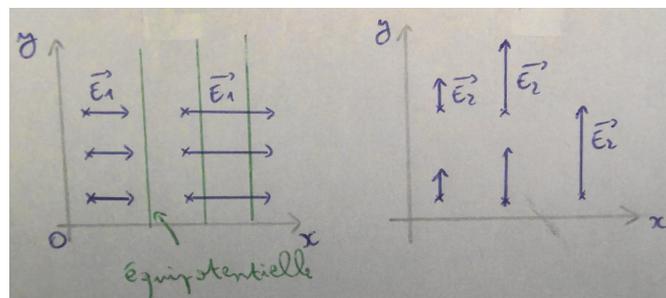


Ex. 1 Utilisation des équations locales

On propose deux expressions pour des champs : $\vec{E}_1 = Kx\vec{e}_x$ et $\vec{E}_2 = Kx\vec{e}_y$, avec K une constante.

1. Représenter chacun de ces champs \vec{E} en différents points du plan (Oxy).
2. Calculer la divergence et le rotationnel de ces deux champs.
3. En déduire qu'un seul de ces champs peut être un champ électrostatique et déterminer la densité volumique de charge correspondante. Ajouter, sur votre représentation graphique des champs, les courbes équipotentielles pour le seul champ électrostatique.

Correction de l'exercice 1



- 1.
2. $\text{div}(\vec{E}_1) = K$ et $\text{div}(\vec{E}_2) = 0$ d'une part ; $\text{rot}(\vec{E}_1) = \vec{0}$ mais $\text{rot}(\vec{E}_2) = +K\vec{e}_z \neq \vec{0}$.
3. On conclut donc que le champ \vec{E}_2 ne vérifie pas les équations locales de l'électrostatique. Pour le champ \vec{E}_1 , on doit avoir $\text{div}(\vec{E}_1) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = K$ donc $\rho = K\epsilon_0 = \text{cste}$. Les courbes équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ de \vec{E}_1 , et sont donc des droites à $x = \text{cste}$.

Ex. 2 (Inspiré de E3A-Polytech PC 2024) Potentiel dans une jonction PN

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page²

Le silicium est un matériau semi-conducteur très utilisé dans les applications industrielles. On améliore couramment sa conductivité en le dopant, c'est-à-dire en incluant des éléments chimiques tiers au sein du silicium pur.

Si, au sein du silicium, on met un atome de phosphore avec ses cinq électrons de valence, alors quatre d'entre eux serviront à former les liaisons chimiques avec les atomes de silicium, mais le dernier restera libre. L'ajout de quelques atomes de phosphore permet donc d'augmenter la densité volumique en électrons libres : on dit que le semi-conducteur est dopé N.

Inversement, si l'on place du bore avec trois électrons de valence dans la matrice de silicium, alors il y a un manque d'électron à un endroit. Il y a comme un trou, de charge $+e$. L'ajout de quelques atomes de bore permet donc d'augmenter la densité volumique en trous : on dit que le semi-conducteur est dopé P.

Les électrons de la partie du semi-conducteur dopée N diffusent dans la partie dopée P où la concentration en électrons libres est plus faible, les trous de la partie du semi-conducteur dopée P diffusent dans la partie dopée N. On obtient ainsi un état d'équilibre et une « jonction PN » (figure 3).

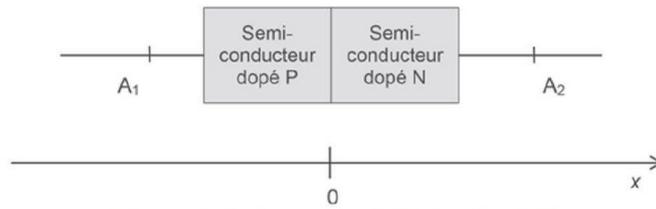


Figure 3 - Présentation de la jonction PN

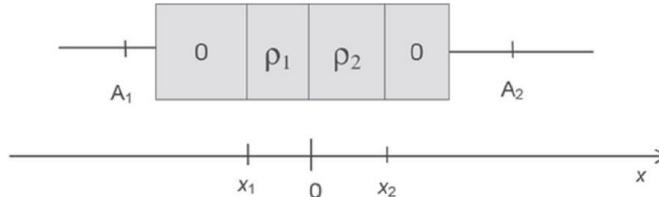


Figure 4 - Schéma représentant l'état d'équilibre

Une fois l'équilibre atteint :

- La région $[x_1, 0]$, avec $x_1 < 0$ est chargée avec une densité volumique algébrique de charge uniforme ρ_1 ;
- La région $[0, x_2]$, avec $x_2 > 0$ est chargée avec une densité volumique de charge algébrique uniforme ρ_2 ;
- En dehors de la zone $[x_1, x_2]$, appelée zone de déplétion, la densité de charge volumique est nulle (figure 4)

1. Justifier, dans la zone de déplétion, à l'équilibre, les signes des densités volumiques de charge ($\rho_1 < 0$ et $\rho_2 > 0$), puis établir une relation entre ρ_1 , ρ_2 , x_1 et x_2 .
2. On se place en coordonnées cartésiennes. On considère un semi-conducteur de dimension ℓ suivant un axe (Oy) et de dimension L suivant un axe (Oz) . La zone de déplétion a une longueur suivant l'axe (Ox) de $x_2 - x_1$ très petite devant ℓ et L . Justifier que le champ électrique dans le semi-conducteur s'écrit $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$.
3. On admet que $\vec{E} = \vec{0}$ pour $x \leq x_1$. Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.
4. On choisit l'origine des potentiels électriques telle que $V(x) = 0$ pour $x \leq x_1$. Déterminer l'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace.

