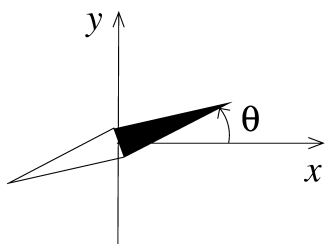


Ex. 3 Mouvements d'une boussole

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page³



Sur une paillasse de laboratoire, une boussole assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$ est libre de tourner autour de l'axe vertical $\Delta = (Oz)$. La direction du moment dipolaire est confondue avec l'axe de symétrie de la boussole. La liaison avec l'axe est de type « pivot parfait » sans frottement. On note J son moment d'inertie par rapport à Δ .

La boussole est plongée dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_x$, les frottements sont négligés.

On rappelle que le moment de force s'exerçant sur $\vec{m}$ est : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

1. Déterminer les positions d'équilibre de la boussole.
2. Déterminer l'équation différentielle portant sur l'angle θ .
3. Dans un premier temps, on étudie les petits mouvements de la boussole, ce qui revient à supposer que $|\theta| \ll 1$.

Donner l'expression de $\theta(t)$ en notant θ_0 la valeur initiale de l'angle et en supposant que $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ rad s}^{-1}$.

4. On libère désormais la boussole sans vitesse angulaire initiale, alors qu'elle fait un angle droit avec la direction du champ.

(a) Déterminer l'intégrale première du mouvement et la mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + f(\theta) = \text{cste}$$

et donner l'expression de la fonction $f(\theta)$ et de la constante.

- (b) En déduire la plus grande valeur de vitesse angulaire de la boussole.
5. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un moment magnétique $\vec{m}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Retrouver l'intégrale première du mouvement en utilisant une méthode énergétique.

Correction de l'exercice 3

- Système : {Boussole}
- Référentiel du laboratoire galiléen

1. A l'équilibre, la somme des moments de force est nulle, soit ici $\vec{\Gamma} = \vec{0}$. Donc, $\vec{m}$ est colinéaire à $\vec{B}$: les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
2. TMC par rapport à l'axe fixe (Δ) :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = -\|\vec{m}\| B \sin(\theta)$$

en faisant particulièrement attention au fait que :

- on étudie un solide et non une masse ponctuelle, donc $L_\Delta = J\dot{\theta}$ et non $\vec{L}_\Delta = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$
- pour calculer $\vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$, on peut soit décomposer $\vec{m}$ dans la base cartésienne, soit utiliser la formule générale de calcul d'un produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pm \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin(\theta) \vec{c}$ avec $\vec{c}$ un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (on détermine le signe via la main droite).

- ### 3. Approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{||\vec{m}|| B}{J} \theta(t) = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\|\vec{m}\| B}{J}}$. La solution générale s'écrit

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes que l'on détermine avec les conditions initiales. On obtient ainsi $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

Remarque : Cette solution devient invalide si θ_0 n'est pas très petit devant 1 rad, comme à la question suivante.

4. (a) Pour déterminer l'intégrale première du mouvement, on multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$, puis on cherche une primitive :

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} + \|\vec{m}\| B \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \|\vec{m}\| B \cos(\theta) = \text{cste}$$

soit le résultat de l'énoncé avec $f(\theta) = -\frac{\|\vec{m}\| B}{J} \cos(\theta)$. On détermine la constante avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \pi/2$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. On a $\text{cste} = 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{\|\vec{m}\| B}{J} \cos(\theta) = 0$$

- (b) On en déduit que la plus grande valeur de vitesse angulaire sera atteinte en $\theta = 0$, et on a $\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2\|\vec{m}\| B}{J}}$.

Remarque : Je vous conseille de vous rappeler qu'une intégrale première du mouvement permet d'avoir des informations sur le mouvement d'un système, alors même que l'équation différentielle associée est non linéaire.

5. Le système n'est soumis qu'à une seule action conservative, ainsi l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = \text{cste} = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \|\vec{m}\| B \cos(\theta)$$

On retrouve l'intégrale première du mouvement via la conservation de l'énergie mécanique.

Ex. 4 Cylindre chargé en rotation

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁴

Un cylindre d'axe Oz , de longueur ℓ et de rayon a est uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ uniforme. Le cylindre est en rotation uniforme avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$ constante autour de son axe dans le référentiel du laboratoire.

