Mesures et incertitudes en CPGE

remarque importante : l'étude des incertitudes de mesure ne se résume pas à faire des calculs. Il est indispensable de conserver un **regard qualitatif** : savoir dresser la liste des différentes erreurs expérimentales, savoir les classer en erreurs systématiques ou en erreurs aléatoires afin de comprendre leurs conséquences sur le résultat de la mesure (cf dans la suite du poly. « Comparaison entre deux grandeurs »), savoir comparer leurs incertitudes associées.

➢ Ecriture d'un résultat expérimental :

→ grandeur physique mesurée : x
→ résultat expérimental : x_{exp}
→ incertitude-type : $u(x_{exp})$

x, x_{exp} et $u(x_{exp})$ sont à exprimer avec la même unité !

conventions d'écriture du résultat : $x = x_{exp} \pm u(x_{exp})$ *unité*
_ $u(x_{exp})$: deux C.S. (voire un seul) pour l'incertitude-type - arrondi par excès
_ x_{exp} : dernier C.S.de même rang que le dernier chiffre de l'incertitude - arrondi au plus près

➢ Mesure directe de la grandeur :

Série de *N* mesures indépendantes

$x_{exp} = \overline{x}$

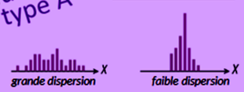
moyenne des valeurs obtenues

Évaluation par une approche **statistique**

Évaluation de type A

► l'écart-type σ : estime la dispersion de la série

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$



et donne l'incertitude-type associée à une mesure

► On réduit l'incertitude en prenant en compte toute la série.

Alors :

$$u(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Incertitude-type **de la moyenne**

diminue si le nombre *N* de mesures augmente

évaluation de **type A** de l'incertitude

Mesure unique

$x_{exp} = x_{mes}$

valeur **donnée par l'instrument** de mesure

Évaluation par une approche **non statistique**

Évaluation de type B

$$u(x_{mes}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Incertitude-type **de la valeur mesurée**

► liée à la demi-largeur de l'intervalle
on est presque certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[x_{mes} - \Delta, x_{mes} + \Delta]$ (estimation)

- règle graduée au mm : $\Delta =$ 0,5 mm * **multimètre**
- verrerie précise à : 0,1 mL $\Delta =$ 0,1 mL
- etc... et attention à prendre en compte l'expérimentateur

évaluation de **type B** de l'incertitude

*multimètre : Δ calculable (cf notice - par exemple : « 0,2 % L + 1 digit »).

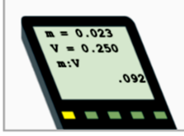
➢ Cas de plusieurs sources d'incertitude sur la même grandeur :

$$u(x_{mes}) = \sqrt{u(x_{mes,1})^2 + u(x_{mes,2})^2 + \cdots}$$

(Exemple du volume versé avec une burette graduée : incertitude constructeur + ½ graduation + volume d'une goutte.)

➢ Mesure indirecte de la grandeur :

Calcul



$x_{exp} = x_{calc}$

calculée à partir de valeurs mesurées

$u(x_{calc})$ Incertitude-type **composée**

► $x_{calc} = x_1 \pm x_2 \Rightarrow u(x_{calc}) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$

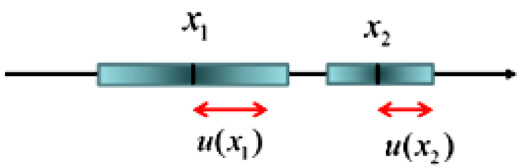
► $x_{calc} = a\,x_1 x_2$ ou $a\,x_1/x_2 \Rightarrow \frac{u(x_{calc})}{x_{calc}} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

► autre formule : méthode Monte-Carlo

formule(s) de propagation des incertitudes

➢ Comparaison entre deux grandeurs : écart normalisé (ou Z-score)