Correction de l'exercice 2

1. Initialement, avant diffusion, la densité volumique de charge est nulle en tout point de l'espace (les atomes ajoutés restent neutres). Les électrons majoritaires dans la zone dopée N ont diffusé vers la zone dopée P (gradient de densité volumique d'électrons). De même, les trous majoritaires dans la zone P ont diffusé vers la zone N. Ainsi, la zone P a un excès de charges négatives et un déficit de charges positives : elle possède une densité volumique de charges $\rho_1 < 0$. La zone N a un excès de charges positives et un déficit de charges négatives : $\rho_2 > 0$.

La zone de déplétion est globalement neutre. On appelle S la dimension transverse de cette zone. Ainsi :

$$\iiint_{(\text{Zone P})} \rho_1 d\tau + \iiint_{(\text{Zone N})} \rho_2 d\tau = 0 \Rightarrow \rho_1 S |x_1| + \rho_2 S x_2 = 0 \Rightarrow \rho_1 x_1 = \rho_2 x_2$$

2. Les dimensions transverses du semi-conducteur sont bien plus grandes que la dimension selon (Ox) . On néglige alors les effets de bord : tout se passe comme si le semi-conducteur était de dimension infinie selon (Oy) et (Oz) .
 - Coordonnées cartésiennes
 - Symétries : Pour M quelconque, les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Donc, $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_x$.
 - Invariances par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z : $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$
3. Il y a deux stratégies possibles :

- Appliquer le théorème de Gauss à une surface de Gauss fermée et orientée cylindrique d'axe (Ox) , de hauteur h et de section S . On place l'une des sections droites du cylindre dans la zone $x \leq x_1$.
- Utiliser directement l'équation de Maxwell-Gauss.

Dans un problème 1D cartésien, l'utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss est bien plus efficace ! J'utilise donc cette méthode dans la suite.

Vu la forme de \vec{E} , l'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Il suffit alors d'intégrer cette relation dans les différentes zones de l'espace, en utilisant la continuité du champ à chaque interface (pas de charges surfaciques) :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{0} && \text{pour } x \leq x_1 \\ \vec{E} &= \frac{\rho_1}{\varepsilon_0}(x - x_1)\vec{e}_x && \text{pour } x_1 \leq x \leq 0 \\ \vec{E} &= \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}x - \frac{\rho_1 x_1}{\varepsilon_0}\vec{e}_x = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}(x - x_2)\vec{e}_x && \text{pour } 0 \leq x \leq x_2 \\ \vec{E} &= \vec{0} && \text{pour } x \geq x_2 \end{aligned}$$

On a utilisé le résultat de la Q.1. Faire la représentation graphique.

- On détermine le potentiel électrostatique via $\vec{E} = -\operatorname{grad}(V)$:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E(x)dx \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -E(x)$$

Il suffit alors d'intégrer cette relation dans les différentes zones de l'espace en utilisant la continuité du potentiel à chaque interface :

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 && \text{pour } x \leq x_1 \\ V(x) &= -\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(x - x_1)^2 && \text{pour } x_1 \leq x \leq 0 \\ V(x) &= -\frac{\rho_2}{2\varepsilon_0}(x - x_2)^2 + \frac{\rho_2 x_2}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1) && \text{pour } 0 \leq x \leq x_2 \\ V(x) &= \frac{\rho_2 x_2}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1) && \text{pour } x \geq x_2 \end{aligned}$$

On a à nouveau utilisé le résultat de la Q.1. Faire la représentation graphique.

Remarque : Donc, à l'équilibre, il existe une tension aux bornes de la jonction PN. Pour votre culture générale, la jonction PN est la structure microscopique d'une diode. La tension déterminée est alors la tension de seuil de la diode.

Ex. 3 Capacité d'un condensateur cylindrique

On s'intéresse à un condensateur dont les armatures sont deux cylindres concentriques de hauteur h et de rayons $R_1 \ll h$ et $R_2 \ll h$ portant les charges respectives Q et $-Q$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

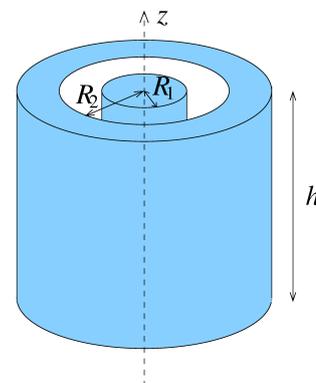
- Montrer que le champ électrostatique entre les armatures métalliques est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

- Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur.
- Montrer que dans le cas où $R_2 - R_1 = e$ devient très faible devant R_1 , la capacité s'écrit :

$$C = \frac{2\pi R_1 h \varepsilon_0}{e}$$

Interpréter.



- On reste dans le cas où e est négligeable devant R_1 . On remplit partiellement l'espace entre les deux cylindres par un liquide isolant électriquement sur une hauteur $L < h$. On peut alors, d'un point de vue électrostatique, remplacer l'air par le liquide si on substitue ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

- (a) Montrer que cette situation revient, du point de vue électrique, à étudier deux condensateurs en parallèle dont on exprimera les capacités.
- (b) Que vaut la capacité totale de ce condensateur ? En mesurant cette capacité, on peut en déduire L : on vient de créer un capteur capacitif de niveau de liquide !

Correction de l'exercice 3

1. Il existe deux stratégies :

- (a) Appliquer directement le théorème de Gauss avec la distribution complète de charges. Cette méthode est la plus rapide ici et c'est celle que j'applique dans la suite.
- (b) Déterminer le champ électrique créé par un seul des cylindres, puis utiliser le théorème de superposition.

