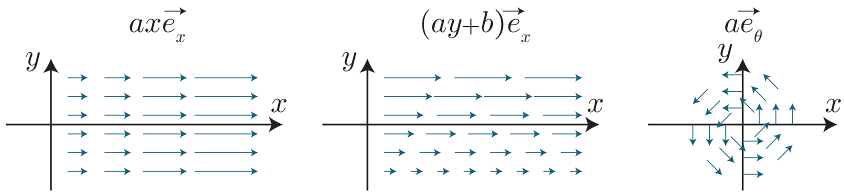
dont l'expression est fausse ! Il en est de même pour le rotationnel.

Exercice : Calculer $\mathrm{div}(\vec{f})$ pour $\vec{f} = (ay + b)\vec{e_x}$ en coordonnées cartésiennes. Interprétation graphique ?

★ La difficulté est de comprendre qu'ici : $\vec{f} = f_x(y)\vec{e_x}$. Donc, ici : $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$ Graphiquement, $\vec{f}$ ne semble ni entrer, ni sortir dans un carré dessiné sur la carte de champ.

Exemples :

- un champ uniforme est de divergence nulle : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{cste} = 0$;
- un champ du type $\vec{f} = ax\vec{e_x}$, avec $a > 0$, est divergent (!!) : $\mathrm{div}\,\vec{f} = a$;
- un champ radial en coordonnées sphériques $\vec{f} = \alpha\vec{e_r}$ est divergent : $\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{2\alpha}{r}$;
- un champ orthoradial en coordonnées cylindriques $\vec{f} = \alpha\vec{e_\theta}$ est de divergence nulle ;



⚠ Ne pas toujours se fier aux cartes de champ pour conclure si la divergence est nulle ou non : par exemple pour $\vec{f} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques, $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$, semblant contradictoire avec la topographie de ce champ (mais ce dernier n'est pas défini à l'origine du repère O).

c Théorème de Green-Ostrogradski

De part la définition intrinsèque de la divergence, il vient un théorème régulièrement utilisé :

Théorème de Green-Ostrogradski

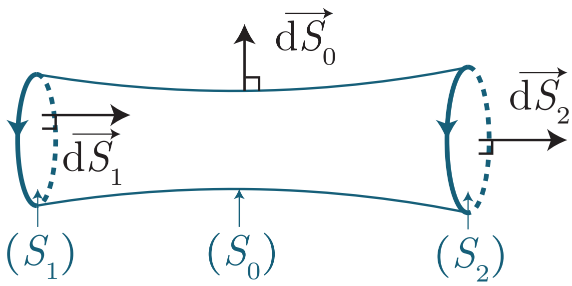
★ Le flux de $\vec{f}$ à travers une surface fermée (S) orientée est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume $(\mathcal{V})$ délimité par (S) :

$$\oiint_{(S)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \mathrm{div}(\vec{f})\mathrm{d}\tau$$

d Champ à flux conservatif

D'après ce qui précède, tout champ à divergence identiquement nulle a donc un flux nul à travers toute surface fermée : on dit qu'il est *à flux conservatif*.

★ Pour comprendre cette notion, considérons un tube de champ (S_0) que l'on ferme pour former (S) : $(S) = (S_0) \cup (S_1) \cup (S_2)$ est fermé (OK pour Green-Ostrogradski).



Si le champ $\vec{f}$ est de divergence nulle

$$\oiint_{(S)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \iint_{(S_1)} \vec{f} \cdot \left(-\mathrm{d}\vec{S}_1\right) + \iint_{(S_0)} \underbrace{\vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_0}_{=0} + \iint_{(S_2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

donc le flux de $\vec{f}$ est conservé le long du tube :

$$\iint_{(S_1)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = \iint_{(S_2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

Champs à flux conservatif

Un champ vectoriel $\vec{f}$ est dit à flux conservatif si et seulement si :

★
- son flux se conserve le long d'un tube de champ.
- $\iff$ son flux est nul à travers TOUTE surface fermée ;
- $\iff$ sa divergence est nulle $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$.
- $\iff$ il existe un champ vectoriel $\vec{g}$ tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}$;

III.4 Le laplacien

Le laplacien est un opérateur linéaire pouvant s'appliquer à :

- un champ scalaire et il donne alors un scalaire ;
- un champ vectoriel et il donne alors un champ vectoriel.

a Laplacien scalaire

Par définition, le laplacien scalaire s'écrit :

$$\boxed{\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\right)} = \vec{\nabla}^2 f \tag{III.10}$$

ce qui donne en coordonnées cartésiennes (expression à connaître) :

