

Electromagnétisme en régime variable

Sommaire

I	Les quatre équations de Maxwell dans le vide	2
I.1	Équation de Maxwell-Gauss	2
I.2	Équation de Maxwell-Thomson (= équation de Maxwell-flux)	3
I.3	Équation de Maxwell-Faraday	3
I.4	Équation de Maxwell-Ampère	3
I.5	Nouvelle démonstration de l'équation de conservation de la charge	4
II	Symétries et invariances	4
III	Équation de conservation de l'énergie électromagnétique (= équation locale de Poynting)	5
	Exercices	7

Questions de cours

- Démontrer la loi de Faraday à partir de l'équation de Maxwell-Faraday.
- Etablir l'équation locale de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.
- Citer l'équation locale de Poynting et interpréter les différents termes. Cas du vide en régime stationnaire.

Prise de notes : Dans ce chapitre : étude de distributions de charges et de courants variables : $(\rho(M,t), \vec{j}(M,t))$, créant un couple de deux champs : les champs électriques et magnétiques : $(\rho(M,t), \vec{j}(M,t)) \underbrace{\Rightarrow}_{?} (\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$. On parlera désormais

mais d'électromagnétisme.



Histoire des sciences : développement long de l'EM durant des siècles. Maxwell a unifié plusieurs approches en une seule théorie au XIXème siècle, toujours utilisée, en rajoutant au passage le terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans (MA) (qui aura un rôle crucial lors de l'étude des ondes EM et qu'on va interpréter dans ce chapitre). Notons que la formulation moderne des équations provient de Heaviside qui a synthétisé les 20 équations de Maxwell en 4 équations vectorielles.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Faire un bilan de toutes les équations de l'électromagnétisme dans le vide, en régime variable : quels théorèmes sont valables ?
2. Définir un vecteur densité de courant énergétique associé au champ électromagnétique (aussi appelé vecteur de Poynting) et réaliser des bilans énergétiques.

I Les quatre équations de Maxwell dans le vide

Résumons les quatre lois locales desquelles on est parti pour construire l'électromagnétisme, dans le cas général du régime variable dans le vide :

Équations de Maxwell dans le vide en régime variable



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Comme ces quatre équations sont linéaires, on peut toujours appliquer le principe de superposition pour déterminer $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Notons un lien entre les deux constantes ε_0 et μ_0 (cf. chapitre O2 sur les ondes) :

Célérité de la lumière

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$$

avec c la célérité de la lumière

I.1 Équation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est inchangée par rapport au cas statique : le théorème de Gauss reste valable et relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge $Q_{\text{int}}(t)$ contenue dans le volume délimité par cette surface

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M,t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{I.1})$$

I.2 Équation de Maxwell-Thomson (= équation de Maxwell-flux)

L'équation de Maxwell-Thomson est inchangée par rapport au cas statique : le champ magnétique est toujours à flux conservatif, même si le flux peut dépendre du temps. Ainsi les lignes de champ magnétiques sont toujours bouclées sur elles-mêmes.

I.3 Équation de Maxwell-Faraday

a Loi de Faraday

On peut passer de la formulation locale à la formulation intégrale.

Intégrons l'équation de Maxwell-Faraday à travers une surface (S) immobile qui s'appuie sur un contour (Γ) fermé orienté :

$$\begin{aligned} \star \quad \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \iff \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Stokes.

Loi de Faraday

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

e est appelé force électromotrice et s'exprime en Volt. On admet que e est la tension le long du contour (Γ). Cette loi est à l'origine des phénomènes d'induction (cf. chapitres de sup et EM5).

b Potentiel électrique

Comme on n'a plus $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$, la relation entre le potentiel électrique V et le champ $\vec{E}$ devient fautive : ~~$\vec{E} = \text{grad}(V)$~~ . Cela se retrouve dans la loi de Faraday : il peut exister une tension induite non nulle le long d'un contour fermé.

I.4 Équation de Maxwell-Ampère

Vocabulaire L'équation de Maxwell-Ampère peut se ré-écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

faisant apparaître que le terme $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est homogène à un vecteur densité de courant électrique. On parle alors parfois de vecteur densité de courant de déplacement.