On se place en coordonnées cylindriques et on néglige les effets de bord (on considère donc deux cylindres infinis dans le raisonnement sur les symétries et invariances).

- (a) Pour un point M quelconque, les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc : $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$.
- (b) Invariance de la distribution de charge par rotation d'angle θ et translation selon z : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$
- (c) On applique le théorème de Gauss à la surface fermée constituée d'un cylindre de rayon r centré sur l'axe (Oz) et de hauteur d dans le cas où $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{h\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 2\pi r d = \frac{Qd}{h\epsilon_0}$$

car on intègre à r constant. Donc :

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} \vec{e}_r$$

2. On calcule la différence de potentiels $U = V_1 - V_2$ pour pouvoir utiliser la formule donnant C : $+Q = Q_1 = C(V_1 - V_2)$.

$$U = V_1 - V_2 = \int_2^1 dV \quad (\text{Ex.1})$$

$$= \int_2^1 \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r} \quad (\text{Ex.2})$$

$$= - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{avec } \vec{r} = dr \vec{e}_r \quad (\text{Ex.3})$$

$$= - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} dr \quad (\text{Ex.4})$$

$$= \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (\text{Ex.5})$$

Ainsi, on en déduit que :

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi h \epsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} > 0$$

3. En réécrivant $R_2 = R_1 + e$, $\ln(R_2/R_1) = \ln(1 + e/R_1) \simeq e/R_1$ (cf DL à l'ordre 1), donc la capacité devient :

$$C = \frac{2\pi R_1 \epsilon_0 h}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad (\text{Ex.6})$$

avec $S = 2\pi R_1 h$ la surface latérale de l'armature intérieure (qui est quasiment celle de l'armature extérieure vue la faible différence de rayon). On retrouve une situation similaire à celui du condensateur plan dans le cas où $e \ll R_1$: on peut négliger les effets liés à la courbure du conducteur.

4. (a) Toutes les lignes de champ \vec{E} sont dirigées selon \vec{e}_r . Donc, la partie supérieure des cylindres (avec de l'air entre eux) est totalement découplée de la partie inférieure des cylindres (avec du liquide). On peut ainsi décomposer cette situation en deux sous-condensateurs distincts, l'un de hauteur L et l'autre de hauteur $h - L$. Donc, on a deux capacités :

$$C_1 = \frac{2\pi R_1 L \epsilon_0 \epsilon_r}{e} \quad (\text{Ex.7})$$

$$C_2 = \frac{2\pi R_1 (h - L) \epsilon_0}{e} \quad (\text{Ex.8})$$

De plus, ces deux condensateurs sont soumis à la même différence de potentiels : ils sont donc en parallèle.

- (b) On sait que la capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs en parallèle est la somme des capacités :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi R_1 \varepsilon_0}{e} (L(\varepsilon_r - 1) + h) = \alpha L + \beta$$

On a un capteur dont la capacité varie de manière affine avec L .

Ex. 6 Expression d'une des forces de Van der Waals : force de Keesom

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁶

Un dipôle de moment dipolaire \vec{p}_1 est assimilé à un ensemble de deux charges ponctuelles $+q_1 > 0$ et $-q_1$ séparées d'une distance $2a$. On appelle position du dipôle la position du point à mi-distance des deux charges ponctuelles.

On place le dipôle en un point O de telle sorte que \vec{p}_1 soit aligné avec l'axe (Oz) . Ainsi : $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_z$ avec $p_1 > 0$.

- Rappeler la définition du moment dipolaire \vec{p}_1 en fonction de q_1 et de a .
- Par des considérations de symétrie, déterminer la direction en tout point de l'axe (Oz) du champ créé par ce dipôle. Etablir l'expression, au premier ordre non nul en a/z , du champ \vec{E}_1 créé en un point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z)$ avec $z \gg a$. On l'exprimera en fonction de p_1 , ϵ_0 et z .

On place désormais un second dipôle de moment \vec{p}_2 , de charge $q_2 > 0$ et de distance $2b$, parallèlement à l'axe (Oz) et à l'abscisse z (on a $z \gg a$ et $z \gg b$).

- On suppose que les deux dipôles sont de même sens : $\vec{p}_2 = p_2 \vec{e}_z$ avec $p_2 > 0$.
 - Etablir l'expression de la force exercée par le premier dipôle sur la charge $+q_2$ du second dipôle.
 - De même, établir l'expression de la force exercée par le premier dipôle sur la charge $-q_2$ du second dipôle.
 - En déduire que l'expression, au premier ordre non nul en a/z et en b/z , de la force exercée par le premier dipôle sur le second est :

$$\vec{F} = -\frac{3p_1 p_2}{2\pi \epsilon_0 z^4} \vec{e}_z$$

- On donne l'expression de la force exercée sur un dipôle \vec{p} par un champ extérieur \vec{E}_{ext} : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}$. Vérifier que cette expression est compatible avec celle trouvée à la question précédente. (On vient donc de démontrer la formule du cours dans un cas particulier.)
- Donner, sans calcul supplémentaire, la force exercée par le premier dipôle sur le second, dans le cas où le moment dipolaire $\vec{p}_2 = -p_2 \vec{e}_z$ est opposé au premier moment dipolaire.

Force de Keesom On considère deux molécules polaires distantes de z et on cherche la force exercée par l'une sur l'autre. On effectue pour cela un modèle simple dans lequel le moment dipolaire de la première molécule est constant et aligné avec l'axe (Oz) : $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_z$. On considère également que le moment dipolaire de la seconde molécule ne peut prendre que deux valeurs $p_2 \vec{e}_z$ et $-p_2 \vec{e}_z$.

