

Magnétostatique

Sommaire

I Définition du champ magnétostatique	2
II Sources du champ magnétostatique : le dipôle magnétostatique	2
II.1 Description des dipôles magnétiques	2
II.2 Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique	5
III Symétries et invariances	8
III.1 Plans de symétrie et d'antisymétrie	8
III.2 Invariances	10
IV Topographie du champ magnétostatique	10
IV.1 Comment représenter graphiquement le champ magnétique ?	10
IV.2 Equation de Maxwell-Thomson (= Maxwell-flux) (postulat)	11
IV.3 Equation de Maxwell-Ampère (postulat)	12
V Déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution de courants	12
V.1 Différents types de distributions de courants	13
V.2 Théorème d'Ampère	13
V.3 Utilisation du théorème d'Ampère pour déterminer un champ magnétique	13
Exercices	17

Questions de cours

- Moment magnétique : intérêt d'introduire cette grandeur, allure des lignes de champ, action d'un champ extérieur sur un moment magnétique (l'énergie potentielle du moment magnétique est $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$).
- Modèle de Bohr : présentation, magnéton de Bohr. Ordre de grandeur du moment magnétique volumique pour un aimant permanent.
- Expérience de Stern et Gerlach : présentation et enjeux.
- Symétries et invariances pour une distribution de courant. Conséquences sur le champ magnétique.
- Équation de Maxwell-Thomson. Conséquences.
- Équation de Maxwell-Ampère, en régime variable puis en régime stationnaire. Interprétation des différents termes. Démonstration du théorème d'Ampère.
- Déterminer l'expression du champ magnétique créé par : un fil épais et infini OU un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur (au choix du colleur).

- ★ *Prise de notes :* Il existe deux moyens de créer un champ magnétique : aimant ou courant. On étudie dans ce chapitre des champs magnétostatiques, c'est-à-dire des champs magnétiques créés par des distributions stationnaires de courants ou par des aimants permanents.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Appliquer une méthode systématique pour déterminer les symétries et invariances du champ magnétique.
2. Utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique créé par une distribution de courants.

I Définition du champ magnétostatique

Tout comme le champ électrique, le champ magnétique $\vec{B}$ n'est visible que par ses effets. Par exemple, en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, une particule chargée de charge q et de vitesse $\vec{v}$ subit la force de Lorentz magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force induit une modification de la trajectoire de la particule.

Unité de $\|\vec{B}\|$: tesla (T). On peut mesurer la norme du champ grâce à une sonde à effet Hall (cf. chapitre EM1).

Remarque : Nous verrons comment mesurer en pratique la direction et le sens de $\vec{B}$ dans la partie II-2.

Propriétés :

- Comparativement au champ électrique, le champ magnétique n'est pas un vecteur « classique », c'est-à-dire un vecteur polaire ou vrai vecteur. On dit que c'est un **vecteur axial** ou « **pseudo-vecteur** ». En effet, comme toutes les forces, la force magnétique est une grandeur qui ne dépend pas du choix d'orientation de l'espace (les forces sont des vecteurs polaires). Mais comme le produit vectoriel dépend quant à lui de l'orientation choisie du sens direct, le vecteur $\vec{B}$ dépend de l'orientation de l'espace.
- Le champ magnétique est une grandeur vectorielle qui vérifie le **principe de superposition** : le champ magnétique résultant en un point M est la somme vectorielle de tous les champs magnétiques créés en ce point par les différentes sources.

Quelques ordres de grandeur sont à connaître :

- le champ magnétique terrestre : $\sim 3 \times 10^{-5}$ T (dépend du lieu, ceci est vrai en France métropolitaine) ;
- un aimant permanent à température usuelle : de 0.1 T à 1 T ;
- un électroaimant : quelques teslas ;
- un aimant supraconducteur d'un appareil à IRM (refroidi à l'Hélium liquide) : ~ 10 T

II Sources du champ magnétostatique : le dipôle magnétostatique

II.1 Description des dipôles magnétiques

a Définition du moment magnétique

En première année a été soulignée la grande similitude entre les cartes de champ d'un aimant droit, d'une spire parcourue par un courant constant, ou même d'une bobine. Afin de comparer ces différents systèmes, une grandeur physique a été introduite, le *moment magnétique*.

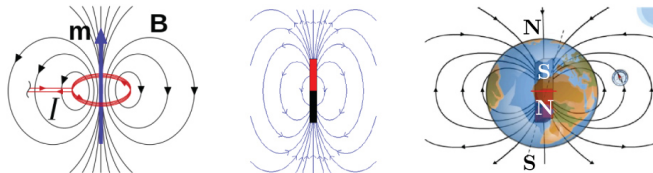
Définition du moment magnétique pour une spire

Pour une spire orientée parcourue par un courant d'intensité I et de vecteur surface $\vec{S}$ (orienté par le sens du courant), le moment magnétique associé est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} \quad (\text{II.1})$$

Il s'exprime en A m^2 .

Cette grandeur est étendue aux objets aimantés, bien qu'ils ne soient pas parcourus par des courants internes, et à toute distribution de courant d'extension finie. En effet, **à grande distance la structure géométrique du champ magnétique créé par une spire circulaire de moment $\vec{\mathcal{M}}$ est identique à celle de toute distribution de même moment magnétique.**



Un dipôle magnétique est alors un système magnétique possédant deux pôles (Nord et Sud), que l'on caractérise par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

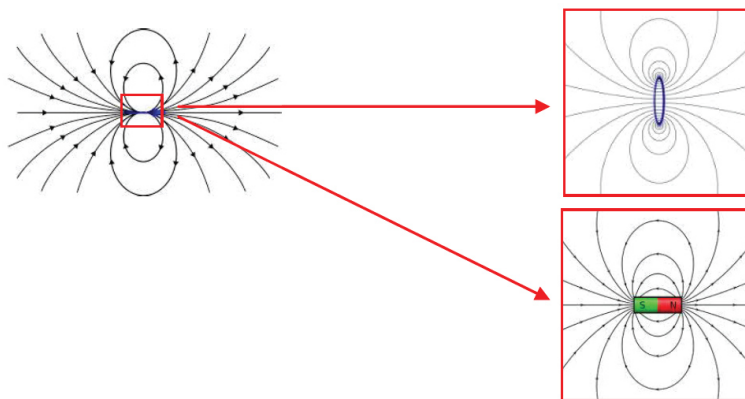
b Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ situé au centre O d'un repère sphérique crée un champ magnétique dans le vide, dont les composantes ont pour expression dans le cadre de l'approximation dipolaire, c'est-à-dire à *grande distance* du point O (pas à savoir par cœur) :

$$B_r = \frac{2\mu_0\mathcal{M} \cos\theta}{4\pi r^3} \quad , \quad B_\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0 \quad (\text{II.2})$$

avec la constante fondamentale $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$, appelée la perméabilité magnétique du vide.

On constate que le champ magnétique décroît rapidement avec la distance (en $1/r^3$). Ces expressions ne reflètent pas la réalité du champ réel créé par une spire ou un aimant droit lorsqu'on s'en approche (divergence).



Ordre de grandeur : Cette formule peut par exemple permettre de calculer le moment magnétique associé à la Terre, connaissant la composante horizontale du champ géomagnétique $B_\theta = 3 \times 10^{-5} \text{ T}$ au centre de la France métropolitaine, où $r = 6370 \text{ km}$, $\theta = 42^\circ$.

- ★ On assimile la Terre à un moment magnétique localisé en son centre et *dirigé du pôle nord géographique vers le pôle sud*, avec $\mathcal{M} = 1 \times 10^{23} \text{ A m}^2$ (très fort moment magnétique !).

c Origine "quantique" du moment magnétique associé à un atome isolé - Modèle de Bohr de l'atome (1913)

Au début du XXème siècle, les physiciens cherchent à expliquer les raies d'émission ou d'absorption des spectres associés à différentes espèces chimiques. Niels Bohr propose alors un modèle qui, par un gros "coup de chance", décrit très bien les raies associées à l'atome d'hydrogène.

Modèle de Bohr de l'atome

Les électrons, considérées comme des particules ponctuelles repérables, décrivent des trajectoires circulaires sur des orbites bien particulières ayant un moment cinétique L_n autour d'un axe (Oz) de référence :

$$L_n = n\hbar \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$). Cette quantification du moment cinétique induit une discrétisation des orbites accessibles aux électrons.

La discrétisation des orbites pour l'atome d'hydrogène a pour conséquence que l'électron ne peut posséder que certaines énergies bien précises : $E_n = E_c + E_p = -\frac{R_y}{n^2}$ avec $R_y = 13.6 \text{ eV}$ la constante de Rydberg (cf. TD), ce qui explique le spectre de raies.

Exercice : Montrer que, dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron a une trajectoire circulaire uniforme.

- ★ Appliquer le PFD, attention à définir le système et le référentiel. Et c'est fini.

Dans le cadre du modèle de Bohr, déterminons le moment magnétique associé à la trajectoire d'un électron. Schéma. On calcule le moment cinétique de l'électron autour du noyau :

$$\vec{L} = r\vec{e}_r \wedge m_e v \vec{e}_\theta = m_e r v \vec{e}_z = n\hbar \vec{e}_z$$

La trajectoire circulaire de l'électron est associée à un courant

$$\star \quad i = -\frac{e}{T} = -\frac{ev}{2\pi r}$$

Donc, le moment magnétique associé à cette boucle de courant est :

$$\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S} = i\pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} \times n\vec{e}_z = -n\mu_B \vec{e}_z$$

avec $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} \text{ A m}^2$ le magnéton de Bohr.

