

ARQS magnétique et induction

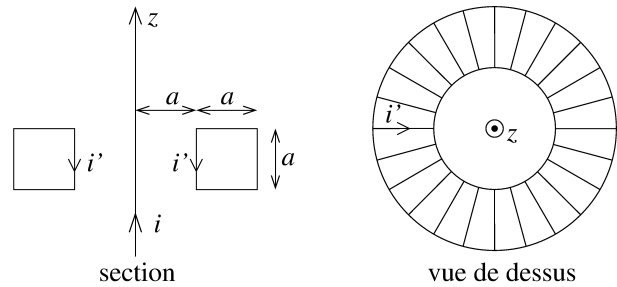
Ex. 1 Pince ampèremétrique

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page¹

Une pince ampèremétrique est un appareil permettant de mesurer des intensités très importantes.

Elle est constituée d'un tore de section carrée de côté $a = 5 \text{ cm}$, d'axe (Oz) sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre $N = 10^4$ de spires carrées de côté a en série. Ceci forme un circuit de résistance $R = 0.2 \Omega$, fermé sur un ampèremètre de résistance $r' = 0.3 \Omega$.

Le tore encercle un fil infini confondu avec l'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. C'est I qu'on souhaite mesurer.



Donnée : Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

- En régime permanent, le circuit de la pince ampèremétrique est parcouru par un courant $i' = I' \cos(\omega t + \varphi)$. Expliquer l'existence de ce courant.
- Soit $\vec{B}$ le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.
 - Justifier que $\vec{B} = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$.
 - En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer $B_\theta(r, z)$ en un point M situé dans la section d'une spire carrée du tore.
 - Montrer alors que le flux magnétique total Φ à travers les N spires vaut :

$$\Phi = - \frac{\mu_0 N (i - N i') a \ln(2)}{2\pi}$$

- Montrer qu'on a $\frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r' + R)}{N\mu_0\omega a \ln 2}\right)^2}}$. En utilisant les valeurs numériques, justifier la simplification $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$.
- En quoi cet appareil permet-il de mesurer I ? Quels avantages et inconvénients voyez-vous par rapport à l'utilisation directe d'un ampèremètre ?

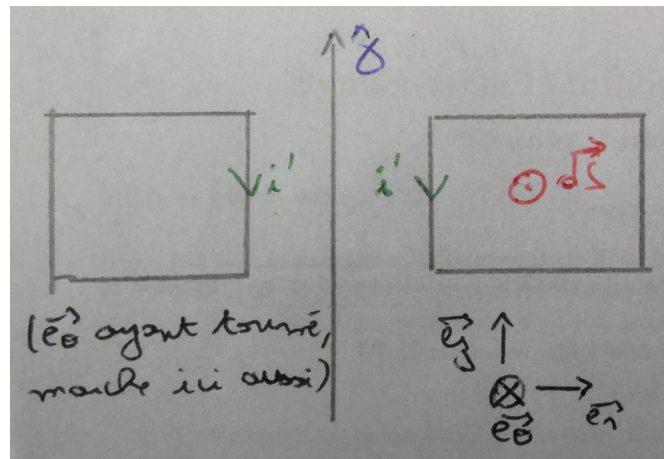
Correction de l'exercice 1

- Le fil étant parcouru par un courant d'intensité variable, il génère un champ magnétique variable orthoradial. Son flux à travers le tore est donc variable, ce qui crée bien dans un circuit fermé un courant électrique, de même fréquence que le courant i .
- Invariance par rotation d'angle θ , mais pas par translation selon (Oz) si on tient compte du champ créé par la pince également. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$.
 - Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r , d'axe (Oz) , d'altitude telle que le cercle soit contenu dans le tore :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z) = \mu_0 (i - N i') \iff B(r, z) = \frac{\mu_0 (i - N i')}{2\pi r} \quad (\text{Ex.1})$$

- Nous avons déterminé à la question précédente :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 (i - N i')}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$



Nous souhaitons désormais calculer la flux magnétique dans la bobine torique. Calculons le flux dans une spire.

$$\Phi_1 = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orienté selon la règle de la main droite par rapport au sens du courant dans la spire de la bobine, c'est-à-dire par rapport à i' : $d\vec{S} = -drdz\vec{e}_\theta$. Donc :

$$\Phi_1 = - \iint_{(S)} B(r,z) dr dz = - \int_{r=a}^{r=2a} \int_{z=-a/2}^{z=+a/2} \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi r} dr dz$$

