

ARQS magnétique et induction

Sommaire

I	Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)	2
I.1	Quel est le problème ?	2
I.2	Cadre général de l'ARQS	2
I.3	ARQS magnétique	2
II	Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire : exemple des rails de Laplace générateurs	4
II.1	Raisonnement qualitatif avec la loi de Lenz	4
II.2	Raisonnement quantitatif	4
III	Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps	6
III.1	Auto-induction	6
III.2	Energie magnétique dans le cas du solénoïde long	7
III.3	Induction mutuelle	8

Questions de cours

- Notion d'approximation des régimes quasi-stationnaires, avec le cas particulier de l'ARQS magnétique. Conséquences.
- Solénoïde long : citer l'expression du champ magnétique créé en ARQS magnétique, démontrer l'expression de l'inductance propre et en déduire la densité volumique d'énergie magnétique.

- ★ *Prise de notes* : Leur demander de citer des exemples d'applications de l'induction dans la vie quotidienne (brosse à dents élec, plaque à induction, détection des voitures sur les parkings, puces anti-vol, badge d'accès au lycée et au self...). La plaque à induction diffère du cas traité en sup' : il n'y a pas de circuit élec filiforme. Mais, on va réussir à la traiter avec le formalisme de spé, vu qu'on a introduit le vecteur densité de courant.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Revoir les notions d'inductance propre et d'inductance mutuelle de sup', en faisant le lien avec les équations de Maxwell.
2. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique sur l'exemple du solénoïde long.

I Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

I.1 Quel est le problème ?

Prise de notes : Pour déterminer la force électromotrice e induite dans un circuit électrique du fait du champ magnétique, on souhaite utiliser la loi de Faraday :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

- ★ Il nous faut donc connaître l'expression du champ magnétique. Or, ce champ magnétique dépend de $\vec{j}$ et de $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Donc, il nous faudrait déjà connaître $\vec{E}$ pour en déduire $\vec{B}$... On ne sait donc pas traiter facilement le couplage électromagnétique. On va se placer dans certaines hypothèses où ce couplage est bien plus simple à étudier (en sup', vous avez tout fait sous certaines hypothèses, mais on ne vous les a pas dites !).

I.2 Cadre général de l'ARQS

L'approximation générale des régimes quasi-stationnaires consiste à pouvoir négliger la durée de propagation des phénomènes électromagnétiques d'un point à l'autre d'un système devant tous les temps d'évolution caractéristiques du système (période, temps de relaxation,...). Cela signifie que les phénomènes de propagation des signaux sont imperceptibles à l'échelle du système, et donc que toute modification d'une grandeur en un point quelconque du système est instantanément perçue en tout autre point du système.

Considérons un dispositif de taille caractéristique a , source d'un champ électromagnétique où T est la période temporelle des signaux (temps caractéristique de variation des grandeurs). En notant c la célérité des ondes électromagnétiques, cela revient à la condition :

$$\tau_{\text{propag}} = \frac{a}{c} \ll T \iff a \ll cT = \lambda \quad (\text{I.1})$$

Ordre de grandeur : Pour un circuit électrique typique :

★
$$a \sim 1 \text{ m} \Rightarrow f \ll \frac{c}{a} \sim 10^8 \text{ Hz}$$

Donc, ARQS validée dans les circuits usuels de TP !

I.3 ARQS magnétique

a Énoncé

On souhaite pouvoir déterminer $\vec{B}$ facilement, et à partir de $\vec{B}$, on en déduira $\vec{E}$ avec la loi de Faraday. On souhaite donc que le champ $\vec{B}$ ne soit pas "directement" influencé par $\vec{E}$. Cela

revient à négliger $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\vec{j}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Voyons ce que cela implique :

$$\star \quad \frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} \sim \frac{\varepsilon_0 E}{jT} \underbrace{\sim}_{(MG) \frac{E}{a} \sim \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \frac{\varepsilon_0 \rho a}{\varepsilon_0 jT} \sim \frac{\rho c}{j} \times \frac{a}{cT}$$

ARQS magnétique

- ★ L'ARQS magnétique reprend l'hypothèse générale de l'ARQS, à savoir $a \ll \lambda = cT$, auquel on ajoute l'hypothèse que la distribution de courant prédomine "devant la distribution de charges", à savoir $\left\| \vec{j} \right\| \gg \rho c$.