Exercice : On suppose que le magnéton de Bohr μ_B dépend de la charge élémentaire e , de la constante de Planck réduite $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$ et de la masse de l'électron m_e . Retrouver en ordre de grandeur l'expression du magnéton de Bohr μ_B par analyse dimensionnelle.

- ★ Rappel : il y a 7 unités de base (ou unités fondamentales) du SI : m, s, kg, A, K, mol, cd. Dimensions : $[\mu_B] = IL^2$ $[\hbar] = M.L^2.T^{-1}$ $[e] = IT$ $[m_e] = M$. On retrouve donc la seule expression homogène : $\mu_B = k \times \frac{e\hbar}{m_e}$ avec k une constante réelle.

On peut remarquer, dans la démonstration précédente, qu'il existe un lien de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique :

Rapport gyromagnétique de l'électron

Il existe un lien de proportionnalité entre le moment magnétique associé à un électron d'un atome et son moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L} \quad \text{avec} \quad \gamma = -\frac{e}{2m_e}$$

une constante appelée le rapport gyromagnétique de l'électron.

Remarque : En réalité, l'électron possède également un moment cinétique intrinsèque : le spin. Ce spin participe également au moment magnétique de l'atome et on peut aussi définir un rapport gyromagnétique de spin, qui se trouve être le double du rapport gyromagnétique orbital.

d Moment magnétique volumique maximal d'un aimant

Nous avons vu qu'on associe à un électron en rotation autour d'un noyau un moment magnétique de l'ordre du magnéton de Bohr μ_B . Dans le cas d'un atome isolé, possédant plusieurs électrons, il faut donc prendre en compte le moment magnétique créé par chacun des électrons. Mais, du fait du remplissage des couches électroniques de l'atome et de l'interaction des électrons entre eux, la plupart des moments magnétiques se compensent : le moment magnétique d'un atome isolé est donc également de l'ordre de μ_B .

Intéressons nous désormais aux propriétés magnétiques de la matière condensée, c'est-à-dire au cas des solides. On a donc un ensemble d'atomes.

★ (Le faire avec un schéma pour le cas désordonné, plutôt que d'écrire ce texte.) S'il n'y a aucune interaction entre ces atomes, l'orientation de leurs moments magnétiques individuels est aléatoire : au global, le moment magnétique total est donc nul (c'est le cas des solides diamagnétiques). En revanche, dans certains matériaux (dits ferromagnétiques), l'interaction entre les moments magnétiques des atomes est maximale et tous les moments magnétiques individuels s'alignent entre eux : cela constitue un aimant permanent.

Le moment magnétique maximal d'un aimant permanent de volume $d\tau$ est donc $\delta\mathcal{M}_{\max} \sim \delta N \times \mu_B$ avec δN le nombre d'atomes dans le volume $d\tau$ de l'aimant. On peut alors définir le moment magnétique volumique maximal, aussi appelé l'aimantation maximale, comme :

$$M_{\max} = \frac{\delta\mathcal{M}_{\max}}{d\tau} \sim \frac{\delta N}{d\tau} \mu_B = n\mu_B$$

avec n la densité volumique d'atomes.

Ordre de grandeur : Considérons un aimant en fer de masse volumique $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. On donne la masse molaire du fer $M = 55.8 \text{ g mol}^{-1}$. Déterminer la densité volumique n d'atomes de fer dans l'aimant et en déduire un ordre de grandeur du moment magnétique volumique maximal $M_{\max}$ de l'aimant.

★ $n = \frac{\rho}{M} N_A = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \Rightarrow M_{\max} \sim 8 \times 10^5 \text{ A m}^{-1}$

En pratique, à température ambiante, on obtient des aimants permanents de moment magnétique volumique de l'ordre de 10^5 A m^{-1} .

II.2 Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique

a Action d'un champ magnétique extérieur

On admet les résultats suivants (qui ne sont pas à connaître par cœur) :

Interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique extérieur

L'interaction entre un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}$ est décrit par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$. Il en résulte les actions suivantes :

- un moment de force exercé sur l'aimant $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$;
- une force exercée sur l'aimant $\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}$.

Analyse de l'effet du moment :

Le moment de force exerce un effet de rotation tendant à aligner le moment magnétique selon la direction du champ magnétique. Ainsi, à l'équilibre mécanique, une boussole (qui possède un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$) permettra de déterminer la direction et le sens du champ $\vec{B}$.

Exercice : Justifier de deux manières qu'il existe une position d'équilibre stable pour un moment magnétique soumis à un champ magnétique externe uniforme.

- ★ D'après l'expression de l'énergie potentielle, en notant α l'angle orienté entre $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}_{ext}$, $E_p = -\mathcal{M}B_{ext} \cos\alpha$, minimal pour $\alpha = 0$, ce qui correspond à la position d'équilibre stable : le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. C'est également conforme avec l'expression du moment de force : $\vec{\Gamma} = \mathcal{M}B_{ext} \sin\alpha \vec{e}_z$, en considérant que le moment magnétique peut tourner autour de l'axe (Oz) orthogonal au champ et au moment magnétique. Ainsi, si $\alpha > 0$, le moment de force fait tourner le moment magnétique dans le sens trigonométrique et le ramène vers $\alpha = 0$.

Analyse de l'effet de la force :

Si le champ magnétique est uniforme, la force exercée sur l'aimant est nulle.

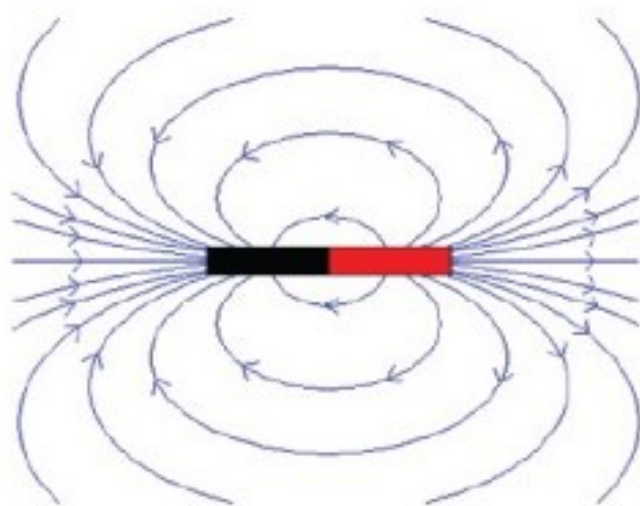
Dans le cas d'un champ magnétique non uniforme, en supposant que $\vec{\mathcal{M}}$ est orienté dans le sens de $\vec{B}$, on observe que la force tend à déplacer le moment magnétique vers les zones de champ magnétique intense. Pour l'illustrer, considérons le cas simplifié où le champ magnétique s'écrit $\vec{B}_{ext} = B(x)\vec{e}_x$ avec $B(x) > 0$ une fonction croissante. Le moment magnétique du dipôle est donc $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_x$ avec $\mathcal{M} > 0$. La force a alors pour expression :

$$\vec{F} = \mathcal{M} \frac{dB}{dx} \vec{e}_x \quad (\text{II.3})$$

Elle est orientée selon $+\vec{e}_x$, c'est-à-dire dans le sens où le champ magnétique est croissant.

Application : pourquoi deux aimants s'attirent / se repoussent-ils ?

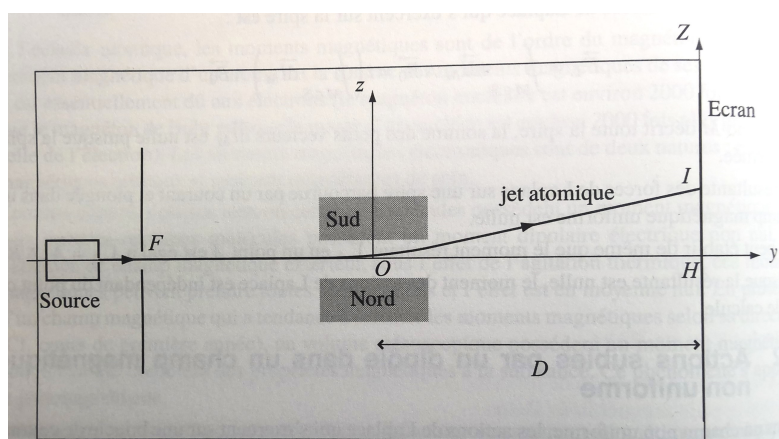
Reprenons la carte du champ magnétique créé par un aimant.



b Expérience historique de Stern et Gerlach (1922)

Description de l'expérience :

En 1922, les physiciens Stern et Gerlach réalisent une expérience de déviation d'un faisceau d'atomes d'argent (cf. schéma de l'expérience ci-dessous, tiré du Dunod, *Physique, PC/PC**, 6ème édition).



Le dispositif est plongé dans un vide poussé. La source, chauffée à haute température, permet l'émission d'atomes d'argent à vitesse non nulle. Une fente (F) permet de sélectionner les atomes allant dans la direction (Oy) : on obtient alors un jet atomique après la fente.