La probabilité que la seconde molécule ait le moment dipolaire \vec{p}_2 est donnée via le facteur de Boltzmann : $A \times \exp\left(\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}\right)$ avec k_B la constante de Boltzmann, T la température et A une constante.

- On suppose que $|\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1| \ll k_B T$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 du facteur de Boltzmann. Sachant que seuls deux états sont possibles pour \vec{p}_2 , en déduire la valeur de A .
 - En déduire que la force moyenne exercée par la première molécule sur la seconde est :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{3p_1^2 p_2^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 k_B T} \frac{1}{z^7} \vec{e}_z$$

- Décrire les caractéristiques de cette force de Van der Waals.

Correction de l'exercice 6

- $\vec{p}_1 = q_1 \times 2a \vec{e}_z$
- On se place en coordonnées cartésiennes.
 - Symétries** Pour un point M appartenant à l'axe (Oz) , les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Donc, $\vec{E}_1 = E_1(0, 0, z) \vec{e}_z$
 - On applique une procédure similaire au calcul du potentiel créé par un dipôle électrostatique, mais ici, on peut l'appliquer directement avec le champ électrique, car on connaît sa direction (on n'a pas le problème

de travailler sur un point M quelconque). Par principe de superposition, on a :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(z-a)^2}\vec{e}_z - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(z+a)^2}\vec{e}_z \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{a}{z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{z}\right)^2} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(1 + 2\frac{a}{z} - 1 + 2\frac{a}{z} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_1 a}{\pi\epsilon_0 z^3} \vec{e}_z \\ &= \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 z^3} \vec{e}_z\end{aligned}$$

3. (a) La force exercée par le premier dipôle sur la charge $+q_2$ située en $z+b$ est : $\vec{F}_+ = +q_2 \times \vec{E}_1(z+b) = \frac{q_2 p_1}{2\pi\epsilon_0(z+b)^3} \vec{e}_z$
 (b) De même, $\vec{F}_- = -\frac{q_2 p_1}{2\pi\epsilon_0(z-b)^3} \vec{e}_z$
 (c) La force totale exercée sur le second dipôle est :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- \\ &= \frac{q_2 p_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(z+b)^3} - \frac{1}{(z-b)^3} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^3} \left(1 - 3\frac{b}{z} - 1 + 3\frac{b}{z} \right) \vec{e}_z \\ &= -\frac{6q_2 b p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z \\ &= -\frac{3p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z\end{aligned}$$

- (d) Attention à ne pas se tromper sur le moment dipolaire et le champ électrostatique à considérer. On souhaite déterminer la force exercée sur le dipôle \vec{p}_2 par le champ créé par le dipôle 1. Donc :

$$\vec{F} = (\vec{p}_2 \cdot \text{grad}) \vec{E}_1 = p_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 z^3} \vec{e}_z \right) = -\frac{3p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z$$

Les deux expressions sont bien identiques !

Remarque : La logique est qu'à chaque fois que vous travaillez sur des champs créés ou subis par deux charges proches, et donc que vous faites un DL, la puissance sur z au dénominateur augmente : pour passer du champ créé par une charge ponctuelle à un dipôle, on passe de $1/z^2$ à $1/z^3$; pour passer de la force exercée par un dipôle sur une charge à la force exercée sur un dipôle, on passe de $1/z^3$ à $1/z^4$.

4. On peut se baser sur la formule fournie $(\vec{p}_2 \cdot \text{grad}) \vec{E}_1$ ou sur la démonstration : un signe $-$ apparaît :

$$\vec{F}' = -\vec{F} = +\frac{3p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z$$

5. (a) DL du facteur de Boltzmann : $\exp\left(\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}\right) = 1 + \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}$. Dans la suite, je note $\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_z$.

Si on se limite à ce DL à l'ordre 1 en $\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}$, la somme des deux probabilités devant valoir 1 :

$$A \left(1 + \frac{p_2 E_1}{k_B T} + 1 - \frac{p_2 E_1}{k_B T} \right) = 1 \iff A = \frac{1}{2}$$

- (b) Le facteur de Boltzmann permet de comprendre que l'état le plus probable pour le deuxième dipôle est d'être aligné avec le champ \vec{E}_1 créé par le premier dipôle (c'est normal, c'est celui minimisant l'énergie potentielle du dipôle). Donc, la force moyenne sera bien non nulle et dans le sens $-\vec{e}_z$. Le calcul exact

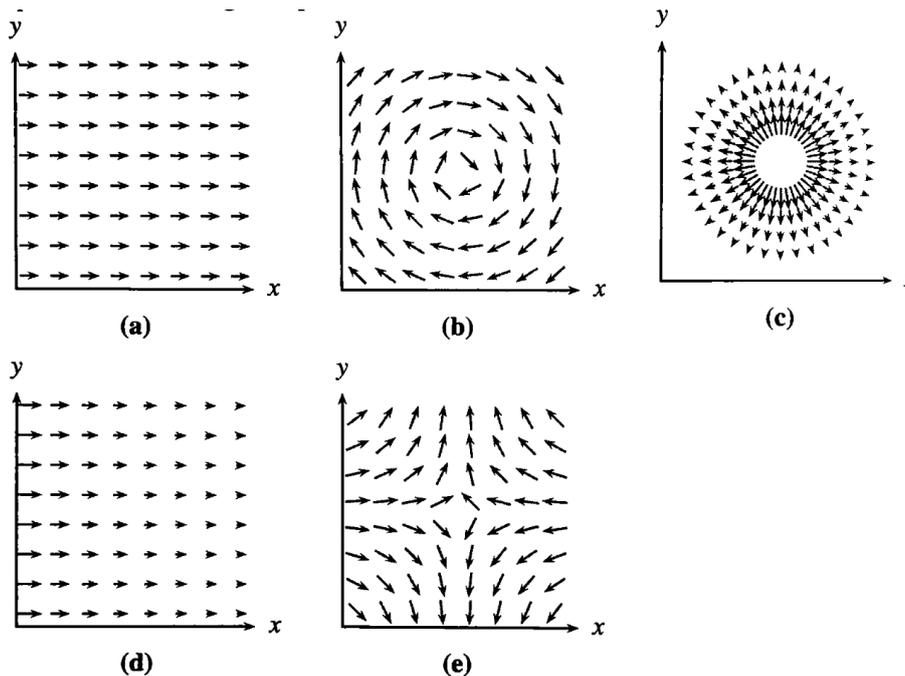
donne :