En ordres de grandeurs, les deux hypothèses de l'ARQS magnétique impliquent que :

- $\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{j} \right\|$: on peut simplifier l'équation de Maxwell-Ampère en : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.
- On peut également comparer les ordres de grandeurs des champs électriques et magnétiques :

$$(MA) \Rightarrow \frac{B}{a} \sim \mu_0 j$$

$$\frac{cB}{E} \sim \frac{c\mu_0 j a \varepsilon_0}{\rho a} \sim \frac{j}{\rho c} \gg 1 \Rightarrow E \ll cB$$

b Conséquences

Simplification des équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique

Si les hypothèses de l'ARQS magnétique sont valables, alors les équations de Maxwell se ré-écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- ★ Ainsi dans l'ARQS magnétique, le champ magnétique est le même que dans le cas statique (théorème d'Ampère de EM3 valable) en substituant $\vec{j}(M)$ ou I par $\vec{j}(M,t)$ ou $i(t)$. Il existe un champ électrique dont l'importance énergétique sera faible, mais qui est à l'origine des phénomènes inductifs.

Simplification de l'équation de conservation de la charge en ARQS magnétique

Comme

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0 = \mu_0 \text{div} \vec{j}$$

- ★ , on en déduit que $\vec{j}$ est à flux conservatif : la loi des nœuds reste valable en ARQS magnétique.

En pratique, c'est dans l'ARQS magnétique que l'on se place pour étudier l'ensemble des phénomènes d'induction (couplage entre bobines, transformateur, moteurs, freinage ou chauffage par induction, etc.). En effet, l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangée par rapport au cas général, donc la loi de Faraday est valable :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M,t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_{mag}}{dt} \quad (I.2)$$

Remarque : Notons que le champ magnétique "inducteur" étant à l'origine d'un champ électrique induit, dans le cadre d'un conducteur ce dernier est donc source d'un courant induit, lui-même source d'un champ magnétique induit. Selon les cas, on pourra ou non négliger son influence par rapport au champ magnétique inducteur.

Dans la suite, nous supposons l'ARQS magnétique vérifié et nous allons revoir et compléter l'étude des phénomènes d'induction réalisée en première année. Les études quantitatives seront donc menées sur des circuits électriques filiformes.

II Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire : exemple des rails de Laplace générateurs

Une tige conductrice de longueur a et de masse m est posée sur des rails électriques, permettant de former un circuit électrique fermé. On suppose que le circuit possède une même résistance R quelque que soit la position de la tige. La tige possède uniquement un mouvement de translation selon $\vec{e}_y$.



On plonge l'ensemble du dispositif dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Un opérateur extérieur exerce une force constante $\vec{f}_{op} = f_{op} \vec{e}_y$.

II.1 Raisonnement qualitatif avec la loi de Lenz

Faire les rectangles qu'on relie de cause à conséquence.

- Force $\vec{f}_{op}$
 - Mise en mouvement de la tige
 - Flux magnétique variable
 - fem induite
 - Apparition de courants induits car le circuit est fermé
 - Force de Laplace, qui s'oppose d'après la loi de Lenz à $\vec{f}_{op}$, cause qui lui a donné naissance
- ★

II.2 Raisonnement quantitatif

a Fiche-méthode sur l'utilisation de la loi de Faraday

Loi de Faraday : fiche-méthode

1. Orienter arbitrairement (ou en suivant les données de l'énoncé) le sens du courant i dans le circuit.
2. Calculer le flux Φ_{mag} du champ magnétique à travers le circuit, en orientant $\vec{dS}$ avec la règle de la main droite (par rapport au sens de i choisi précédemment).
3. Calculer alors $e = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$. Représenter systématiquement la force électromotrice e sur un schéma électrique, en respectant la convention générateur par rapport à i .

Les orientations de e et de $\vec{dS}$ ne peuvent donc pas être choisies indépendamment l'une de l'autre ! Ceci vient de la loi de Faraday



$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

où $\vec{dS}$ est orienté selon l'orientation du contour (Γ) . Ici, c'est donc le sens de i qui nous sert à orienter notre contour (Γ) .

b Equation électrique

Flux magnétique à travers le circuit :

$$\Phi_{\text{mag}} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_0 a y(t)$$

★ Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = B_0 a \dot{y}$$

Schéma électrique équivalent.