On suppose que le champ magnétique est nul à l'extérieur du cylindre.

Déterminer le champ magnétique créé par le cylindre pour un point M à l'intérieur du cylindre, en supposant $\ell \gg a$.

Correction de l'exercice 4

La situation physique est similaire à une infinité de bobines imbriquées les unes dans les autres. En effet, la rotation uniforme du cylindre chargé uniformément est à l'origine d'un courant orthoradial. En effet, chaque porteur de charge distant de r de l'axe $(O, \vec{e}_z)$ possède une vitesse $\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta$. Ainsi le vecteur densité volumique de courant vaut :

$$\vec{j} = \rho r \omega \vec{e}_\theta \quad (\text{Ex.5})$$

Ainsi, par analogie avec un solénoïde, on cherche un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$, et on suppose que le champ magnétique extérieur (dont on peut montrer qu'il est uniforme), est nul. Ainsi on prend un contour d'Ampère rectangulaire de longueur h , dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ à cheval entre l'extérieur et l'intérieur (distant de r de l'axe). Ainsi en appliquant le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)h = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 h \int_r^a \rho r \omega dr = \mu_0 h \rho \omega \frac{1}{2}(a^2 - r^2) \quad (\text{Ex.6})$$

d'où le champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq a) = \frac{1}{2}\mu_0 \rho \omega (a^2 - r^2) \vec{e}_z \quad (\text{Ex.7})$$

Ex. 5 Longueurs d'onde des raies d'émission de l'atome d'hydrogène

On s'intéresse au mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène. On appelle O la position du proton et on considère que le référentiel du proton est galiléen. On donne les valeurs de constantes fondamentales :

- Constante de Planck : $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- Masse d'un électron : $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

1. Justifier que le mouvement de l'électron est plan.

Dans la suite, on utilise les coordonnées polaires de centre O . On s'intéresse au modèle de Bohr.

2. Montrer que l'électron ne peut se trouver que sur des orbites de rayon $r = a_0 \times n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre quantique principal et $a_0 = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ une constante appelée le rayon de Bohr dont on donnera l'expression.
3. En déduire alors que l'énergie mécanique de l'électron vaut :

$$E = -\frac{R_y}{n^2} \quad \text{avec} \quad R_y = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 13.6 \text{ eV}$$

une constante appelée la constante de Rydberg.

4. On rappelle que l'énergie associée à un photon de fréquence ν s'écrit, d'après la loi de Planck-Einstein (à connaître) : $E = h\nu$. Déterminer alors l'énergie du photon en fonction de sa longueur d'onde λ . En déduire la longueur d'onde du photon émis lors de la désexcitation d'un électron de l'orbite n vers l'orbite p (n et p sont les nombres quantiques principaux des deux orbites).
5. On se propose de vérifier expérimentalement la relation obtenue. On obtient, par spectroscopie (goniomètre à réseau par exemple), les longueurs d'onde de la série de Lyman de l'hydrogène (dans cette série, toutes les désexcitations d'électrons se font avec une arrivée dans l'orbite $n = 1$).

Orbite de départ	2	3	4	5	6
Longueur d'onde (nm)	122	103	97.3	95.0	93.8

Vérifier la relation obtenue précédemment.

Correction de l'exercice 5

Correction de la Q.1 ci-dessous, et du reste des questions dans un corrigé manuscrit à la fin du document.

- Système : {électron}
 - Référentiel du proton galiléen
 - Coordonnées polaires de centre O
1. On étudie un mouvement à force centrale, on applique donc le raisonnement habituel (cf. mécanique céleste). TMC au point O :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \text{cste}$ se conserve au cours du mouvement. Ainsi, $\vec{OM}$ est continuellement orthogonal au vecteur $\vec{L}_0$: la trajectoire est contenue dans le plan orthogonal à $\vec{L}_0$ et passant par O .

Ex. 6 (Ecrit E3A-Polytech PSI 2020) Champ magnétique créé par une bobine plate

On s'intéresse au cas d'une « bobine plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution (Oz) et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourue par un courant stationnaire I . On s'intéresse à un point M de l'axe (Oz), de cote $z > 0$.



1. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .

2. Que peut-on dire du plan $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

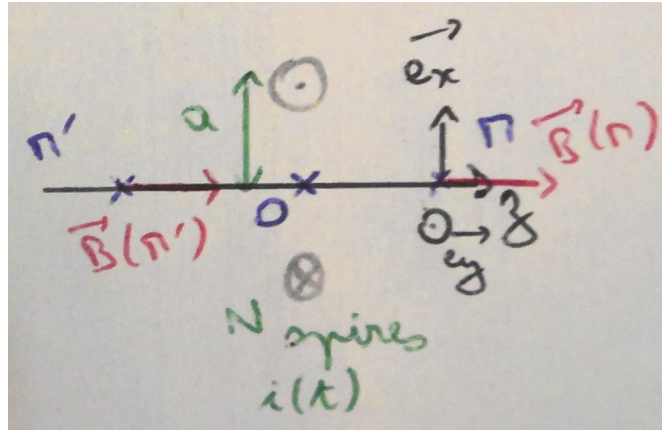
On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine plate au point M :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N i a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,max}/2$, en fonction de a .

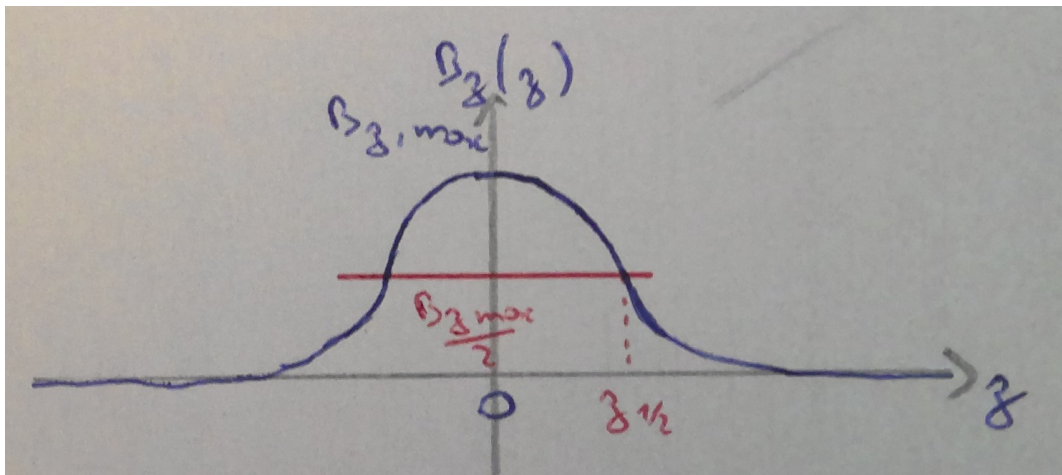
Correction de l'exercice 6

1. Attention, cette question s'intéresse au champ magnétique exclusivement sur l'axe (Oz) . On ne considère donc pas les plans passant par un point M **quelconque**.



Pour un point M sur l'axe (Oz) , les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}(M, t) = B_z(M, t) \vec{e}_z$.

2. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}$ est antisymétrique par rapport au plan $z = 0$. Comme $\vec{B}$ est dirigé selon $\vec{e}_z$, $B_z(-z) = B_z(z)$ (cf. schéma).



3. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$: $B_{z,max} = B_z(0) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$.