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{F} \rangle &= \sum_{\text{états}} \text{force} \times \text{probabilité d'avoir cette force} \\
 &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{p_2 E_1}{k_B T}\right) \times \vec{F} + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{p_2 E_1}{k_B T}\right) \times \vec{F}' \\
 &\underset{DL}{\simeq} \frac{1}{2} \frac{p_2 E_1}{k_B T} \vec{F} \times 2 \\
 &= -\frac{p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^3 k_B T} \times \frac{3p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z \\
 &= -\frac{3p_1^2 p_2^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 k_B T} \frac{1}{z^7} \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

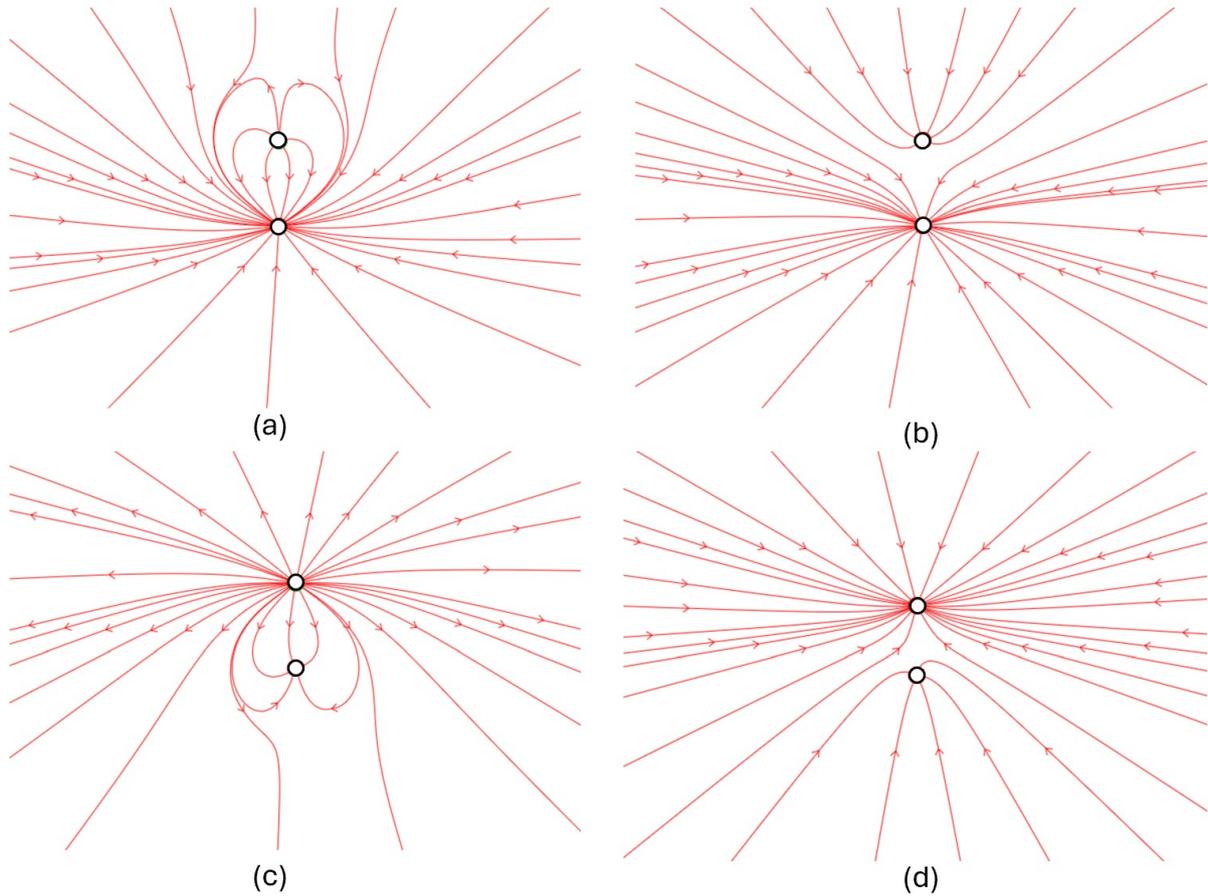
- (c) Cette force de Keesom (comme toutes les forces de Van der Waals) est : attractive, décroît en $1/z^7$ avec la distance (et n'est donc efficace qu'à très courte portée), et est d'autant plus intense que les moments dipolaires des molécules polaires considérées sont grands. (On démontre des propriétés que vous avez admises en chimie !)