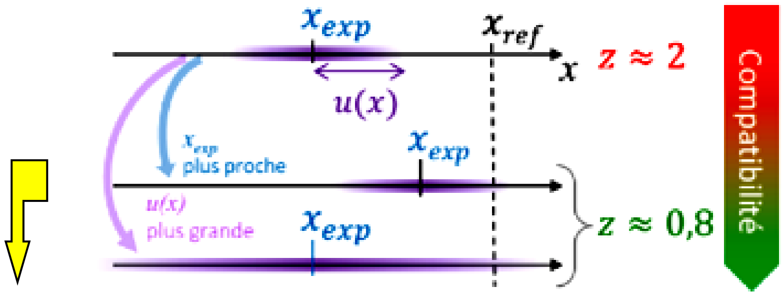
→ **comparaison entre deux grandeurs expérimentales :**



$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}}$$

valeurs compatibles si $E_N \lesssim 2$

→ **comparaison entre une grandeur expérimentale et une grandeur de référence (d'incertitude-type négligeable devant l'incertitude-type associée à la grandeur expérimentale) :**



$$E_N = \frac{|x_{exp} - x_{ref}|}{u(x)}$$

valeurs compatibles si $E_N \lesssim 2$

discussion qualitative à avoir impérativement :
→ si x_{exp} « trop éloignée » de x_{ref} : influence probable d'erreur(s) de type systématique ... lesquelles ?
→ si intervalle « trop petit » (i.e. u(x) « trop petit ») : erreurs aléatoires probablement sous-estimées ... lesquelles ?

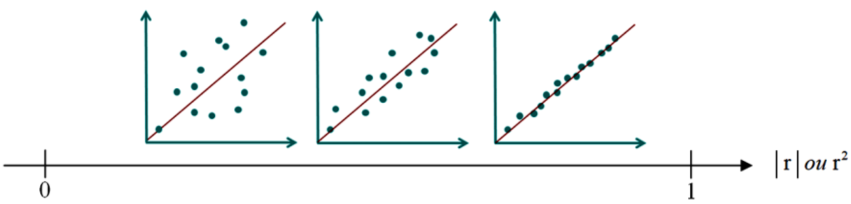
➢ Régression linéaire (ou affine) :

→ **1er cas - utilisation d'une relation de linéarité connue :**

On sait que des grandeurs physiques x et y sont reliées par une loi linéaire (affine) du type y = ax + b. On connait les couples expérimentaux $\{x_i, y_i\}$, mais *pas leur incertitude-type associée*. La **régression linéaire** de la série des couples $\{x_i, y_i\}$ permet d'obtenir les valeurs numériques de a et b (faire attention aux unités des x_i, y_i, a et b). Elle fournit aussi la valeur du **coefficient de corrélation r** (ou du coefficient de détermination r^2).

Résultats à fournir : a et b (avec leurs éventuelles unités) et r (ou r^2 - en se limitant au 1er chiffre différent de 9).

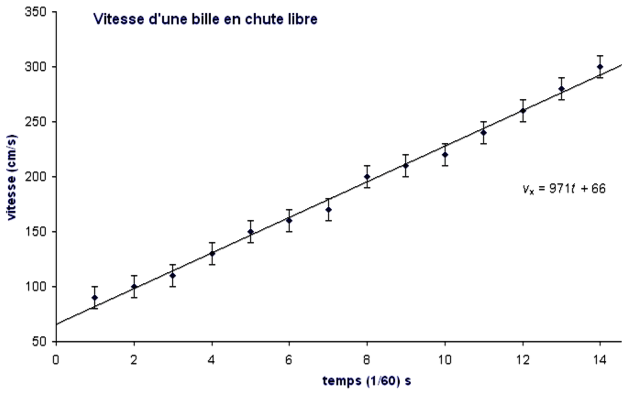
Coefficient de corrélation r :
plus r est proche de 1 en valeur absolue, plus les couples $\{x_i, y_i\}$ sont voisins de la droite de régression.



→ **2ème cas – Expérience de TP - validation d'une hypothèse de linéarité :**

On cherche à vérifier que les grandeurs x et y sont reliées par une loi linéaire (affine) du type y = ax + b. On connait les couples expérimentaux $\{x_i, y_i\}$, *ainsi que leur incertitude-type associée*. La modélisation linéaire est validée si la droite de régression passe par les barres d'incertitudes (ou en est proche).

Résultats à fournir : a et b (avec leurs éventuelles unités) et leur incertitude-type.



Rq : Si l'on connait les incertitudes-types sur $\{x_i, y_i\}$, un algorithme de Monte-Carlo permet également de déterminer a, b et leur incertitude-type.