Loi d'Ohm :

$$e = Ri = B_0 a \dot{y} \Rightarrow i = \frac{B_0 a \dot{y}}{R} > 0 \quad (\text{EE})$$

c Equation mécanique

- Système : {Tige conductrice}
- Référentiel des rails supposé galiléen
- Bilan des forces (selon $\vec{e}_y$ seulement) :
 - Force de l'opérateur $\vec{f}_{op} = f_{op} \vec{e}_y$
 -

★

Force de Laplace. Rappelons que la force de Laplace est une force élémentaire qui agit sur une portion infinitésimale $d\vec{\ell}$ de conducteur : $\delta \vec{F}_{\mathcal{L}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Pour avoir la force totale s'exerçant sur la barre, on intègre la force élémentaire : $\vec{F}_{\mathcal{L}} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -iaB_0 \vec{e}_y$

Principe fondamental de la dynamique, projeté selon $\vec{e}_y$:

$$\boxed{m\ddot{y} = f_{op} - iaB_0} \quad (\text{EM})$$

On peut alors injecter l'équation électrique dans l'équation mécanique. On obtient, en notant $v_y = \dot{y}$:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{(aB_0)^2}{mR} v_y = \frac{f_{op}}{m}$$

dont la résolution est classique.

Remarque : Imaginons que dans un exercice, on cherche le moment mécanique exercé par la force de Laplace au point O . Comme la force de Laplace est une force élémentaire, il faut commencer par calculer le moment élémentaire $\delta \vec{M}_O(\delta \vec{F}_{\mathcal{L}}) = \vec{OM} \wedge \delta \vec{F}_{\mathcal{L}} = \vec{OM} \wedge (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$, puis intégrer sur tout le conducteur : $\vec{M}_O(\vec{F}_{\mathcal{L}}) = \int \delta \vec{M}_O(\delta \vec{F}_{\mathcal{L}}) = \int \vec{OM} \wedge (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$.

d Bilan en puissance

La méthode (à savoir !) est toujours la même quand on demande un bilan en puissance :

- On multiplie l'équation électrique sur les tensions par i :

$$Ri^2 = B_0 a \dot{y} i$$

- On multiplie l'équation mécanique sur les accélérations par $\dot{y}$:

$$m\ddot{y}\dot{y} = -B_0 a \dot{y} i + f_{op}\dot{y}$$

- On interprète les différents termes, si besoin en les ré-écrivant.

Interprétation 1 : couplage électro-mécanique parfait

La puissance fournie par le générateur induit est $P_{fem} = ei = B_0 a \dot{y} i > 0$. La puissance des forces de Laplace sur le système est $P_L = -B_0 a \dot{y} i$. Ainsi :

$$P_{fem} + P_L = 0$$

Toute la puissance électrique créée dans le circuit sert à freiner le système : on parle de couplage électro-mécanique parfait.

Interprétation 2 : Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique

En tant qu'utilisateur, le bilan qui nous intéresse est lié à f_{op} et à la puissance reçue par la résistance (qui est bien une puissance utile, car l'utilisateur cherche à brancher un appareil résistif au circuit électrique). Pour le faire apparaître, il suffit de sommer les deux bilans en puissances précédents :

$$Ri^2 + m\ddot{y}\dot{y} = f_{op}\dot{y} \iff P_J + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_y^2 \right) = P_{op}$$

La puissance mécanique fournie par l'opérateur est transformée en puissance électrique utile et en puissance cinétique (nulle en régime permanent).

III Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

III.1 Auto-induction

a Exemple du solénoïde

Considérons dans un premier temps un solénoïde d'axe $(O, \vec{e}_x)$ alimenté par un générateur de tension. Dans le cas où cette tension est variable, un phénomène d'induction se produit, que l'on qualifie d'*auto-induction* ou *induction propre*.

Qualitativement, un champ magnétique $\vec{B}$, appelé champ magnétique "propre", est créé et traverse chacune des spires constitutives du solénoïde. Il existe donc un flux variable au travers de ce circuit, donc une fém induite. Comme le circuit est fermé, on a alors un courant induit, et d'après la loi de Lenz, un champ magnétique induit est créé dans une direction qui va s'opposer aux variations de champ magnétique "propre" de la bobine. Ainsi le circuit agit sur lui-même.