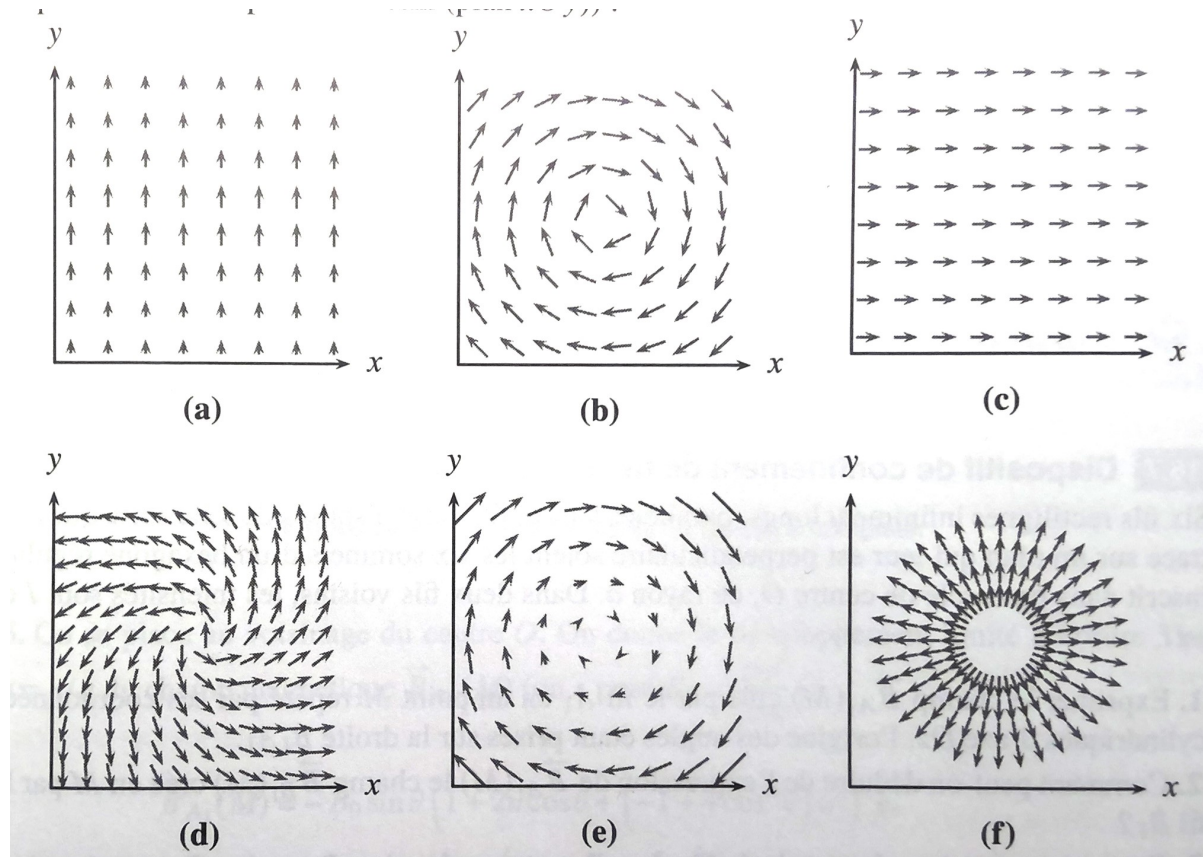
La position $z_{1/2}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2a} \\ \Rightarrow (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2} &= 2a^3 \\ \Rightarrow z_{1/2} &= a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0.77a \end{aligned}$$

Le champ magnétique décroît donc très vite dès qu'on s'éloigne des spires.

Ex. 7 Topographie du champ magnétostatique

Parmi les six cartes de champ ci-dessous, déterminer les trois qui correspondent à un champ magnétostatique. Pour ces trois cartes de champ magnétostatique, indiquer si des courants sont présents dans la région cartographiée et, si oui, préciser leur sens.



Correction de l'exercice 7

Cartes de champ magnétostatique

Pour vérifier si un champ peut être magnétostatique, il faut vérifier si $\text{div}(\vec{B}) = 0$ (équation de Maxwell-Thomson). (En effet, l'équation de Maxwell-Ampère n'impose pas la valeur de $\text{rot}(\vec{B})$.)

Il est clair que les cartes (d) et (f) ne sont pas des cartes de champ magnétostatique, car au centre, le champ diverge ($\text{div}(\vec{B}) > 0$). La troisième carte non magnétostatique est la (a). On peut le justifier de deux manières :

- en plaçant un volume élémentaire sur la partie basse de la carte, on remarque que le champ a tendance à sortir de ce volume : $\text{div}(\vec{B}) > 0$. Si on place le volume élémentaire en haut de la carte, le champ a tendance à converger vers ce volume : $\text{div}(\vec{B}) < 0$.
- On est dans le cas cartésien où $\vec{B} = B(y)\vec{e}_y$. Donc, $\text{div}(\vec{B}) = \frac{dB}{dy}$ qui n'est pas nul, vu que B croît puis décroît avec y .

Les trois cartes de champ magnétostatique sont donc les cartes (b), (c) et (e).