Ex. 7 Topographie du champ électrostatique

1. Parmi les cinq représentations de champs ci-dessous, déterminer les trois qui correspondent à un champ électrostatique. Pour ces trois représentations de champs électrostatiques, indiquer si des charges sont présentes dans la région de l'espace cartographiée, et si oui, préciser le signe de ces charges.



2. On s'intéresse à la carte (page suivante) du champ électrostatique généré par une charge ponctuelle positive $+q$ et une charge ponctuelle négative $-5q$. Déterminer en justifiant la seule carte de champ valide.



Correction de l'exercice 7

1. **Champ électrostatique** Pour qu'une carte de champ puisse être celle d'un champ électrostatique, il faut que $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ (l'équation de Maxwell-Gauss n'impose aucune contrainte sur la valeur de la divergence). On s'appuie sur l'interprétation physique (et intuitive) du rotationnel : si on imagine qu'il s'agit d'un champ de vitesse et que l'on place une particule solide dans l'écoulement, la particule a une vitesse de rotation nulle si le rotationnel est nul. Donc, ici, seules les cartes de champs (a), (c) et (d) sont des cartes de champ électrostatique.

Remarque : On peut également conclure du fait que $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ qu'il ne doit exister aucune ligne de champ fermée. Il est alors clair que (b) n'est pas une carte de champ électrostatique. Il est plus difficile de voir que c'est également le cas de (e) : les lignes de champ se ferment "à l'infini".

Présence de charges Cette fois, c'est l'équation locale de Maxwell-Gauss qui permet de conclure sur la présence de charge. On s'intéresse donc à la divergence du champ.

- **Champ (a)** On a un champ uniforme, donc $\text{div}(\vec{E}) = 0$: aucune charge n'est présente.
 - **Champ (c)** Le champ diverge à partir du centre de la figure : $\text{div}(\vec{E}) > 0$. Donc, une charge positive est présente au centre.
 - **Champ (d)** En un point M de l'espace, le flux sortant à travers une petite sphère autour de M est négatif (le champ a tendance à rentrer dans la sphère) : $\text{div}(\vec{E}) < 0$. Donc, des charges négatives sont présentes dans la région représentée (en fait, il s'agirait d'une distribution continue ici).
2. Le champ électrostatique diverge des charges positives et converge vers les charges négatives. Donc, seules les cartes de champ (a) et (c) sont des cartes créées par une charge positive (située au-dessus) et une charge négative (située en-dessous).

La charge négative est plus importante en valeur absolue que la charge positive. Donc, le champ électrostatique créé au voisinage de la charge négative doit être plus important en norme que le champ au voisinage de la charge positive. On repère l'intensité du champ électrique via la densité de lignes de champ. Ainsi, la carte de champ valide est la (a).

Ex. 8 Energie de constitution d'un noyau sphérique à partir de la densité volumique d'énergie

On modélise un noyau atomique de rayon R et de charge Q par une boule uniformément chargée, avec la densité

volumique de charges ρ .

1. Donner un ordre de grandeur de R et de Q pour le noyau de l'atome de carbone.
2. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé dans tout l'espace par cette boule chargée en fonction de ρ et de R .

On cherche alors à déterminer l'énergie de constitution du noyau de carbone.

3. Rappeler la définition de l'énergie de constitution. Montrer alors que, dans le cas d'un déplacement quasi-statique d'une charge q , le travail de l'opérateur pour amener cette charge depuis l'infini jusqu'à une zone de l'espace où règne le potentiel $V(M)$ s'identifie à l'énergie potentielle $E_p(M) = qV(M)$.
4. On propose alors un calcul de l'énergie de constitution par une méthode différente de celle du cours. En intégrant la densité volumique d'énergie électrostatique dans tout l'espace, déterminer l'énergie électrostatique créée par le noyau atomique en fonction de ρ et de R .
5. Commenter par rapport à l'expression trouvée dans le cours, en créant le noyau par adjonction progressive de charges venant de l'infini. Application numérique dans le cas du noyau de carbone. On donne : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Correction de l'exercice 8

1. Pour l'atome de carbone, le numéro atomique est $Z = 6$, donc $Q = +6e = 9.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Pour les noyaux atomiques, l'odg de R est le femtomètre : $R \sim 10^{-15} \text{ m}$.
2. Cours. Bien représenter les surfaces de Gauss orientées et fermées choisies. On trouve, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

3. Définition : L'énergie de constitution est l'énergie qu'un opérateur doit fournir aux charges pour construire le système à partir des charges situées à l'infini.

Dans le cas d'un déplacement élémentaire quasi-statique, $dE_c = 0$. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à une charge q dans le référentiel du laboratoire galiléen donne : $0 = \delta W_{op} + \delta W_e$ avec δW_{op} le travail élémentaire que l'opérateur fournit à la charge et δW_e est le travail élémentaire fourni par le champ électrique à la charge. On a :

$$\delta W_e = q \vec{E} \cdot \vec{dr} = -q \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \vec{dr} = -q dV = -dE_p$$

En intégrant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{E_p(M)}_{=qV(M)} - \underbrace{E_p(\infty)}_{=0} = W_{op}$$

4. L'énergie électrostatique créée par la boule chargée uniformément est :

$$\begin{aligned} E_e &= \iiint_{\text{tout l'espace}} u_e d\tau = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi}_{=4\pi} \right) \times \left(\int_{r=0}^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \right)^2 r^2 dr + \int_{r=R}^{+\infty} \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \right) \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0} \times \left(\frac{R^5}{5} + \frac{R^6}{R} \right) \\ &= \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} \end{aligned}$$

5. On retrouve exactement la même expression que celle du cours ! C'est logique : comme il n'y a aucun phénomène dissipatif, l'énergie électrostatique créée par le noyau dans tout l'espace correspond à l'énergie dépensée par l'utilisateur pour constituer le noyau. L'énergie de constitution du noyau a été transférée dans le champ électrostatique.