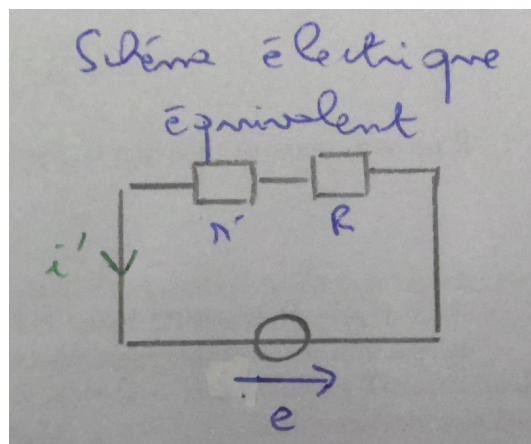
On obtient, après intégration :

$$\Phi_1 = - \frac{\mu_0(i - Ni')a \ln(2)}{2\pi}$$

Puis, comme on veut le flux magnétique dans toute la bobine torique :

$$\Phi = N\Phi_1 = - \frac{\mu_0 N(i - Ni')a \ln(2)}{2\pi}$$

3. On commence par représenter directement le schéma électrique équivalent :



avec la force électromotrice orientée en convention générateur par rapport au courant i' . On a, avec la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = + \frac{\mu_0 Na \ln(2)}{2\pi} \frac{di - Ni'}{dt}$$

Dans le tore, la loi des mailles s'écrit alors :

$$e = (r' + R)i' \quad (\text{Ex.2})$$

On passe alors en notation complexe (régime sinusoïdal forcé) :

$$\underline{i} = I e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}' = I' e^{j(\omega t + \varphi)}$$

D'où :

$$\underline{e} = + \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln(2) j \omega (\underline{i} - N \underline{i}') = (r' + R) \underline{i}' \quad (\text{Ex.3})$$

soit en regroupant les termes :

$$\left(N - j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)} \right) \underline{i}' = \underline{i} \quad (\text{Ex.4})$$

soit en module :

$$\frac{I'}{I} = \left| \frac{1}{N - j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)}} \right| = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)} \right)^2}} \quad (\text{Ex.5})$$

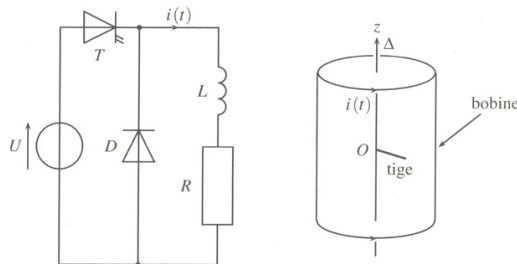
Comme $\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)} = 23 \ll N$, on a bien $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$.

4. L'ampèremètre branché à la pince permet donc de mesurer l'intensité efficace de $i'(t)$, elle-même reliée à I . Ce dispositif est donc efficace lorsqu'il est nécessaire de mesurer des intensités importantes, du fait du facteur d'atténuation de $N = 10^4$. Ainsi, dans les avantages : mesure sans contact électrique, pour des intensités élevées. Inconvénients : on ne peut pas mesurer l'intensité d'un courant continu, peu précis si I est petit (typiquement, si la résolution de l'ampèremètre est δI , il faut que $I > N \delta I$).

Ex. 2 Mise en rotation d'une tige

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page²

Considérons le circuit ci-dessous, où $U > 0$ est une tension constante. Pour $t < 0$, l'interrupteur T est fermé et l'interrupteur D est ouvert. À la date $t = 0$ on ouvre T et on ferme D . La bobine a un rayon a , une longueur ℓ , comporte n spires par unité de longueur. Sa résistance électrique est R . La bobine a un axe vertical (Oz). On attache au centre de la bobine et perpendiculairement à l'axe (Oz) une tige homogène de moment d'inertie J , de longueur b . La tige peut pivoter sans frottement orthogonalement à (Oz). Elle est isolante et porte une charge de densité linéique λ positive et uniforme.



1. Établir l'expression de l'intensité du courant dans la bobine pour $t < 0$ (on suppose que le régime permanent est atteint pour $t < 0$) puis pour $t > 0$.
2. En faisant une étude de symétries et d'invariances, montrer que le champ électrique créé par la bobine seule (sans la tige) vérifie $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$.
3. Montrer alors que l'expression du champ électrique créé par la bobine seule (sans la tige) dans le solénoïde est :

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta$$

4. Exprimer le moment élémentaire scalaire, par rapport à l'axe (Oz), de la force de Lorentz sur une portion dr de la tige chargée.
5. Calculer la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la tige en considérant qu'elle est immobile à $t = 0$.

