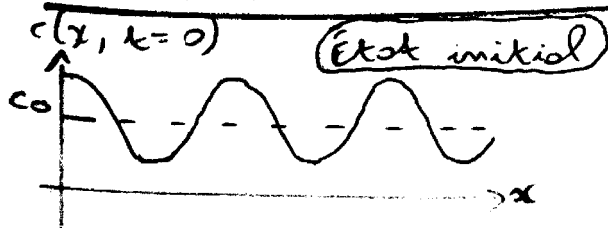


Correction de l'exercice 2, TD T3:



1) Équation de la diffusion sans terme source:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c + 0$$

En coordonnées cartésiennes, avec c qui ne dépend que de x et t :

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}} \quad (E)$$

Dans le cas général, en régime non stationnaire, on ne sait pas résoudre une équation couplant une dépendance spatiale avec une dépendance temporelle.

2) On recherche la solution sous la forme:

$$c(x, t) = c_0 + f(t) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

→ Valeur moyenne (spatiale): $\langle c(x, t) \rangle = c_0$

La valeur moyenne est conservée, car l'objet de la diffusion est d'homogénéiser c : pas d'effet sur c_0 .

→ Malgré la diffusion, l'état initial en $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ persiste dans le temps, et finira par être homogénéisé: $f(t \rightarrow +\infty) = 0$.

3) On injecte la forme proposée dans (E):

$$\frac{df}{dt} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = D \times \left(-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right) f(t) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -D \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Cette équation est valable $\forall x$. On peut donc en déduire (prendre $x=0$ par exemple) :

$$\boxed{\frac{df}{dt} = - \frac{4\pi^2 D}{\lambda^2} f(t)}$$

Solution : $f(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 D}}$

Condition initiale : $f(t=0) = c_1$.

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Unité de τ : $[\tau] = \frac{L^2}{L^2 \cdot T^{-1}} = T$: τ est bien

Romagine à un temps (unité : s).

Sens donné à τ :

Temps caractéristique mis par la diffusion pour homogénéiser c , dont l'échelle spatiale d'inhomogénéité est λ . Après quelques τ , concentration uniforme et égale à c_0 .