En utilisant $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = 2 \times 10^{26} \text{ C m}^{-3}$, on trouve : $E_e = 5 \times 10^{-12} \text{ J} = 3 \times 10^1 \text{ MeV}$. Cela se trouve être le bon odg de l'énergie de dissociation d'un noyau atomique, mais on n'a considéré ici que des phénomènes électrostatiques, sans interaction nucléaire forte...

Ex. 9 (CCINP MP 2025, Centrale PC 2025) Accélérateur du synchrotron SOLEIL

Des électrons non-relativistes, émis sans vitesse initiale, sont accélérés linéairement par un champ électrostatique uniforme et unidirectionnel $\vec{E} = E \vec{e}_x$.

- Q1.** Rappeler la relation qui lie le champ électrostatique au potentiel électrostatique V . En déduire l'énergie potentielle électrostatique de l'électron en fonction de e et de V .
- Q2.** Calculer la différence de potentiel nécessaire pour obtenir une énergie cinétique finale $E_c = 1,0$ keV. Justifier.
- Q3.** Dans la zone nommée Linac du synchrotron SOLEIL (**figure 1**), les électrons sont accélérés jusqu'à une énergie cinétique $E_c = 100$ MeV. Vérifier que leur vitesse v ne peut plus alors être calculée à l'aide de la forme de l'énergie cinétique utilisée en mécanique classique.

Pour décrire le mouvement d'une particule dont la vitesse est du même ordre que la vitesse c de lumière dans le vide il faut recourir à la relativité restreinte en introduisant le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où v est la norme de la vitesse de la particule.

4. Montrer que, lorsque v est proche de c , on peut écrire :

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, l'énergie cinétique d'une particule est $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$, avec γ le facteur introduit à la question précédente.

5. Montrer que l'on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique lorsque v est petit devant c .
6. Calculer le facteur γ dans le cas de l'état final de l'accélérateur Linac du synchrotron SOLEIL. En déduire la valeur numérique de $1 - \frac{v}{c}$.

Les électrons sont ensuite accélérés jusqu'à $E_c = 2,7$ GeV grâce à un autre accélérateur nommé booster, puis libérés dans l'anneau de stockage. Leur vitesse est alors assimilable à celle de la lumière.

7. L'intensité du courant circulant dans l'anneau de stockage, assimilé à un cercle de rayon $R = 57$ m, vaut à un instant donné $i = 0,43$ A. Exprimer, puis calculer le nombre d'électrons N constituant le faisceau.

Données numériques :

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5,1 \cdot 10^2 \text{ keV}/c^2$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Valeur de l'électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Correction de l'exercice 9

1. En électrostatique, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$.
Donc, la force de Lorentz agissant sur l'électron s'écrit $\vec{F}_{el} = -e\vec{E} = e\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ avec $E_p = -eV$ l'énergie potentielle dont dérive la force de Lorentz.
2. Faire un schéma.
- Système : {électron}
 - Référentiel du laboratoire galiléen
- On applique le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant final, sachant que toutes les forces agissant sur l'électron sont conservatives (ne pas inclure le poids, toujours négligeable devant la force de Lorentz pour une particule chargée) :

$$\Delta E_m = 0 = E_c - 0 - e(V_f - V_i) \Rightarrow V_f - V_i = \frac{E_c}{e}$$

A.N. : $V_f - V_i = 1,0$ keV (il n'y a rien à taper à la calculatrice ! $1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ J}$)

Vérification a posteriori de l'autorisation d'appliquer un raisonnement classique : On vérifie que $v_f = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = 0.063c < c/10$. OK.

3. Si la physique classique s'appliquait : $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = 20c > c$! Ce résultat est absurde, le cadre de la physique classique ne s'applique pas. Les électrons sont relativistes.
4. On a toujours :

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Si $v \sim c$, alors $1 + \frac{v}{c} \sim 2$, et donc :

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

5. Pour $v \ll c$, on effectue un DL à l'ordre 1 en v/c de E_c :

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) m_e c^2 \simeq -\frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2} \right) m_e c^2 = \frac{1}{2} m_e v^2$$

c'est-à-dire l'énergie cinétique classique. Ainsi, la physique classique est bien un cas particulier de la physique relativiste dans le cas où $v \ll c$.

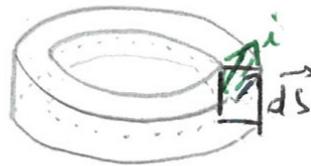
6. A l'issue de l'accélérateur Linac, on a $E_c = 100$ MeV. Donc,

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_e c^2}$$

A.N. : $\gamma = 2.0 \times 10^2 \gg 1$. On peut alors utiliser la simplification de la Q.4 pour obtenir : $1 - \frac{v}{c} = 1.3 \times 10^{-5} \ll 1$ (ce qui valide l'utilisation de la formule simplifiée).

7. Différentes stratégies sont possibles ici :
- Utiliser le vecteur densité de courant électrique, car on sait le relier à i et à la densité volumique n d'électrons dans le faisceau.
 - Revenir à la définition du courant électrique comme un débit de charges à travers une surface et calculer le temps mis par les N électrons pour parcourir l'anneau de stockage.

Dans la suite, j'applique la première stratégie, que je trouve un peu plus intuitive.