Ce jet atomique traverse ensuite une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ fortement inhomogène. Stern et Gerlach mesurent alors l'angle de déviation du jet atomique en repérant l'impact des atomes sur un écran.

Enjeu 1 : mise en évidence du spin :

Résultat attendu d'après la physique classique :

Stern et Gerlach ont choisi de réaliser cette expérience avec des atomes d'argent, car dans leur état fondamental, ces atomes ont un moment cinétique orbital nul : $\vec{L} = \vec{0}$. Donc, d'après le lien de proportionnalité entre $\vec{L}$ et $\vec{M}$, on s'attendrait à avoir un moment magnétique $\vec{M} = \vec{0}$. Aucune force n'agit sur les atomes, ils ne sont pas déviés.

Analyse du résultat expérimental :

Expérimentalement, Stern et Gerlach observent une déviation du jet atomique. Cette expérience montre donc qu'il existe un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_s$ non nul, associé à un moment cinétique intrinsèque non nul : **le spin**.

La force s'appliquant sur les atomes d'argent est alors :

★
$$\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} = \left(\mathcal{M}_{s,x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{M}_{s,y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{M}_{s,z} \frac{\partial}{\partial z} \right) B(z) \vec{e}_z = \mathcal{M}_{s,z} \frac{dB}{dz} \vec{e}_z$$

Enjeu 2 : quantification du spin :

Résultat attendu d'après la physique classique :

A l'issue de la fente (F), chaque atome a une "orientation" aléatoire dans l'espace. On s'attend donc à ce que la projection selon $\vec{e}_z$ du moment magnétique de spin $\vec{\mathcal{M}}_s$ prenne toutes les valeurs possibles de manière équiprobable :

$$- \left\| \vec{\mathcal{M}}_s \right\| \leq \mathcal{M}_{s,z} \leq + \left\| \vec{\mathcal{M}}_s \right\|$$

Ainsi, sur l'écran, le jet atomique devrait former une tache continue allant d'un point I à un point J .

- ★ Faire deux schémas avec l'axe (HZ) de l'écran et indiquer une tache continue avec la légende "attendu d'après la physique classique" et deux taches avec la légende "résultat expérimental".

Analyse du résultat expérimental :

Le fait que seules deux taches symétriques apparaissent sur l'écran indique que la mesure de la projection selon (Oz) du moment magnétique de spin ne peut prendre que deux valeurs discrètes opposées. Il en résulte deux conséquences :

- L'image classique du spin comme étant un vecteur pouvant prendre n'importe quelle direction dans l'espace n'est pas correcte : le spin est une grandeur quantique sans équivalent classique.
- Le spin est quantifié et, dans le cas de l'électron, sa projection ne peut prendre que deux valeurs discrètes.

L'expérience de Stern et Gerlach est historiquement la première expérience ayant montré cette dernière conséquence, qui avait été prédite théoriquement auparavant.

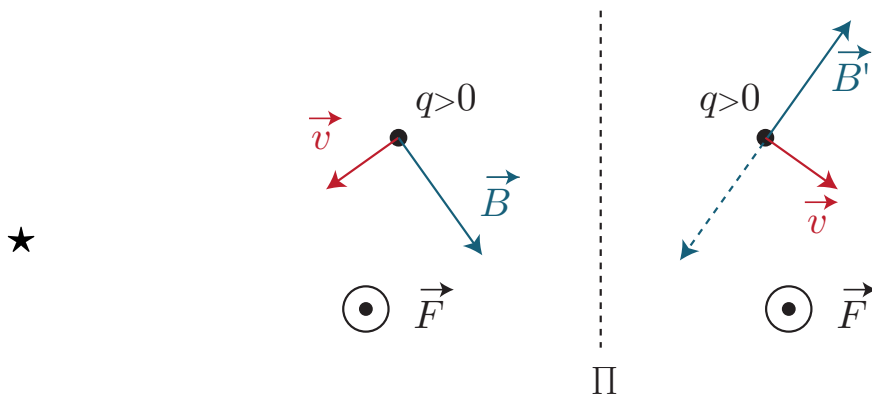
III Symétries et invariances

III.1 Plans de symétrie et d'antisymétrie

a Conséquence du caractère axial du champ magnétique

Rappelons que, contrairement aux forces, le champ magnétique est un vecteur axial, c'est-à-dire qu'il dépend du choix d'orientation directe de l'espace.

Examinons la conséquence de cette propriété du point de vue des symétries. Prenons l'exemple d'une particule chargée $q > 0$ se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ et soumise à un champ magnétique $\vec{B}$: la force de Lorentz magnétique $\vec{F}$ s'applique alors à la charge.

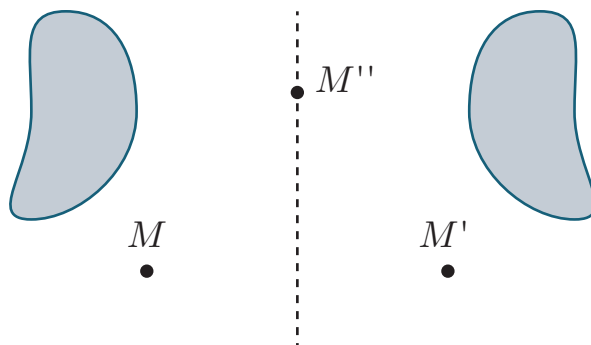


Si on trace la situation symétrique, comme la force doit être symétrique, il faut tracer $\vec{B}(M') = -\text{Sym}_{(\Pi_S)}(\vec{B}(M))$.

Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie de $\vec{B}$ sont alors inversées par rapport à celles de $\vec{E}$.

b Plans de symétrie

Considérons un plan de symétrie d'une distribution de courant Π_S (noté également Π^+) :

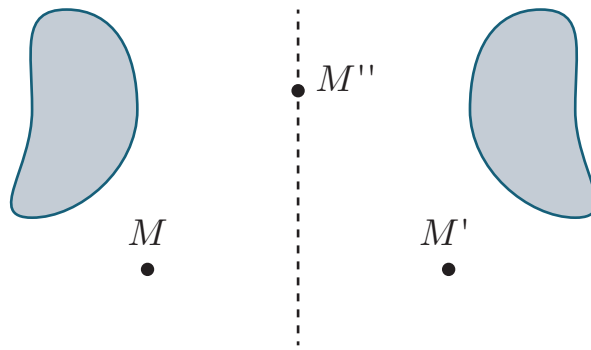


Ainsi pour un plan de symétrie de la distribution de courants :

- ★
- si $M' = \text{Sym}_{\Pi_S}(M)$, $\vec{B}(M') = -\text{Sym}_{\Pi_S}(\vec{B}(M))$;
 - pour un point M'' appartenant au plan de symétrie, $\vec{B}(M'')$ doit être opposé à son propre symétrique, c'est-à-dire que *le champ magnétique en point d'un plan de symétrie est normal à ce plan*.

c Plans d'antisymétrie

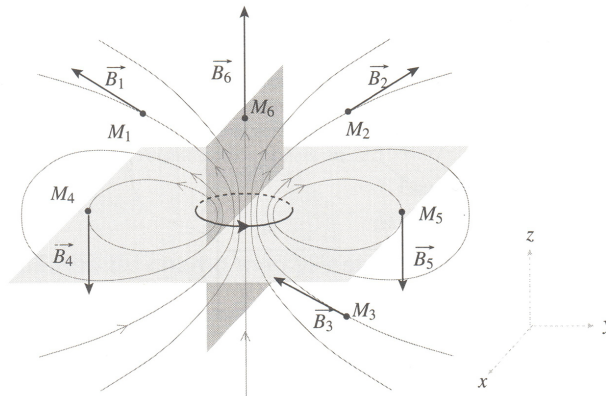
Un plan d'antisymétrie pour une distribution de courant Π_A (aussé noté Π^-) est un plan qui inverse le sens des courants de la distribution :



Ainsi pour un plan d'antisymétrie de la distribution de courants :

- ★ • si $M' = \text{Sym}_{\Pi_A}(M)$, $\vec{B}(M') = \text{Sym}_{\Pi_A}(\vec{B}(M))$;
- pour un point M'' appartenant au plan d'antisymétrie, le champ doit être son propre symétrique, c'est-à-dire que *le champ magnétique en un point d'un plan d'antisymétrie est contenu dans ce plan.*

Exercice : Sur l'exemple ci-dessous, retrouver les propriétés de symétrie et antisymétrie :



De même que pour le champ électrostatique, déterminer les symétries et antisymétries de la distribution de courants permet donc de déterminer la direction du champ magnétostatique.

III.2 Invariances

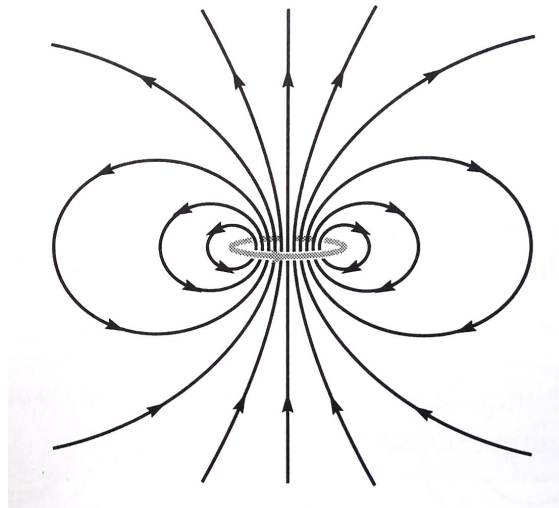
Tout comme pour le champ électrostatique, s'il existe une invariance par translation ou rotation de la distribution de courant, cela permet de supprimer la dépendance du champ magnétostatique par rapport à la variable associée.