Théorème d'Ampère en régime variable D'après le théorème de Stokes-Ampère, en considérant une surface (S) s'appuyant sur un contour fermé et orienté (Γ) :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

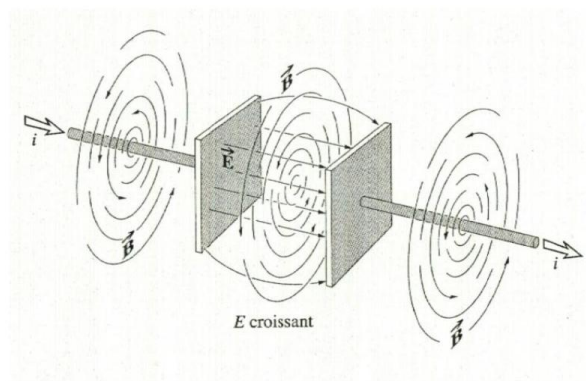
L'équation de Maxwell-Ampère en régime variable permet alors de ré-écrire le premier terme :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

En inversant l'intégrale et la dérivée temporelle, on en déduit la formulation du théorème d'Ampère en régime variable (différente de celle en statique) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}(t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{I.2})$$

Remarquons que c'est l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable qui permet de justifier le "passage" du courant de part et d'autre d'un condensateur.



I.5 Nouvelle démonstration de l'équation de conservation de la charge

On peut vérifier que les équations de Maxwell sont bien compatibles avec l'équation de conservation de la charge, démontrée au chapitre EM1.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B})}_{=0} - \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}) \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

★

où on a utilisé le théorème de Schwarz.

II Symétries et invariances

★ Désormais, la source du champ électrique n'est plus ρ : les sources de $\vec{E}$ sont ρ ET $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$! De même, les sources du champ magnétique sont à la fois $\vec{j}$ ET $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On parle de couplage électromagnétique.



Néanmoins, les conclusions obtenues en régime stationnaire se reconduisent en régime variable à condition de prendre en compte les plans de symétrie ou d'antisymétrie **communs à l'ensemble des distributions** $(\rho, \vec{j})$:

- si à chaque instant t , (Π_S) est un plan de symétrie du couple $(\rho, \vec{j})$, pour $M \in (\Pi_S)$, $\vec{E}(M, t)$ est contenu dans (Π_S) et $\vec{B}(M, t)$ lui est orthogonal ;
- si à chaque instant t , (Π_A) est un plan d'antisymétrie du couple $(\rho, \vec{j})$, pour $M \in (\Pi_A)$, $\vec{E}(M, t)$ est orthogonal à Π_S et $\vec{B}(M, t)$ est contenu dans Π_A ;
- en cas d'invariance par translation ou rotation du couple $(\rho, \vec{j})$, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est indépendant du paramètre caractérisant la translation ou la rotation.

Exercice : On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité σ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant y est fournie par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Comme aucune direction de l'espace n'est privilégiée, on suppose que : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Réaliser une étude de symétries et invariances pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

- ★ Comme les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges ET de courant, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$. Puis invariances par rotations : $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

III Équation de conservation de l'énergie électromagnétique (= équation locale de Poynting)

On veut réaliser un bilan énergétique associé au champ électromagnétique. En effet, le champ électromagnétique transporte de l'énergie : nous avons déjà vu au travers de l'exemple du condensateur plan infini que la densité volumique d'énergie électrostatique s'écrivait $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2$.

On va généraliser l'étude, en partant des équations de Maxwell et de l'information que la puissance volumique cédée aux porteurs de charges vaut $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Exprimons donc $\vec{j}$ que l'on multiplie scalairement par $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (\text{III.1})$$

- ★ Le dernier terme se réécrit $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right)$ correspondant à la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie électrostatique. Conformément à la forme de toutes les équations locales de conservation, on cherche à faire apparaître la divergence d'un vecteur densité de courant énergétique.

Pour y parvenir, aidons-nous d'une formule (non exigible) d'analyse vectorielle :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{C}) = (\text{rot} \vec{A}) \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{C} \quad (\text{III.2})$$

soit :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left(\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) \quad (\text{III.3})$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad (\text{III.4})$$

- ★ appelé vecteur de Poynting.
Préciser les unités : J m^{-3} , W m^{-2} .
Interprétation physique :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Entourer les termes :

- Variation de l'énergie EM liée :
- soit au flux sortant d'énergie EM lié à la propagation de l'onde
- soit à l'énergie cédée par les champs à la matière

Il s'agit donc d'une équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. On appelle

cette équation de conservation : l'équation locale de Poynting.