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \tag{III.11}$$

Notons au passage qu'il existe une signification physique au laplacien scalaire : le laplacien de f calculé en M_0 permet de comparer la valeur moyenne de f au voisinage de M_0 à $f(M_0)$. En particulier :

- si M_0 est un maximum local de f, on a $(\Delta f)(M_0) < 0$;
- si M_0 est un minimum local de f, on a $(\Delta f)(M_0) > 0$

Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques, à ne pas connaître, sont écrites ci-dessous :

$$\Delta f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{III.12}$$

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{III.13}$$

Remarque : L'équation $\Delta f = 0$ s'appelle l'**équation de Laplace**. Nous en verrons quelques exemples concrets cette année.

b Laplacien vectoriel

Pour un champ vectoriel, la définition intrinsèque du laplacien vectoriel est :

$$\Delta \vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{f}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{f}) \tag{III.14}$$

mais possède en coordonnées cartésiennes une expression simple (à connaître) :

$$\boxed{\Delta \vec{f} = \Delta f_x \vec{e_x} + \Delta f_y \vec{e_y} + \Delta f_z \vec{e_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}} \tag{III.15}$$

III.5 Composition d'opérateurs vectoriels

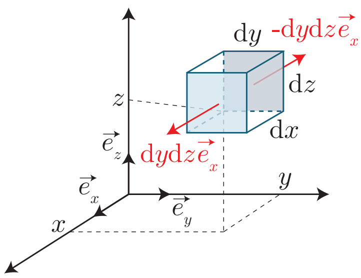
Terminons ce chapitre en explicitant deux relations d'analyse vectorielle à connaître, que l'on peut facilement retrouver à l'aide de l'opérateur nabla, pour la composition d'opérateurs.

- Le rotationnel d'un gradient est toujours nul : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)) = \vec{0}$. On peut se rappeler rapidement cette propriété à l'aide de nabla : $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$ (produit vectoriel nul).
- La divergence d'un rotationnel est toujours nul : $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{f}) = 0$. À l'aide de nabla : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$.

Annexe

Expression analytique de l'opérateur divergence en coordonnées cartésiennes :

Pour obtenir une expression analytique de $\mathrm{div}(\vec{f})$ en coordonnées cartésiennes, on calcule le flux de $\vec{f}$ à travers une surface fermée élémentaire orientée délimitant un volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Par convention, la surface est orientée de l'intérieur vers l'extérieur du cube. Commençons par les deux faces du cube orientées selon $\pm\vec{e_x}$:



$$\begin{aligned}\delta\Phi_x &= \left(\vec{f}(x+\mathrm{d}x,y,z) - \vec{f}(x,y,z)\right)\cdot(\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e_x})\\ &= \left(f_x(x+\mathrm{d}x,y,z) - f_x(x,y,z)\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\simeq \frac{\partial f_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial f_x}{\partial x}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

En effectuant le même calcul sur les deux autres paires de faces, il vient :

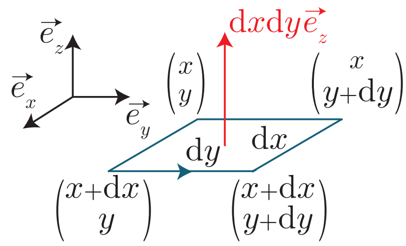
$$\delta\Phi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau = \mathrm{div}(\vec{f})\mathrm{d}\tau$$

donc par identification :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$$

Expression analytique de l'opérateur rotationnel en coordonnées cartésiennes :

Pour déterminer une expression analytique de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f})$ en coordonnées cartésiennes, on calcule la circulation sur le contour élémentaire entourant la surface $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e_z}$:



$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x+\mathrm{d}x,y)\mathrm{d}y\\ &\quad - f_x(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x - f_y(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

On simplifie l'expression précédente en négligeant les termes infiniment petits d'ordre 2 devant ceux d'ordre 1 :

$$f_y(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}y = f_y(x,y)\mathrm{d}y + \frac{\partial f_y(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}y \simeq f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$f_x(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = f_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f_x(x,y+\mathrm{d}y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x \simeq f_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

En combinant les termes :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C} &= \left(f_y(x+\mathrm{d}x,y) - f_y(x,y)\right)\mathrm{d}y + \left(f_x(x,y) - f_x(x,y+\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f})\cdot\vec{e_z} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$.

En reprenant le même raisonnement pour deux autres surfaces élémentaires orientées selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$, on trouve l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f})$ donnée dans le cours.