IV Topographie du champ magnétostatique

IV.1 Comment représenter graphiquement le champ magnétique ?

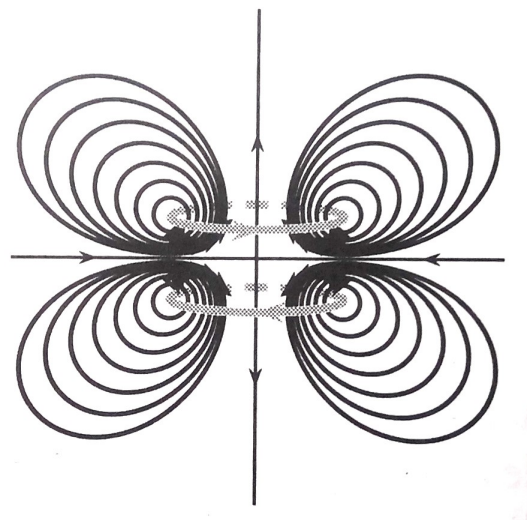
A nouveau, on représente les lignes de champ magnétique. On peut déterminer leurs équations via $\vec{B}(M) \wedge d\vec{r} = \vec{0}$.

Nous avons déjà vu, au début de ce chapitre, la carte du champ magnétostatique créé par une spire :



Le champ magnétostatique "s'enroule" autour de la spire, la règle de la main droite donnant le sens dans lequel le champ s'enroule (paume de la main selon le sens du courant positif, le pouce donnant alors le sens positif de $\vec{B}$).

Considérons un exemple avec plusieurs spires :



Quelques propriétés sont à noter :

- ★ • Si les lignes de champ s'enroulent autour d'une zone de l'espace, c'est qu'une source de champ magnétostatique (= un dipôle magnétostatique) s'y trouve.
- Les lignes de champ ne convergent pas et ne divergent pas vers un point.
- Les lignes de champ magnétique sont toujours bouclées sur elles-mêmes : *elles sont fermées*.

Nous allons désormais relier ces propriétés topographiques à des équations locales faisant intervenir les opérateurs différentiels.

IV.2 Equation de Maxwell-Thomson (= Maxwell-flux) (postulat)

De même que dans le chapitre EM2, nous allons construire la magnétostatique à partir de deux nouvelles équations locales de Maxwell, prises comme postulats de l'électromagnétisme.

Équation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson (aussi appelée équation de Maxwell-flux) s'écrit :



$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

Interprétations :

Comme pour toutes les grandeurs à divergence nulle, on retrouve les conséquences usuelles.

- Le champ $\vec{B}$ ne peut pas converger ou diverger vers un point : nécessairement, les ldc sont fermées.
 - $\vec{B}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire que le flux de $\vec{B}$ se conserve le long d'un tube de champ.
- Schéma et conclure que en odg, $B_1 S_1 \sim B_2 S_2$

Evolution de la norme de $\vec{B}$ sur une carte de champ

Le champ magnétique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent, c'est-à-dire là où les tubes de champs se rétrécissent.

IV.3 Equation de Maxwell-Ampère (postulat)

Voici la quatrième (et dernière) équation de Maxwell, aussi prise comme postulat de l'électromagnétisme :

Equation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :



$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec $\vec{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en A m^{-2}), $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide.

En magnétostatique, cette loi se simplifie en :



$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Interprétations :

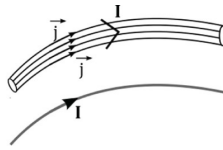
1. Cette loi relie le champ $\vec{B}$ à sa source : le vecteur densité de courant électrique. C'est donc elle qui permet (implicitement) de calculer le champ $\vec{B}$ créé par des courants.
2. Comme cette équation est linéaire, on peut utiliser le théorème de superposition pour déterminer le champ magnétique.
3. Le fait que $\vec{B}$ soit un vecteur antisymétrique par rapport à un plan de symétrie de la distribution de courants ou symétrique par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de courants est associé au fait que l'opérateur rot est un opérateur dit antisymétrique.
4. Sur une carte de champ, on repère une source de champ magnétostatique en déterminant la zone de l'espace autour de laquelle le champ $\vec{B}$ tourne. Le sens du moment magnétostatique est relié au sens de rotation de $\vec{B}$ autour de la source, via la règle de la main droite.

V Déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution de courants

Nous allons désormais, pour certaines distributions de courants assez simples (autrement dit, avec une forte symétrie), calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

V.1 Différents types de distributions de courants

De manière générale, on utilise une distribution volumique de courant, caractérisée par la connaissance du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. Néanmoins, si un conducteur possède deux dimensions très petites devant la dernière, on utilise une modélisation linéique, où la connaissance du courant I traversant le conducteur suffit. I est ici constant car on se place en régime stationnaire où $\vec{j}$ est à flux conservatif.



Cette modélisation n'est alors valable que si l'observateur ne se place pas trop près du conducteur.

V.2 Théorème d'Ampère

A partir de l'équation locale de Maxwell-Ampère, on peut déduire une loi intégrale (ou loi macroscopique).

D'après le théorème de Stokes-Ampère, avec (S) une surface quelconque s'appuyant sur le contour (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{V.1})$$

★

soit en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad (\text{V.2})$$

Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur champ magnétostatique le long d'une courbe **fermée orientée** (Γ) vaut:

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad (\text{V.3})$$

avec $I_{\text{enlacé}}$ l'intensité du courant enlacé par le contour (Γ) , comptée algébriquement suivant la règle de la main droite basée sur l'orientation du contour.

V.3 Utilisation du théorème d'Ampère pour déterminer un champ magnétique

a Méthode générale

Fiche-méthode : utilisation du théorème d'Ampère

1. on choisit un système de coordonnées adapté et on détermine éventuellement les différentes zones d'étude (= zones où on place un point M pour lequel on souhaite connaître l'expression du champ magnétique) : en particulier, le point peut être quelconque pour une distribution volumique, mais il ne peut pas se trouver sur la distribution surfacique ou linéique ;
2. on étudie les symétries pour déterminer la direction de $\vec{B}$;
3. on étudie les invariances pour éliminer la dépendance en certaines variables pour $\vec{B}$;
4. on choisit un contour d'Ampère **fermé et orienté**, et pour laquelle la circulation de $\vec{B}$ se calcule facilement. On souhaite donc que $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ soit nul, soit tel que le champ magnétique soit dans le sens de $d\vec{r}$ et de norme constante sur le contour : il

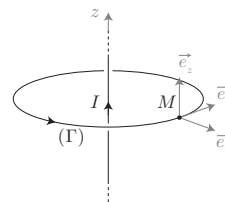
- sort de l'intégrale.
5. on applique alors le théorème d'Ampère.



Il est impératif de bien définir le contour d'Ampère fermé et orienté avant application du théorème.

b Exemple 1 : fil infini parcouru par un courant I constant

1. coordonnées cylindriques, l'axe (Oz) étant confondu avec le fil ; on étudie le champ magnétique en tout point à l'exclusion de l'axe (Oz) ;
2. *Prendre le temps d'évoquer le plan d'antisymétrie, et leur montrer qu'il ne sert à rien.* Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant : le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, soit $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$;
3. on observe que la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ ou translation selon l'axe (Oz) , donc on peut chercher $\vec{B}$ sous la forme $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$;
4. il paraît donc approprié de choisir comme contour d'Ampère un cercle de rayon r d'axe (Oz) , orienté dans le sens trigonométrique, de sorte que la norme du champ magnétique reste constante en chaque point du contour ;
5. on applique le théorème d'Ampère :



★

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I \iff B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{V.4})$$

On conclut donc que le champ créé par un fil infini s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta} \quad (\text{V.5})$$

On peut alors en déduire la carte de champ associée :

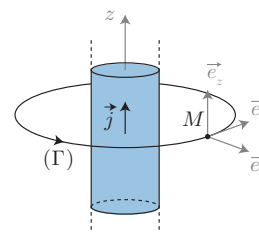
★

Schéma avec $\vec{e}_z$ sortant du plan, en représentant les ldc = cercles. Orienter I et en déduire l'orientation des ldc. Insister : $\vec{B}$ s'enroule autour de l'axe (Oz) , signe de la présence d'un courant, dont on trouve le sens avec la règle de la main droite.

c Exemple 2 : fil épais infini parcouru par un courant uniforme

Considérons un fil épais infini, de rayon a . Il est parcouru par un courant I de sorte que le vecteur densité de courant électrique soit uniforme et vaille $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$. Cette modélisation est appropriée si on veut exprimer le champ magnétique au voisinage de l'axe du fil.

1. On utilise les coordonnées cylindriques, en distinguant les cas $r \leq a$ et $r \geq a$.
2. et 3. L'étude des invariances et symétries sont parfaitement identiques au cas du fil infini infiniment fin, donc on recherche le champ sous la forme $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.
4. On utilise un contour d'Ampère circulaire de rayon r , centré sur l'axe (Oz) et orienté dans le sens trigonométrique.



