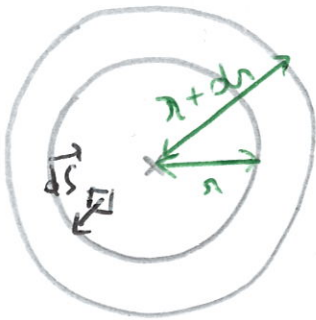


TAILLE MAXIMALE D'UNE BACTÉRIE AÉROBIE

Partie 1:

1)



Coordonnées sphériques

① Modélisation : $\vec{j}_N = j_N(r) \vec{e}_r$
 $n(r)$

⚠ Φ_N est une grandeur algébrique :
 vous devez orienter $d\vec{S}$ sur le schéma.
 (on indique $\Rightarrow$ pour qu'on sache le sens $\oplus$).

On effectue un bilan du nombre de particules entre r et $r+dr$:

② Bilan temporel : $d^2 N = 0$ (régime stationnaire)

③ Echange spatiaux : $\delta^2 N = \delta N_{\text{entrant}}(r) - \delta N_{\text{sortant}}(r+dr)$

avec $\delta N_{\text{entrant}}(r) = \Phi_N(r) dt$

$= \left(\oint_{(S)_{\text{en } r}} \vec{j}_N \cdot d\vec{S} \right) dt$

$= j_N(r) \times 4\pi r^2 dt$

On intègre donc
 par rapport à r (que (θ, φ)).

$\delta N_{\text{sortant}}(r+dr) = \Phi_N(r+dr) dt$

$= j_N(r+dr) \times 4\pi (r+dr)^2 dt$

$\Rightarrow \delta^2 N = 4\pi dt [j_N(r) r^2 - j_N(r+dr) (r+dr)^2]$

$= 4\pi dt \left(- \frac{\partial j_N(r) \times r^2}{\partial r} dr \right) = -4\pi dt dr \frac{d(j_N(r) r^2)}{dr}$

④ Bilan de particules : $d^2 N = \delta^2 N$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dr} (j_N(r) r^2) = 0}$

2) loi de Fick: $\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}}(n)$
 $= -D \frac{dn}{dr} \vec{e}_r$

On injecte dans la loi de conservation du nombre de particules:

$$D \frac{d}{dr} \left(n^2 \frac{dn}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dr} \left(n^2 \frac{dn}{dr} \right) = 0}$$

Rq: Quand c'est possible, transformer voir δ en d .

Partie 2:

Appropriation:

Eau avec O_2 dessous



Modélisation:

- Étude en régime stationnaire:
 en un point fixe de l'espace,
 la concentration en O_2 reste
 constante (il y a un apport
 en O_2 continu loin de la
 bactérie).
- Coordonnées sphériques
- $\vec{j}_N = j_N(r) \vec{e}_r$ } invariance
 $n = n(r) = c(r) N_A$ } par notation
 concentration en mol. m^{-3} d'angles θ et φ

Stratégie:

a) On résout l'équation de la diffusion (B) dans la région de l'espace $r \geq R_b$. Dans cette zone, il n'y a ni création, ni disparition de O_2 : $\alpha = 0$.

b) On détermine les constantes d'intégration avec les conditions aux limites imposées par:

• $r \rightarrow +\infty$: $c(r \rightarrow +\infty) = c_0$

• $r = R_b$: la bactérie consomme un nombre de particules par unité de temps: elle impose donc une condition sur le flux Φ_D de particules.

$$\Phi_D(r = R_b) = \underbrace{-D \frac{dn}{dr}}_{\text{suivant } -\vec{e}_r} = \underbrace{4\pi R_b N_A \times m_b}_{\text{avec } m_b: \text{ masse de la bactérie.}}$$

$$= -D N_A \times \frac{4}{3} \pi R_b^3 \times \rho_b \quad \text{avec } \rho_b: \text{ masse volumique de la bactérie.}$$

c) On détermine le rayon critique de la bactérie, $R_{b,c}$, en imposant que $\forall r \geq R_{b,c}$, on a $n(r) \geq 0$.

Résolution:

a) En stationnaire: (B) $\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn}{dr} \right) = 0$

$$\Rightarrow r^2 \frac{dn}{dr} = A$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$\Rightarrow \underline{n(r) = -\frac{A}{r} + B}$$

b) Condition à la limite $r \rightarrow +\infty$: $n(r \rightarrow +\infty) = B = c_0 N_A$.

Condition à la limite $r = R_b$:

$$\begin{aligned}\Phi_N &= \iint_{(S)_{r=R_b}} \vec{j} \cdot \vec{dS} \\ &= -D \frac{dn(R_b)}{dr} \times 4\pi R_b^2 \\ &= -\frac{DA}{R_b^2} \times 4\pi R_b^2 \\ &= \underline{-DA \times 4\pi}\end{aligned}$$

Rq: R_b se simplifie, mais c'est logique, car $\text{div}(\vec{j}) = 0$:

$\vec{j}$ est à flux conservatif. Donc, Φ_N est indépendant de r !!

Or, la batterie impose: $\Phi_N = -A N_A \times \frac{4}{3} \pi R_b^3 p_b$

Donc: $A = \frac{A N_A R_b^3 p_b}{3D}$

Ainsi, $\forall r \geq R_b: n(r) = -\frac{A N_A R_b^3 p_b}{3D r} + c N_A$ (c)

c) On doit vérifier: $\forall r \geq R_b, n(r) \geq 0$.

Donc, $c N_A \geq \frac{A N_A R_b^3 p_b}{3D R_b}$

$$\Rightarrow R_b \leq \sqrt{\frac{3D c}{A p_b}} = R_{b,c}$$

AN: On prend $p_b \approx p_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$R_{b,c} = 8 \mu\text{m}$

Validation:

- L'ordre de grandeur de la taille d'une bactérie est de 1 à 10 μm : cohérent.
- Si $c_0 \uparrow$, la concentration en dioxygène est plus importante, et la bactérie peut être plus grosse.
- Si $D \uparrow$, le flux de particules vers la bactérie augmente, ce qui lui permet de vivre avec un rayon plus grand.
- Si $k \uparrow$, la bactérie consomme un taux de O_2 plus important et $R_{b,c} \uparrow$.
- Si $\rho_b \uparrow$, la masse de la bactérie $\uparrow$ pour le même R_b , et donc son taux de consommation augmente: elle ne peut plus vivre.
- On vérifie, dans (C), que $n(r)$ diminue quand r diminue: cohérent.