Quantitativement, on peut calculer le flux du champ magnétique $\vec{B}$, appelé **flux propre** Φ_p car lié au champ créé par le circuit source du champ magnétique. Pour cela, on modélise le solénoïde de la même manière qu'au chapitre EM3 :

- solénoïde supposé de taille infini (en pratique, longueur ℓ du solénoïde bien plus grande que le rayon)
- pas de l'hélice formant la bobine très petit devant le rayon, ce qui permet de considérer le bobinage comme un ensemble de N spires accolées sur une distance ℓ (on parle de bobine à spires jointives).

On appelle S la section de la bobine.

Schéma. Le flux dans une spire de la bobine vaut simplement :

$$\Phi_{spire} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S \quad (\text{III.1})$$

★

où l'on a *orienté les spires dans le sens du passage du courant*. Puis en considérant que le flux est le même dans toutes les spires,

$$\Phi_p = N \Phi_{spire} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S I \quad (\text{III.2})$$

Flux propre et inductance propre

Pour un circuit parcouru par un courant $i(t)$, le champ magnétique créé par le circuit étant proportionnel à i , il est à l'origine d'un flux dans le circuit pouvant se mettre sous la forme :

$$\Phi_p = Li(t) \quad (\text{III.3})$$

où L est appelé *coefficient d'auto-induction*, ou *inductance propre* ou plus simplement *inductance*, noté L , et mesuré en henry. Il ne dépend que de la structure géométrique du circuit considéré et est toujours positif.

Dans le cas du solénoïde, par identification :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad (\text{III.4})$$

Un odg pour $N = 1000$, $r = 5 \text{ cm}$ et $\ell = 20 \text{ cm}$ donne $L = 50 \text{ mH}$, valeur typique au laboratoire.

b Fém auto-induite et schéma électrique équivalent

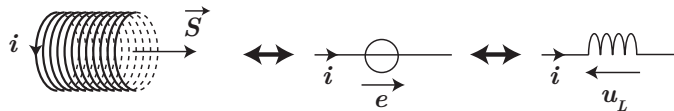
Si le courant circulant dans un circuit fixe est constant, aucun effet d'induction n'est perceptible : il faut que le flux soit variable, et donc que le courant soit variable. Apparaît alors une fém d'auto-induction

$$e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

correspondant à une tension en convention générateur.

Remarque : Il est aussi possible d'observer des effets d'auto-induction si la valeur de L varie au cours du temps : le circuit est alors déformable.

On peut faire le lien avec la loi de Lenz : si un générateur externe impose une augmentation du courant, la fém d'auto-induction est négative et s'oppose à l'augmentation du courant !



On peut alors remplacer dans le schéma électrique le bobinage par une inductance L de tension $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$.

c Superposition de l'auto-induction et d'un phénomène d'induction externe

Il est possible que plusieurs effets se combinent : d'une part un phénomène d'auto-induction dû au passage d'un courant dans un élément inductif, et d'autre part un champ magnétique "extérieur" qui vient se superposer au champ propre et engendre un flux supplémentaire. Ainsi il faudra distinguer la fém d'auto-induction de la fém due au champ extérieur : $e = -L \frac{di}{dt} + e_{ext}$. Cependant, dans la majorité des cas, le phénomène d'induction lié à un champ extérieur est le phénomène prépondérant, et l'on néglige l'inductance propre.

Remarque : D'un point de vue pragmatique, si un exercice n'évoque pas la notion d'inductance propre, il est probable que l'auto-induction puisse être négligée, particulièrement dans le cas où le bobinage est très faible (quelques spires).

III.2 Energie magnétique dans le cas du solénoïde long

Vous avez montré en première année que l'énergie stockée dans une inductance s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (\text{III.5})$$

Redémontrer cette formule, au cas où, et pcq Philippe Kotov le passe sous le tapis en sup' pour gagner du temps...

Dans le cas particulier d'un solénoïde, on peut exprimer la densité volumique d'énergie magnétique associée :

★

$$e_m = \frac{\mathcal{E}_m}{S\ell} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2 = \boxed{\frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{car } \vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_x$$

Densité volumique d'énergie magnétique

On admet qu'on peut toujours écrire la densité volumique d'énergie associée à un champ magnétique comme :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

III.3 Induction mutuelle

L'induction propre est un phénomène que l'on exploite avec les bobines, par exemple dans les circuits électriques pour du filtrage ou encore pour produire des étincelles. Néanmoins un phénomène encore plus courant est celui de l'*induction mutuelle*, que l'on retrouve dans les antivol, les systèmes NFC des téléphones portables, etc.

a Phénomène de couplage entre deux bobines

Considérons pour simplifier le cas deux deux circuits filiformes pouvant être parcourus par des courants. Outre le phénomène d'auto-induction, le champ créé par le premier circuit peut passer dans le deuxième et provoquer un phénomène d'induction, et vice-versa. On dit que les circuits sont couplés. Le flux dans le premier circuit se décompose alors en deux parties :

$$\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

où $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux du champ magnétique issu du deuxième circuit à travers le premier.