Exercice : Déterminer l'expression du champ magnétique partout dans l'espace.

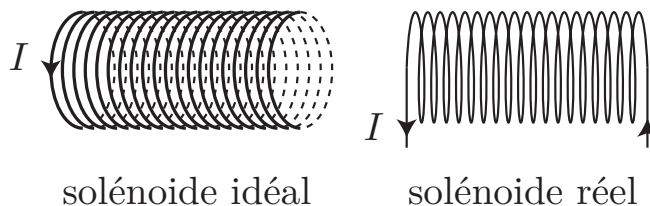
- pour $r \geq a$, $\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)2\pi r = \mu_0 I$ donc $\vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ (résultat identique au fil infiniment fin) ;
- pour $r \leq a$, $\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2}$, soit

$$\vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta \quad (\text{V.6})$$

Tracer le graphe et conclure sur la continuité du champ en $r = a$.

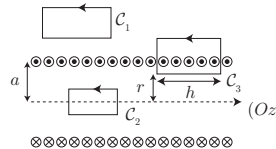
d Exemple 3 : solénoïde infini

Dans le cas idéal, on considère qu'un solénoïde infini (ou une bobine longue) est constituée d'une infinité de spires circulaires, de même axe, de même rayon a , parcourues par le même courant I et réparties régulièrement à raison de n spires par unité de longueur du solénoïde (densité linéique).



En pratique, on se rapproche du solénoïde infini en réalisant un enroulement hélicoïdal de très faible pas (on parle de "spires jointives") et en réalisant les spires sur une longueur totale L grande devant le rayon a . On étudie alors le champ magnétique loin des bords du solénoïde.

- coordonnées cylindriques et on distingue $r < a$ et $r > a$
- pour un point M quelconque, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan, donc dirigé selon $\vec{e}_z$.
- du fait de l'invariance par rotation d'angle θ et par translation selon $\vec{e}_z$, $\vec{B}$ ne dépend que de r : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$
- Contour d'Ampère rectangulaire (avec deux bords parallèles à $\vec{e}_z$), à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.
- On admet alors que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. En utilisant le contour (C_3) à cheval entre l'intérieur et l'extérieur de la bobine, dont le bord inférieur est à une distance r de l'axe :



$$B(r) \times h - 0 = \mu_0 (nh) I \quad (\text{V.7})$$

Donc le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini est uniforme et vaut :

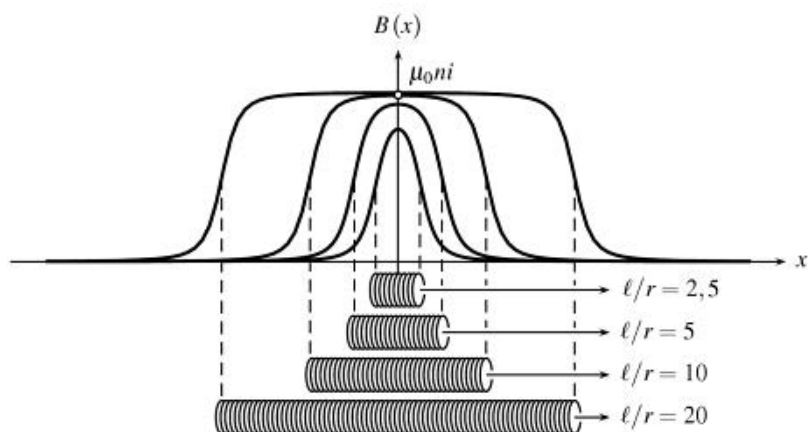
$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z} \quad (\text{V.8})$$

Les lignes de champ sont donc horizontales, parallèles entre elles.

Remarque : Si on avait choisi le même contour d'Ampère rectangulaire placé intégralement à l'intérieur du solénoïde infini, comme $I_{\text{enlacé}} = 0$, on aurait montré que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Mais, on n'aurait pas pu trouver la valeur de ce champ avec ce seul contour d'Ampère.

Sur la courbe ci-après, on illustre l'influence, sur une bobine de longueur finie, des effets de bords. Comme attendu, plus le rapport rayon sur longueur R/L est petit, plus la bobine se comporte

comme un solénoïde idéal.



L'intérêt d'un tel système est de pouvoir produire un champ magnétique uniforme dans une zone de l'espace, et pouvant être relativement intense si on superpose plusieurs couches de spires.

Exercices

Ex. 1 (D'après écrit CCINP MP 2025) Éléments magnétiques du synchrotron SOLEIL

Un synchrotron est un instrument électromagnétique de grande taille destiné à l'accélération de particules chargées. Dans le synchrotron SOLEIL, situé à Saclay, des électrons, de masse notée m_e et de charge $-e$, accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière, sont déviés par des champs magnétiques.

On s'intéresse tout d'abord à l'action d'un dispositif, appelé dipôle magnétique, sur un électron. Un dipôle crée un champ magnétique vertical supposé uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$, avec $B_0 > 0$. On suppose que ce dipôle est en fait un solénoïde d'axe (Oy) , constitué de N spires de rayon a , régulièrement réparties sur une longueur $L \gg a$. Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité I constante.

1. Montrer tout d'abord que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme.
2. On suppose que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde s'écrit $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$, avec B_0 une constante que l'on exprimera, entre autres, en fonction de I .

On considère pour la suite une base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

3. On considère un électron non relativiste pénétrant avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$, avec $v_0 > 0$, dans une zone où règne le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$. Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique E_c de l'électron se conserve. Par la suite, on notera v_0 la norme constante de la vitesse de l'électron et p_0 la norme constante de la quantité de mouvement de l'électron.
4. En admettant que la trajectoire est circulaire de rayon R_B , exprimer la pulsation de rotation ω_B de l'électron sur sa trajectoire et montrer que :

$$B_0 = \frac{p_0}{eR_B} \quad (\text{Ex.1})$$

5. En pratique, dans un synchrotron, les électrons sont relativistes. La relation (Ex.1) reste valable dans le cadre de la relativité restreinte, avec une norme de la quantité de mouvement voisine de $p_0 \simeq \frac{E_c}{c}$. Calculer la valeur du champ magnétique permettant d'obtenir un rayon $R_B = 5.4 \text{ m}$ pour la trajectoire. On précise que dans l'anneau de stockage $E_c = 2.7 \text{ GeV}$.

Les inhomogénéités de vitesse du paquet d'électrons entraînent une divergence du faisceau d'électrons, qui doit donc être focalisé. On utilise pour cela des quadrupôles, composés de quatre bobines disposées en carré (figure 2).



Figure 2a) Quadrupôle, d'après Reflets de la physique n° 34

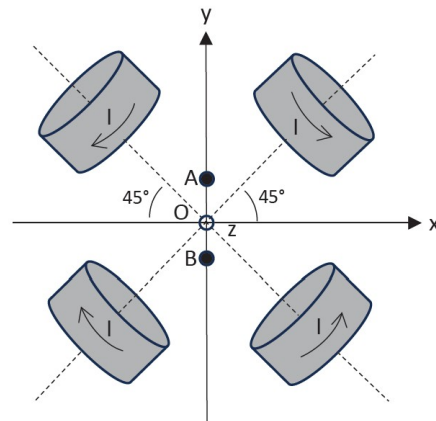


Figure 2b) Schématisation des distributions de courants (en pointillés les axes des bobines ; les flèches donnent le sens des courants)

6. En justifiant les réponses :
 - (a) Expliquer pourquoi le champ en un point du plan (xOy) de la figure 2b est contenu dans ce plan.
 - (b) Donner la direction et le sens du champ au voisinage de l'origine :
 - sur l'axe (Ox) ;
 - sur l'axe (Oy) .

(c) Donner la valeur du champ à l'origine des coordonnées.

Le champ magnétique créé par les quatre bobines peut s'écrire au voisinage de l'origine :

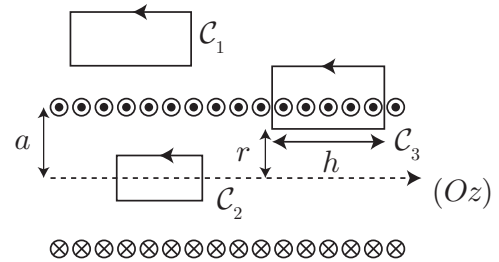
$$\vec{B} = Ky\vec{e}_x + Kx\vec{e}_y \quad \text{avec} \quad K = \text{cste} > 0$$

7. On considère un faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$, possédant une faible extension Δy autour de l'origine. Sur un schéma, représenter le champ magnétique et la force exercée sur un électron aux points $A(0, \Delta y/2, 0)$ et $B(0, -\Delta y/2, 0)$ (figure 2b). En déduire que le faisceau est refocalisé au voisinage de l'origine grâce au quadrupôle.

Le dispositif magnétique est complété par un sextupôle non étudié servant à corriger la trajectoire du faisceau électronique.