De même qu'à chaque fois que l'on a obtenu une équation de conservation, on peut interpréter physiquement le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$: il s'agit du vecteur densité de courant énergétique. Ainsi, l'énergie traversant une surface élémentaire $d\vec{S}$ orientée durant dt est :

$$\delta^2 \mathcal{E} = \delta P dt \quad \text{avec} \quad \delta P = \delta \Phi = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Autrement dit, la puissance transportée par une onde EM à travers une surface (S) est

★ :

$$P = \Phi = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Exercice : Redémontrer l'équation locale de Poynting en géométrie cartésienne unidimensionnelle, en réalisant un bilan d'énergie électromagnétique. On se servira pour cela de l'égalité entre puissance transportée et flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \Pi(x,t)\vec{e}_x$.

Schéma. On réalise un bilan énergétique sur la portion de milieu entre les abscisses x et $x + dx$ et entre t et $t + dt$.

Variation temporelle : ...

$$d^2 \mathcal{E} = \frac{\partial u_{em}}{\partial t} S dx dt$$

Echanges spatiaux : ...

★

$$\delta^2 \mathcal{E}_{ech} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} S dx dt$$

Terme de perte d'énergie :

$$\delta^2 \mathcal{E}_{perdu} = \vec{j} \cdot \vec{E} S dx dt$$

Bilan de conservation :

$$d^2 \mathcal{E} = \delta^2 \mathcal{E}_{ech} - \delta^2 \mathcal{E}_{perdu} \iff \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

.

★

Cas particulier du vide :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (\text{III.5})$$

traduisant l'absence de dissipation d'énergie dans le vide.

Cas particulier du vide en régime stationnaire :

$$\text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$\vec{\Pi}$ est à flux conservatif : le flux de $\vec{\Pi}$ se conserve le long d'un tube de champ : $\Phi_{entrant} = \Phi_{sortant}$.

Dans le cas où on peut distinguer plusieurs flux entrants et plusieurs flux sortants dans un système fermé, le bilan s'écrit alors :

$$\sum_i \Phi_{entrant,i} = \sum_j \Phi_{sortant,j}$$

Ex. 2 (Ecrit CCINP PC 2023) Condensateur en régime variable

Deux disques conducteurs, de rayon a , de même axe $(O, \vec{u}_z)$, distants de $d \ll a$, constituent les armatures d'un condensateur à vide (**figure 4**). La charge portée par chaque armature varie de façon sinusoïdale avec le temps, à la fréquence f . On note $q(t) = q_0 \cos(2\pi ft)$ la charge portée par l'armature supérieure à l'instant t . On suppose que le courant qui apporte ces charges arrive par des fils infinis confondus avec l'axe de révolution $(O, \vec{u}_z)$ du condensateur.

On s'intéresse au champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t))$ en tout point M à l'intérieur du condensateur et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

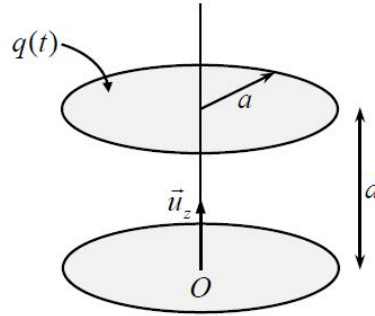


Figure 4 - Condensateur à symétrie cylindrique

Les échelles ne sont pas respectées

- Justifier par des considérations de symétries et d'invariances que le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est *a priori* de la forme : $\vec{E}(M, t) = E_r(r, z, t)\vec{u}_r + E_z(r, z, t)\vec{u}_z$.
- On suppose en première approximation que $\text{rot } \vec{E} \simeq \vec{0}$. En déduire l'ordre de grandeur du rapport $\left| \frac{E_r}{E_z} \right|$.
Conclure sachant que les effets de bords sont négligeables ($d \ll a$).
Déduire d'une autre équation de Maxwell que le champ $\vec{E}(M, t)$ est finalement de la forme : $\vec{E}(M, t) = E_z(r, t)\vec{u}_z$.
- On cherche en première approximation un champ uniforme à l'intérieur du condensateur : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(t) = E_{0,z}(t)\vec{u}_z$.
Déduire du théorème de Gauss appliqué à une surface à définir clairement, notamment à l'aide d'un schéma, l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(t)$. On donnera le résultat en fonction de $q(t)$, a et de la permittivité du vide ε_0 . **On admettra que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur** et on supposera que la densité surfacique de charges portée par chaque armature est uniforme.
- Justifier que, sous les approximations effectuées, il existe une fonction potentiel électrostatique $V_0(M, t)$ telle que $\vec{E}_0 = -\text{grad } V_0$. Donner l'expression du potentiel scalaire $V_0(M, t)$ à une constante additive près.
Exprimer la différence de potentiel $V_0(z = d) - V_0(z = 0)$ entre les deux armatures et en déduire que la capacité C du condensateur s'écrit : $C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$.