Inductance mutuelle

De la même manière que l'on a défini le coefficient d'auto-induction, le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ du champ magnétique créé par le circuit 2 dans le circuit 1 est proportionnel au champ magnétique $\vec{B}_2$, donc au courant traversé par le deuxième circuit. On appelle la constante de proportionnalité M , *coefficient d'inductance mutuelle*, dont le signe est quelconque (et dépend de l'orientation de chaque circuit), exprimé en henry :

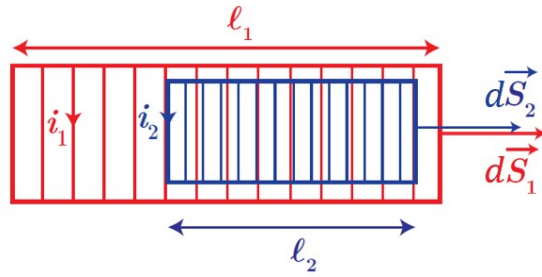
$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

On peut montrer également que, de manière symétrique :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

avec le même coefficient de proportionnalité, ne dépendant que de la géométrie des deux circuits, et leurs positions respectives.

Quantitativement, prenons l'exemple de deux solénoïdes emboîtés, de section S_i et longueur ℓ_i , $i \in 1,2$ avec $\ell_2 < \ell_1$.



Calculons le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \iint_{(S)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = B_1 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell_1} S_2$$

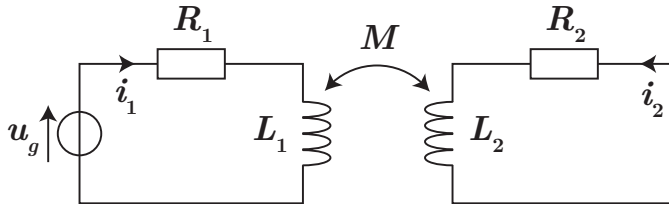
puis avec les N_2 spires traversées par le champ magnétique $\vec{B}_2$, il vient :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{\ell_1} i_1 = M i_1$$

Remarque : D'un point de vue pratique, il est parfois plus facile de calculer un des deux flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ ou $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ issus du couplage : on peut alors en déduire le coefficient de mutuelle inductance qui sera forcément le même pour l'autre flux.

b Fém induite et schéma électrique équivalent

Dès que l'on a deux circuits électriques dont les éléments inductifs sont proches, il faut tenir compte de l'inductance mutuelle dans les équations électriques. On peut par exemple étudier le montage ci-dessous :



Pour la bobine 1, $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et pour la bobine 2 $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$ conduisant aux équations différentielles suivantes par l'application de la loi des mailles :

$$\begin{cases} u_g = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

que l'on peut très bien réécrire en régime sinusoïdal forcé si $u_g(t) = u_0 \cos \omega t$:

$$\begin{cases} u_0 = i_1 (R_1 + j L_1 \omega) + j M \omega i_2 \\ 0 = i_2 (R_2 + j L_2 \omega) + j M \omega i_1 \end{cases}$$

ainsi l'approche du circuit 2 par rapport au circuit 1 *modifie l'impédance branchée au générateur* car on peut alors écrire en combinant les deux équations

$$u_0 = i_1 \left(R_1 + j L_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + j L_2 \omega} \right)$$

Cela permet concrètement la détection du circuit 2, non relié à un générateur, principe que l'on retrouve dans :

- la détection des voitures (la carrosserie jouant alors le rôle de circuit du fait de sa carcasse métallique) ;
- les détecteurs de vols (une étiquette avec un circuit en spirale sur l'objet, et les portiques jouent le rôle de circuit inducteur).

Remarque : On pourrait également conduire un bilan énergétique dans le cas de l'induction mutuelle. Il suffit pour cela d'écrire les deux équations électriques et de les multiplier respectivement par le courant circulant dans chaque circuit. On peut alors reconnaître un terme d'énergie magnétique totale s'écrivant :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Il y a donc de l'énergie magnétique liée au couplage.