Correction de l'exercice 1

- Coordonnées cylindriques d'axe (Oy) et on distingue $r < a$ et $r > a$
- Pour un point M quelconque, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} = B(r, \theta, y)\vec{e}_y$.
- Du fait de l'invariance par rotation d'angle θ et par translation selon $\vec{e}_y$: $\vec{B} = B(r)\vec{e}_y$



- Contour d'Ampère fermé et orienté : voir contour (C_2) sur le schéma. (Il faudrait aussi indiquer la longueur h du contour selon (Oy) et indiquer les distances r et r^* entre les portions du contour parallèles à Oy et cet axe Oy .)
 - Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C_2)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \Rightarrow B(r)h - B(r^*)h = 0 \Rightarrow B(r) = B(r^*)$$

Ceci étant vrai quels que soient r et r^* dans le solénoïde, on en déduit que $\vec{B} = B_0\vec{e}_y$ est uniforme dans le solénoïde.

- Contour d'Ampère fermé et orienté : voir contour (C_3) sur le schéma.
 - Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C_3)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \Rightarrow B_0 h = \mu_0 (nh) I \quad \text{avec} \quad \text{la densité linéique de spires } n = \frac{N}{L}$$

Ainsi, on conclut que $\vec{B} = B_0\vec{e}_y$ avec $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{L}$.

- Système : {Electron}
 - Référentiel du laboratoire galiléen

La puissance de la composante magnétique de la force de Lorentz est $P(\vec{F}_m) = (-e\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$.
L'application du théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_m) = 0$$

car la seule force s'appliquant sur l'électron est la force de Lorentz magnétique. Donc, l'énergie cinétique est une constante du mouvement, et la norme v_0 de la vitesse se conserve.

- La trajectoire étant circulaire, on travaille avec des coordonnées polaires de centre O . On a :

$$\overrightarrow{OM} = R_B \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R_B \omega_B \vec{e}_\theta = v_0 \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -R_B \omega_B^2 \vec{e}_r$$

avec $\omega_B = \frac{v_0}{R_B}$ la pulsation de rotation constante.

On applique le PFD :

$$m_e \vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow -m_e R_B \omega_B^2 \vec{e}_r = -e R_B \omega_B B_0 \vec{e}_r$$

En projetant sur $\vec{e}_r$, on en déduit que

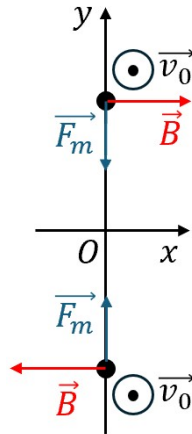
$$\omega_B = \frac{eB_0}{m_e}$$

appelée pulsation cyclotron. On en déduit aussi que

$$B_0 = \frac{m_e \omega_B}{e} = \frac{m_e v_0}{e R_B} = \frac{p_0}{e R_B}$$

5. On a $B_0 = \frac{E_c}{e R_{BC}}$. A.N. : $B_0 = 1.7 \text{ T}$, ce qui est un champ relativement intense à créer, surtout sur une aussi grande zone de l'espace. Mais ceci est réalisable expérimentalement.

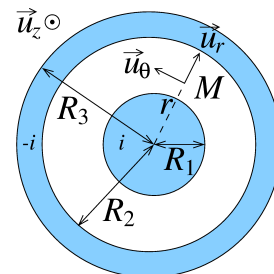
6. (a)  On n'attend pas une étude avec un point M quelconque de l'espace : on doit considérer un point M dans la zone de l'espace où on cherche le champ $\vec{B}$.
Soit un point M quelconque du plan xOy . Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Donc, $\vec{B}$ appartient au plan xOy .
- (b) • Soit M un point de l'axe (Ox) . Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}(M \in (Ox)) = B(x)\vec{e}_y$.
On détermine le sens du champ $\vec{B}$ au voisinage de l'origine grâce à la règle de la main droite. Pour $x > 0$, $\vec{B}$ est selon $+\vec{e}_y$. Pour $x < 0$, $\vec{B}$ est selon $-\vec{e}_y$.
• Soit M un point de l'axe (Oy) . Le plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}(M \in (Oy)) = B(y)\vec{e}_x$.
Avec la règle de la main droite, pour $y > 0$, $\vec{B}$ est selon $+\vec{e}_x$; pour $y < 0$, $\vec{B}$ est selon $-\vec{e}_x$.
- (c) Les plans xOz et yOz sont des plans de symétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}(O) = \vec{0}$.



7.

Ex. 2 Câble coaxial en statique

On considère un câble coaxial infini, cylindrique, d'axe Oz . Le courant d'intensité i passe dans un sens dans le conducteur intérieur, un cylindre plein de rayon R_1 , et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.



1. Déterminer la direction de $\vec{B}$ et les coordonnées dont il dépend pour un point $M(r, \theta, z)$ quelconque.
2. Déterminer les vecteurs densités de courant $\vec{j}_i$ et $\vec{j}_e$ dans les conducteurs intérieurs et extérieurs, en supposant qu'ils sont uniformes dans chacun des conducteurs. Préciser l'unité de ces vecteurs densités de courant.
3. Déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en fonction de μ_0 , i , r , R_1 , R_2 et R_3 suivant que M est dans le conducteur intérieur, entre les conducteurs, dans le conducteur extérieur ou à l'extérieur du câble.
4. Tracer le graphe $B(r)$.

Correction de l'exercice 2

1. Invariance par rotation d'angle θ , translation selon $\vec{e}_z$, et plan de symétrie de la distribution $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, donc on cherche $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.
2. Dans le conducteur intérieur, étant donné le courant d'intensité i , on doit vérifier :

$$\iint (S_1) \vec{j}_i \cdot d\vec{S} = i \iff \vec{j}_i = \frac{i}{\pi R_1^2} \vec{e}_z \quad (\text{Ex.2})$$

en calculant le flux de $\vec{j}_i$ sur le disque de rayon R_1 , en supposant que $\vec{j}_i$ est uniforme sur une section du conducteur. De la même façon, en calculant le flux à travers le conducteur extérieur :

$$\vec{j}_e = -\frac{i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z \quad (\text{Ex.3})$$

3. Du fait de la forme de $\vec{B}$, on va appliquer le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r , de centre passant par l'axe $(O, \vec{e}_z)$, orienté dans le sens trigonométrique. Distinguons les quatre cas :

- si $r \leq R_1$, $B(r)2\pi r = \mu_0 j_i \pi r^2$, donc $B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$;
- si $R_1 \leq r \leq R_2$, $B(r)2\pi r = \mu_0 i$ donc $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (continuité en R_1) ;
- si $R_2 \leq r \leq R_3$, $B(r)2\pi r = \mu_0 i - \mu_0 j_e (\pi r^2 - \pi R_2^2)$, soit

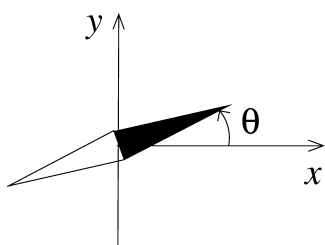
$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = \frac{\mu_0 i (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)} \quad (\text{Ex.4})$$

- et enfin pour $r \geq R_3$, $B(r) = 0$ car le courant enlacé est nul.

4. Graphe non fait, allure assez facile à trouver, avec continuité du champ.

Ex. 3 Mouvements d'une boussole

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page³



Sur une paillasse de laboratoire, une boussole assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$ est libre de tourner autour de l'axe vertical $\Delta = (Oz)$. La direction du moment dipolaire est confondue avec l'axe de symétrie de la boussole. La liaison avec l'axe est de type « pivot parfait » sans frottement. On note J son moment d'inertie par rapport à Δ .

La boussole est plongée dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$, les frottements sont négligés.

On rappelle que le moment de force s'exerçant sur $\vec{m}$ est : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

1. Déterminer les positions d'équilibre de la boussole.
2. Déterminer l'équation différentielle portant sur l'angle θ .
3. Dans un premier temps, on étudie les petits mouvements de la boussole, ce qui revient à supposer que $|\theta| \ll 1$.

Donner l'expression de $\theta(t)$ en notant θ_0 la valeur initiale de l'angle et en supposant que $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ rad s}^{-1}$.

4. On libère désormais la boussole sans vitesse angulaire initiale, alors qu'elle fait un angle droit avec la direction du champ.

- (a) Déterminer l'intégrale première du mouvement et la mettre sous la forme

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + f(\theta) = \text{cste}$$

et donner l'expression de la fonction $f(\theta)$ et de la constante.

- (b) En déduire la plus grande valeur de vitesse angulaire de la boussole.

5. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un moment magnétique $\vec{m}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Retrouver l'intégrale première du mouvement en utilisant une méthode énergétique.

Correction de l'exercice 3

- Système : {Boussole}
- Référentiel du laboratoire galiléen

1. A l'équilibre, la somme des moments de force est nulle, soit ici $\vec{\Gamma} = \vec{0}$. Donc, $\vec{m}$ est colinéaire à $\vec{B}$: les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
2. TMC par rapport à l'axe fixe (Δ) :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = -\|\vec{m}\| B \sin(\theta)$$

en faisant particulièrement attention au fait que :

- on étudie un solide et non une masse ponctuelle, donc $L_{\Delta} = J\dot{\theta}$ et non $\vec{L}_{\Delta} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$
- pour calculer $\vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$, on peut soit décomposer $\vec{m}$ dans la base cartésienne, soit utiliser la formule générale de calcul d'un produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pm \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin(\theta) \vec{c}$ avec $\vec{c}$ un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (on détermine le signe via la main droite).

3. Approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{\|\vec{m}\| B}{J} \theta(t) = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\|\vec{m}\| B}{J}}$. La solution générale s'écrit

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes que l'on détermine avec les conditions initiales. On obtient ainsi $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

Remarque : Cette solution devient invalide si θ_0 n'est pas très petit devant 1 rad, comme à la question suivante.

4. (a) Pour déterminer l'intégrale première du mouvement, on multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$, puis on cherche une primitive :

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} + \|\vec{m}\| B \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \|\vec{m}\| B \cos(\theta) = \text{cste}$$

soit le résultat de l'énoncé avec $f(\theta) = -\frac{\|\vec{m}\| B}{J} \cos(\theta)$. On détermine la constante avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \pi/2$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. On a $\text{cste} = 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{\|\vec{m}\| B}{J} \cos(\theta) = 0$$

- (b) On en déduit que la plus grande valeur de vitesse angulaire sera atteinte en $\theta = 0$, et on a $\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2\|\vec{m}\| B}{J}}$.

Remarque : Je vous conseille de vous rappeler qu'une intégrale première du mouvement permet d'avoir des informations sur le mouvement d'un système, alors même que l'équation différentielle associée est non linéaire.

5. Le système n'est soumis qu'à une seule action conservative, ainsi l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = \text{cste} = E_c + E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \|\vec{m}\| B \cos(\theta)$$

On retrouve l'intégrale première du mouvement via la conservation de l'énergie mécanique.

Ex. 4 Cylindre chargé en rotation

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁴

Un cylindre d'axe Oz , de longueur ℓ et de rayon a est uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ uniforme. Le cylindre est en rotation uniforme avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$ constante autour de son axe dans le référentiel du laboratoire.

On suppose que le champ magnétique est nul à l'extérieur du cylindre.

Déterminer le champ magnétique créé par le cylindre pour un point M à l'intérieur du cylindre, en supposant $\ell \gg a$.

Correction de l'exercice 4

La situation physique est similaire à une infinité de bobines imbriquées les unes dans les autres. En effet, la rotation uniforme du cylindre chargé uniformément est à l'origine d'un courant orthoradial. En effet, chaque porteur de charge distant de r de l'axe $(O, \vec{e}_z)$ possède une vitesse $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$. Ainsi le vecteur densité volumique de courant vaut :

$$\vec{j} = \rho r \omega \vec{e}_\theta \quad (\text{Ex.5})$$

Ainsi, par analogie avec un solénoïde, on cherche un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$, et on suppose que le champ magnétique extérieur (dont on peut montrer qu'il est uniforme), est nul. Ainsi on prend un contour d'Ampère rectangulaire de longueur h , dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ à cheval entre l'extérieur et l'intérieur (distant de r de l'axe). Ainsi en appliquant le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)h = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 h \int_r^a \rho r \omega dr = \mu_0 h \rho \omega \frac{1}{2}(a^2 - r^2) \quad (\text{Ex.6})$$

d'où le champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq a) = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega (a^2 - r^2) \vec{e}_z \quad (\text{Ex.7})$$

Ex. 5 Longueurs d'onde des raies d'émission de l'atome d'hydrogène

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁵

On s'intéresse au mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène. On appelle O la position du proton et on considère que le référentiel du proton est galiléen. On donne les valeurs de constantes fondamentales :

- Constante de Planck : $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s
- Masse d'un électron : $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

1. Justifier que le mouvement de l'électron est plan.

Dans la suite, on utilise les coordonnées polaires de centre O . On s'intéresse au modèle de Bohr.

2. Montrer que l'électron ne peut se trouver que sur des orbites de rayon $r = a_0 \times n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre quantique principal et $a_0 = 0.5 \times 10^{-10}$ m une constante appelée le rayon de Bohr dont on donnera l'expression.
3. En déduire alors que l'énergie mécanique de l'électron vaut :

$$E = -\frac{R_y}{n^2} \quad \text{avec} \quad R_y = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 13.6 \text{ eV}$$

une constante appelée la constante de Rydberg.

4. On rappelle que l'énergie associée à un photon de fréquence ν s'écrit, d'après la loi de Planck-Einstein (à connaître) : $E = h\nu$. Déterminer alors l'énergie du photon en fonction de sa longueur d'onde λ . En déduire la longueur d'onde du photon émis lors de la désexcitation d'un électron de l'orbite n vers l'orbite p (n et p sont les nombres quantiques principaux des deux orbites).
5. On se propose de vérifier expérimentalement la relation obtenue. On obtient, par spectroscopie (goniomètre à réseau par exemple), les longueurs d'onde de la série de Lyman de l'hydrogène (dans cette série, toutes les désexcitations d'électrons se font avec une arrivée dans l'orbite $n = 1$).

Orbite de départ	2	3	4	5	6
Longueur d'onde (nm)	122	103	97.3	95.0	93.8

Vérifier la relation obtenue précédemment.

Correction de l'exercice 5

Correction de la Q.1 ci-dessous, et du reste des questions dans un corrigé manuscrit à la fin du document.

- Système : {électron}

- Référentiel du proton galiléen
- Coordonnées polaires de centre O

1. On étudie un mouvement à force centrale, on applique donc le raisonnement habituel (cf. mécanique céleste). TMC au point O :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \text{cste}$ se conserve au cours du mouvement. Ainsi, $\vec{OM}$ est continuellement orthogonal au vecteur $\vec{L}_0$: la trajectoire est contenue dans le plan orthogonal à $\vec{L}_0$ et passant par O .

Ex. 6 (Ecrit E3A-Polytech PSI 2020) Champ magnétique créé par une bobine plate

On s'intéresse au cas d'une « bobine plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution (Oz) et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourue par un courant stationnaire I . On s'intéresse à un point M de l'axe (Oz), de cote $z > 0$.



1. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .
2. Que peut-on dire du plan $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

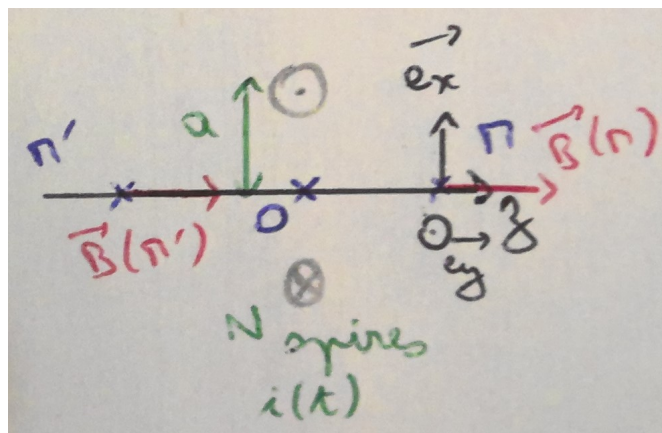
On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine plate au point M :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,max}/2$, en fonction de a .

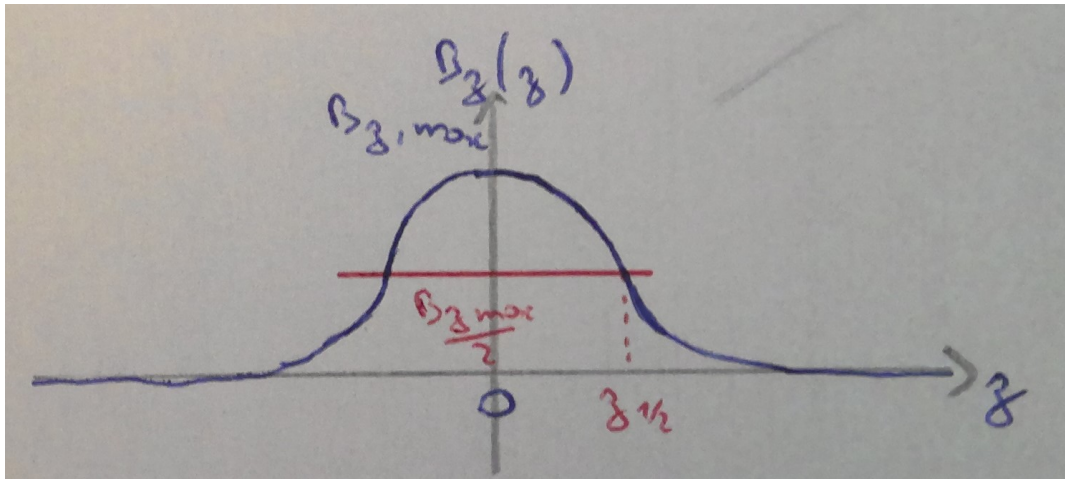
Correction de l'exercice 6

1. Attention, cette question s'intéresse au champ magnétique exclusivement sur l'axe (Oz). On ne considère donc pas les plans passant par un point M quelconque.



Pour un point M sur l'axe (Oz), les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courants. Donc, $\boxed{\vec{B}(M, t) = B(M, t) \vec{e}_z}$.

2. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. Donc, $\vec{B}$ est antisymétrique par rapport au plan $z = 0$. Comme $\vec{B}$ est dirigé selon $\vec{e}_z$, $\boxed{B_z(-z) = B_z(z)}$ (cf. schéma).