On a

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = -ne\vec{v}$$

où d'après l'énoncé $\|\vec{v}\| = c$. Ainsi

$$i = ec \iint_{(S)} ndS$$

Il reste à faire intervenir $N = \iiint_{(V \text{ anneau})} nd\tau = 2\pi R \times \iint_{(S)} ndS$ car n ne dépend pas de l'angle θ . Ainsi :

$$N = \frac{2\pi Ri}{ec}$$

A.N. : $N = 3.2 \times 10^{12}$ électrons dans l'anneau (ce qui est très faible devant le nombre d'électrons dans un métal par exemple, on parle d'un plasma).

Ex. 10 Equation de Poisson : détermination et résolution

1. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, démontrer l'équation de Poisson, qui porte sur le potentiel électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

avec ρ la densité volumique de charges.

Dans la suite, on cherche à résoudre cette équation dans un espace vide de charge et en coordonnées sphériques. On doit donc résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

2. On cherche la solution sous la forme suivante : $V(r, \theta) = A_n r^n \cos(\theta)$ avec A_n une constante et n un entier relatif. Déterminer les valeurs de n permettant d'avoir un potentiel non identiquement nul.
3. Pour les valeurs de n trouvées précédemment, proposer une situation physique pouvant être à l'origine d'un tel potentiel.

Formulaire : Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Correction de l'exercice 10

1. En injectant la définition du potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ dans l'équation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

2. Avec le formulaire, on peut ré-écrire l'équation de Laplace pour $V(r, \theta)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

On injecte alors la forme proposée pour $V(r, \theta)$ et on trouve, tous calculs faits :

$$A_n \cos(\theta) (n^2 + n - 2) r^{n-2} = 0$$

Le potentiel ne sera pas identiquement nul si et seulement si

$$n^2 + n - 2 = 0 \iff n = -2 \quad \text{ou} \quad n = 1$$

3. • Cas $n = -2$: On a alors $V = \frac{A \cos \theta}{r^2}$. On reconnaît un potentiel qui décroît en $\frac{1}{r^2}$ qui est exactement le potentiel créé par un dipôle électrostatique centré sur l'origine, et dont le moment dipolaire est orienté selon \vec{e}_z .
- Cas $n = 1$: On a alors $V = Br \cos \theta = Bz$ (en effet, en coordonnées sphériques, $r \cos \theta = z$: faire un schéma pour s'en convaincre !). On reconnaît le potentiel entre les deux armatures du condensateur plan infini, dans le cas où les armatures sont orthogonales à \vec{e}_z .

Remarque : On peut noter que la présence du $\cos \theta$ dans l'expression du potentiel impose le fait que le plan (Oxy) soit un plan d'antisymétrie pour \vec{E} (et donc pour la distribution de charges qui en est à l'origine). L'absence de φ dans l'expression du potentiel impose une invariance par rotation d'angle φ . C'est bien le cas dans les deux situations physiques proposées.

Ex. 11 Membrane cellulaire

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page¹¹

Une membrane cellulaire (d'un être vivant) est assimilée au plan infini (Oyz) ; l'axe (Ox) est orienté vers l'extérieur de la cellule.

On schématise le potentiel par la fonction suivante : $V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0 \exp(-\frac{x}{a}) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$, où $V_0 > 0$ est une constante et a une distance.

¹¹ Le plus simple est de choisir une surface de Gauss fermée cylindrique de section S , dont deux faces sont perpendiculaires à \vec{e}_x , une face située en $x + dx$, orientée vers l'extérieur.

1. Calculer le champ électrique \vec{E} en tout point.
2. Déterminer la densité volumique de charges ρ en tout point de 2 manières :
 - (a) grâce à l'équation de Maxwell-Gauss;
 - (b) en appliquant le théorème de Gauss.
3. (a) Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.
 (b) Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$).

Correction de l'exercice 11

1. Utilisons la forme $\vec{E} = -\text{grad} V$:

$$\vec{E}(x \leq 0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(x > 0) = -\frac{V_0}{a} e^{-x/a} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.19})$$

2. (a) Avec Maxwell-Gauss, $\rho = \varepsilon_0 \text{div}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx}$ conduisant à

$$\rho(x \leq 0) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(x > 0) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a} \quad (\text{Ex.20})$$

- ;
- (b) En utilisant le théorème de Gauss sur une surface fermée cylindrique de section S , dont deux faces sont perpendiculaires à \vec{e}_x , une face située en x et l'autre en $x + dx$, orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \iff E(x + dx)S - E(x)S = \frac{\rho(x)S dx}{\varepsilon_0} \quad (\text{Ex.21})$$

soit en développant à l'ordre 1 :

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx}(x) = \varepsilon_0 \frac{V_0}{a^2} e^{-x/a} \quad (\text{Ex.22})$$

Et de même pour $x < 0$ où la constance du champ conduit bien à $\rho(x \leq 0) = 0$.

3. Parmi les deux méthodes précédentes, la seule qui puisse donner une information sur la densité surfacique de charges est le théorème de Gauss (la méthode avec l'équation de Maxwell-Gauss n'est sensible qu'à une densité volumique de charges).

On peut appliquer le théorème de Gauss sur un cylindre de section droite S parallèle à (Ox), de hauteur dx à cheval sur $x = 0$. La charge contenue dans ce volume est approximativement σS :

$$\left(-\frac{V_0}{a} - 0\right)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \iff \sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} \quad (\text{Ex.23})$$

- 4.

$$Q = \sigma S + \int_0^{+\infty} \rho(x)S dx = S \left(\sigma + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} \left[\frac{e^{-x/a}}{-1/a} \right]_0^{+\infty} \right) = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} + \frac{-\varepsilon_0 V_0 S}{a} = 0 \quad (\text{Ex.24})$$