Correction de l'exercice 2

- Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie des distributions de charges et de courants : $\vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, z, t)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z, t)\vec{e}_z$.
Il y a invariance des distributions de charges et de courants par rotation d'angle θ : $\vec{E}(M, t) = E_r(r, z, t)\vec{e}_r + E_z(r, z, t)\vec{e}_z$.



Nous ne sommes pas en électrostatique ici : les symétries et invariances sont à évaluer en considérant à la fois les distributions de charges ET de courants.

Q17. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \vec{0}$.

En ordre de grandeur, en faisant attention aux 2 dimensions d'espace du problème, on a $\frac{\partial E_r}{\partial z} \sim \frac{|E_r|}{d}$ et $\frac{\partial E_z}{\partial r} \sim \frac{|E_z|}{a}$. On a donc avec le rotationnel nul $\frac{|E_r|}{d} \sim \frac{|E_z|}{a}$ donc

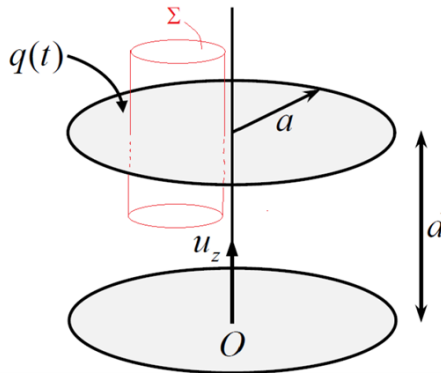
$$\left| \frac{E_r}{E_z} \right| \sim \frac{d}{a} \ll 1$$

Il ne reste donc plus que $\vec{E}(M, t) = E_z(r, z, t) \vec{u}_z$.

De plus $\text{div} \vec{E} = 0$ car il n'y a pas de charges entre les armatures (équation de MAXWELL-GAUSS), donc $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ et finalement

$$\vec{E}(M, t) = E_z(r, t) \vec{u}_z.$$

Q18. Le calcul est plus simple que la méthode classique car on suppose que le champ est uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur. On prend donc comme surface de GAUSS un cylindre droit de forme et de hauteur quelconque, du moment que la face du haut est à une altitude supérieure à d (donc au dessus de la plaque du haut) et la face du bas entre les armatures, donc à une position où le champ vaut $\vec{E}_0(t) \vec{u}_z$. On note Σ la surface de la base.



On oriente cette surface vers l'extérieur : $d\vec{S}_{haut} = dS \vec{u}_z$, $d\vec{S}_{bas} = -dS \vec{u}_z$ et $d\vec{S}_{lat} \perp \vec{u}_z$.

Le flux du champ électrique à travers cette surface vaut donc :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{haut} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{haut} + \iint_{bas} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{bas} + \iint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = -E_0(t) \Sigma$$

La charge contenue à l'intérieur de la surface de GAUSS est, par proportionnalité (charge répartie uniformément sur la plaque)

$$Q_{int} = \frac{\Sigma}{\pi a^2} q(t).$$

D'après le théorème de GAUSS, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ donc on obtient :

$$\vec{E}_0(t) = -\frac{q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$$

20. On a supposé pour l'étude précédente que $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_0) = \vec{0}$. Ainsi, il existe une fonction scalaire $V_0(M, t)$ telle que $\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}}(V_0)$.

Q20. $\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V_0 = -\frac{q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$ donc par intégration $V_0(z) = \frac{q(t)z}{\pi a^2 \epsilon_0} + \text{cste}$.

La tension entre les armatures est $U = V_0(d) - V_0(0) = \frac{q(t)d}{\pi a^2 \epsilon_0}$ donc par définition de la capacité

$$C = \frac{q(t)}{U} = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{d}$$