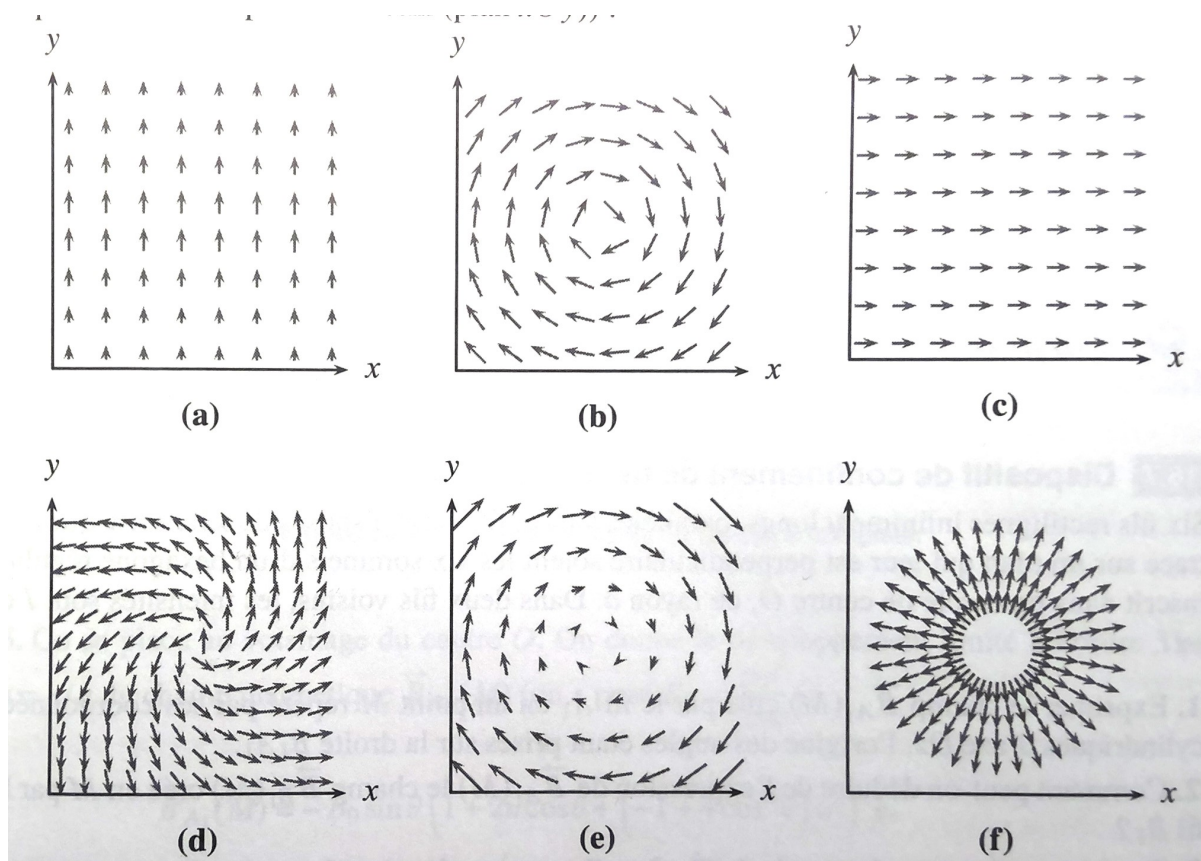
3. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$: $B_{z,max} = B_z(0) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$.
- La position $z_{1/2}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2a} \\ \Rightarrow (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2} &= 2a^3 \\ \Rightarrow z_{1/2} &= a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0.77a \end{aligned}$$

Le champ magnétique décroît donc très vite dès qu'on s'éloigne des spires.

Ex. 7 Topographie du champ magnétostatique

Parmi les six cartes de champ ci-dessous, déterminer les trois qui correspondent à un champ magnétostatique. Pour ces trois cartes de champ magnétostatique, indiquer si des courants sont présents dans la région cartographiée et, si oui, préciser leur sens.



Correction de l'exercice 7

Cartes de champ magnétostatique

Pour vérifier si un champ peut être magnétostatique, il faut vérifier si $\text{div}(\vec{B}) = 0$ (équation de Maxwell-Thomson). (En effet, l'équation de Maxwell-Ampère n'impose pas la valeur de $\text{rot}(\vec{B})$.)

Il est clair que les cartes (d) et (f) ne sont pas des cartes de champ magnétostatique, car au centre, le champ diverge ($\text{div}(\vec{B}) > 0$). La troisième carte non magnétostatique est la (a). On peut le justifier de deux manières :

- en plaçant un volume élémentaire sur la partie basse de la carte, on remarque que le champ a tendance à sortir de ce volume : $\text{div}(\vec{B}) > 0$. Si on place le volume élémentaire en haut de la carte, le champ a tendance à converger vers ce volume : $\text{div}(\vec{B}) < 0$.
- On est dans le cas cartésien où $\vec{B} = B(y)\vec{e}_y$. Donc, $\text{div}(\vec{B}) = \frac{dB}{dy}$ qui n'est pas nul, vu que B croît puis décroît avec y .

Les trois cartes de champ magnétostatique sont donc les cartes (b), (c) et (e).

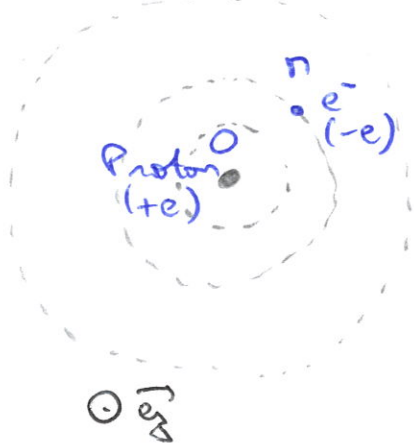
Présence de courants

On détermine la présence de courants grâce à l'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$.

- Carte (c) Le champ est uniforme : $\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$. Aucun courant n'est présent dans la zone cartographiée.
- Carte (b) Le champ tourne autour du centre, signe de la présence de courants. Avec la règle de la main droite, on détermine que le courant rentre dans la feuille ici.
- Carte (e) Raisonnement identique à celui fait en (b).

CORRIGÉ - Longueurs d'onde de raies d'émission de l'atome d'hydrogène

Modèle de Bohr:



Système: {électron n } (masse m)

Référentiel du proton, supposé galiléen

Hypothèses du modèle de Bohr:

- trajectoire circulaire de rayon r
- quantification du moment cinétique:

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \wedge m \vec{v} = n \hbar \vec{e}_\theta, n \in \mathbb{N}^*$$

1) On se place en coordonnées cylindriques.

$$\begin{cases} \vec{OP} = r \vec{e}_r \\ \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta \\ \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Principe fondamental de la dynamique:

$$m \vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \text{sur } \vec{e}_\theta: \ddot{\theta} = 0 \\ \text{sur } \vec{e}_r: m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases} \quad (A)$$

On veut faire intervenir le nombre quantique principal: on utilise la condition de quantification de Bohr:

$$\vec{L}_0 = m r v \vec{e}_\theta = n \hbar \vec{e}_\theta \Rightarrow v = \frac{n \hbar}{m r} \quad (B)$$

$$(A) \Rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{m r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \times n^2 \quad (C)$$

$\underbrace{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}}_{= a_0}$

Avec $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, on trouve $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ne pas savoir par cœur
 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

2) On en déduit :

$$E = E_c + E_p \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} E_p$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_p}{2}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$(c) \Rightarrow -\frac{m e^4}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{Q}{n}\right)^2 \times 8\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 Q^2} \times \frac{1}{n^2}}$$

$$= R_{Hy}$$

A.N: $R_{Hy} = 14 \text{ eV} (= 13,6 \text{ eV})$

3) Pour un photon se propageant à la vitesse c :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\text{Donc : } E_{\text{photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Lors de la désexcitation d'un électron (perte d'énergie, donc $n > n'$), l'énergie perdue est intégralement transférée au photon : $E_{\text{photon}} = E_n - E_{n'} = R_{Hy} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

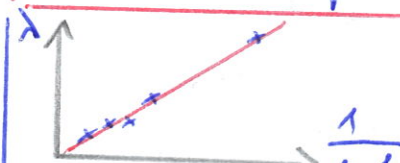
R_{Hy} : En fait, il n'y a pas besoin de transmettre strictement toute l'énergie au photon (mais c'est la situation la plus probable.).

$$\text{Donc : } \frac{hc}{\lambda} = R_{Hy} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{hc}{R_{Hy}} \times \frac{1}{\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}}}$$

4) Pour la série de Lyman :

$$n=1 \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{R_{Hy}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

On trace λ en fonction de $\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$



Les points sont bien alignés avec $n^2 = 0,9999$

$\Rightarrow$ valide la loi linéaire. 2

R_g: Le coefficient α ne suffit pas à valider la loi:
représente la répartition de points en +.

On peut vérifier la valeur du coefficient directement:

$$\left(\frac{R_c}{R_g}\right)_{\text{théorique}} = 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad \Delta \text{ Passer à } R_g \text{ en } \underline{\underline{\text{Joule!}}}$$

$$\left(\frac{R_c}{R_g}\right)_{\text{exp}} = 92,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Les 2 valeurs diffèrent de 1,3%, ce qui tend à valider
la loi.