Présence de courants

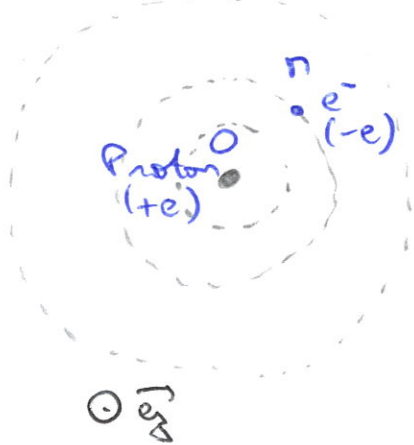
On détermine la présence de courants grâce à l'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$.

- Carte (c) Le champ est uniforme : $\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$. Aucun courant n'est présent dans la zone cartographiée.

- Carte (b) Le champ tourne autour du centre, signe de la présence de courants. Avec la règle de la main droite, on détermine que le courant rentre dans la feuille ici.
- Carte (e) Raisonement identique à celui fait en (b).

CORRIGÉ - Longueurs d'onde de raies d'émission de l'atome d'hydrogène

Modèle de Bohr:



Système: {électron n } (masse m)

Référentiel du proton, supposé galiléen

Hypothèses du modèle de Bohr:

- trajectoire circulaire de rayon r
- quantification du moment cinétique:

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \wedge m \vec{v} = n \hbar \vec{e}_z, n \in \mathbb{N}^*$$

1) On se place en coordonnées cylindriques.

$$\begin{cases} \vec{OP} = r \vec{e}_r \\ \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta \\ \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Principe fondamental de la dynamique:

$$m \vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \text{en } \vec{e}_\theta: \ddot{\theta} = 0 \\ \text{en } \vec{e}_r: m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases} \quad (A)$$

On veut faire intervenir le nombre quantique principal: on utilise la condition de quantification de Bohr:

$$\vec{L}_0 = m r v \vec{e}_z = n \hbar \vec{e}_z \Rightarrow v = \frac{n \hbar}{m r} \quad (B)$$

$$(A) \Rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{m r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \times n^2 \quad (C)$$

$\underbrace{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}}_{= a_0}$

Avec $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, on trouve $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ne pas savoir par cœur
 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

2) On en déduit :

$$E = E_c + E_p \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} E_p$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_p}{2}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$(c) \Rightarrow -\frac{m e^4}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{Q}{n}\right)^2 \times 8\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 Q^2} \times \frac{1}{n^2}}$$

$$= R_{Hy}$$

A.N: $R_{Hy} = 14 \text{ eV} (= 13,6 \text{ eV})$

3) Pour un photon se propageant à la vitesse c :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\text{Donc : } E_{\text{photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Lors de la désexcitation d'un électron (perte d'énergie, donc $n > n'$), l'énergie perdue est intégralement transférée au photon : $E_{\text{photon}} = E_n - E_{n'} = R_{Hy} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

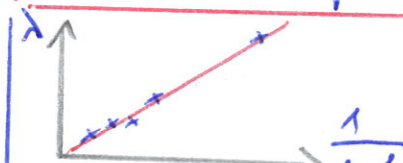
R_{Hy} : En fait, il n'y a pas besoin de transmettre strictement toute l'énergie au photon (mais c'est la situation la plus probable.).

$$\text{Donc : } \frac{hc}{\lambda} = R_{Hy} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{hc}{R_{Hy}} \times \frac{1}{\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}}}$$

4) Pour la série de Lyman :

$$n=1 \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{R_{Hy}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

On trace λ en fonction de $\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$



Les points sont bien alignés avec $n^2 = 0,9999$

$\Rightarrow$ valide la loi linéaire. 2

R_g: Le coefficient α ne suffit pas à valider la loi:
représente la répartition de points en +.

On peut vérifier la valeur du coefficient directement:

$$\left(\frac{R_c}{R_g}\right)_{\text{théorique}} = 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad \Delta \text{ Passer à } R_g \text{ en } \underline{\underline{\text{Joule!}}}$$

$$\left(\frac{R_c}{R_g}\right)_{\text{exp}} = 92,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Les 2 valeurs diffèrent de 1,3%, ce qui tend à valider
la loi.