Correction de l'exercice 2

1. Pour $t < 0$, l'intensité du courant dans la bobine est, en régime permanent, $I_0 = \frac{U}{R}$ par une loi des mailles. Pour $t > 0$, on déconnecte le générateur, donc l'énergie stockée dans la bobine est libérée et l'intensité diminue

² Le moment scalaire total par rapport à (Oz) que la force de Lorentz exerce sur la tige complète est : $\vec{\mathcal{M}}(Oz) = -\frac{9}{2} \frac{\mu_0 \lambda^2 b^2}{\pi} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta$

selon :

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (\text{Ex.6})$$

car i vérifie $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$.

- La bobine crée un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$, variable, à l'origine d'un champ électrique. On néglige ici la contribution de la tige. Du fait de la distribution des courants, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie, le champ électrique lui est orthogonal, donc $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$ (invariance par rotation d'angle θ et translation d'axe (Oz)).
- On applique alors la loi de Faraday sur un cercle de rayon r fermé centré sur l'axe (Oz) et orienté dans le sens trigonométrique positif autour de (Oz) (représentez le, de préférence) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} (\mu_0 n i(t) \times \pi r^2) \Rightarrow 2\pi r E(r, t) = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta} \quad (\text{Ex.7})$$

- On peut maintenant s'intéresser au mouvement de la tige. Qualitativement, le champ électrique orthoradial exerce une force de Lorentz sur les charges qui composent la tige, elle peut donc se mettre à tourner.
 - Pour une portion dr de tige située à une distance r de l'axe (Δ) , la force associée est $\delta \vec{F} = \lambda dr \vec{E}$;
 - cette force élémentaire est associée à un moment élémentaire (bras de levier r) :

$$\delta \mathcal{M}_\Delta = (\lambda E(r, t) dr) r \quad (\text{Ex.8})$$

- donc le moment résultant est :

$$\mathcal{M}_\Delta = -\mu_0 n \lambda \frac{di}{dt} \int_0^b \frac{r^2}{2} dr = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (\text{Ex.9})$$

En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à la tige, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

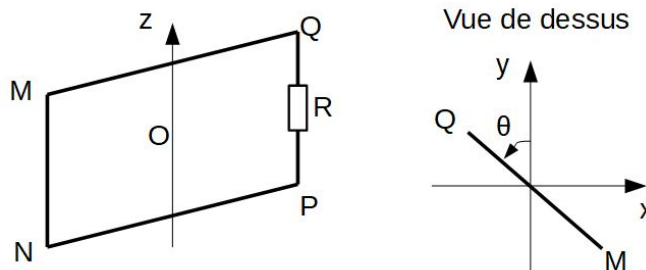
$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (\text{Ex.10})$$

dont l'intégration conduit, avec $\omega(t=0) = 0$:

$$\omega(t) = \frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6J} (i(0) - i(t)) = \boxed{\frac{\mu_0 n \lambda b^3 U}{6JR} (1 - e^{-t/\tau})} \quad (\text{Ex.11})$$

Ex. 3 Modélisation simplifiée d'un alternateur

On considère une spire rectangulaire MNPQ, de longueur $MQ = a$ et de hauteur $MN = b$, plongée dans un champ extérieur $\vec{B} = B \vec{e}_x$ uniforme et stationnaire. La spire peut librement pivoter autour de l'axe (Oz) grâce à une liaison pivot idéale : l'angle de rotation θ est défini sur le schéma. On nomme J le moment d'inertie de la spire autour de l'axe (Oz) . On suppose que la spire est correctement équilibrée du point de vue mécanique de telle sorte que le centre de gravité du système est situé sur l'axe (Oz) . Un opérateur extérieur génère un couple scalaire $\Gamma_{\text{op}} > 0$ selon l'axe (Oz) . On rappelle l'expression du moment mécanique exercé sur un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$ plongé dans un champ $\vec{B}$ extérieur : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.



Du point de vue électrique, on prendra en compte une résistance R liée à l'effet Joule au sein de la spire. Comme un véritable alternateur est constitué d'un ensemble de spires similaires, on ne négligera pas le phénomène d'auto-induction dans le circuit : on appelle L l'inductance propre équivalente à la spire.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les équations électrique et mécanique régissant l'évolution du système, puis d'effectuer un bilan énergétique.

1. Du point de vue qualitatif, décrire les phénomènes inductifs se produisant sur le circuit. On précisera en particulier le signe du moment scalaire, autour de l'axe (Oz), des forces de Laplace.
2. Rappeler l'expression du moment magnétique de la spire. En déduire l'expression du moment scalaire, autour de l'axe (Oz), de la force de Laplace s'exerçant sur la spire en fonction de a , b , B , θ et du courant i circulant dans la spire.
3. Déterminer l'équation électrique, puis l'équation mécanique caractérisant le système.
4. Montrer alors que la puissance générée par la force électromotrice est exactement opposée à la puissance dissipée par les forces de Laplace. On parle de couplage électromécanique parfait.
5. Effectuer un bilan en puissance sur le système et l'interpréter.

Correction de l'exercice 3

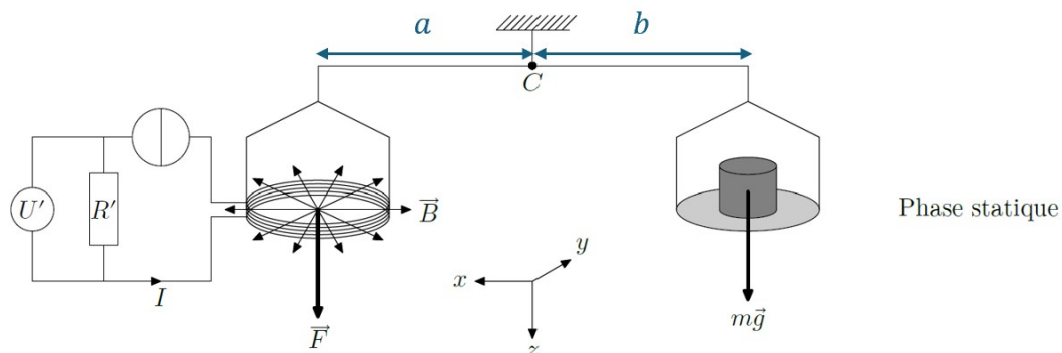
Voir corrigé manuscrit (j'ai ajouté la Q.2 après avoir rédigé le corrigé)

Ex. 4 (*Ecrit Centrale PC 2023*) Etude statique de la balance de Kibble

Avant 2019, le kilogramme était défini comme « la masse du prototype international du kilogramme ». C'était un artefact en platine iridié, conservé par le bureau international des poids et mesures au pavillon de Breteuil (en France !). Différentes copies officielles de l'artefact ont été réalisées dans le monde pour faciliter la mesure d'un kilogramme par tous les laboratoires. La dernière comparaison de la masse de l'artefact avec la moyenne de ses copies en 2014 a confirmé une différence de 35 μg .

1. Quelle différence de masse cela fait-il en valeur relative ? Quelles peuvent être les causes de ces différences ?

Pour éviter que la définition du kilogramme soit basée sur une pièce mécanique, le kilogramme a été redéfini depuis 2019 via la valeur numérique fixée de la constante de Planck. La balance de Kibble est l'un des deux dispositifs qui ont permis, avant 2019, de mesurer la constante de Planck à partir du prototype international du kilogramme. À présent, elle permet d'étalonner des artefacts. On suppose la balance parfaitement équilibrée (fléau horizontal) en l'absence de masse posée sur les plateaux et en l'absence de courant. On supposera que la balance est symétrique par rapport au plan (xOz). Une liaison pivot parfaite d'axe (Oy) permet à la balance de basculer d'un côté ou de l'autre. Le plateau de gauche est maintenu par un bras de longueur a et le plateau de droite par un bras de longueur b .



Une masse m est placée sur le plateau de droite. La bobine (plateau de gauche) comporte N spires horizontales, circulaires et concentriques. Elle est placée dans l'entrefer d'un aimant. Dans la zone des spires, le champ magnétique est horizontal, radial sortant par rapport à leur axe de révolution (Oz) et de valeur B uniforme. L'axe (Oz) est vertical, orienté vers le bas. Soit ℓ la longueur totale du fil des spires.

2. Indiquer sur un schéma simplifié l'orientation positive du courant I dans les spires permettant l'équilibrage de la balance une fois la masse m posée comme sur la figure ci-dessus. Déterminer l'expression de la force qui agit sur la bobine.
3. On règle l'intensité du courant dans la bobine à une valeur I pour équilibrer la balance en présence de la masse m posée. Établir l'expression de m en fonction de I , g , B , a , b et ℓ .
4. La bobine comporte 600 spires réparties sur un cylindre de diamètre moyen égal à $D = 260$ mm. On prendra

$B = 1.0 \text{ T}$, $|I| = 10 \text{ mA}$ et $a = b$. Calculer m .

5. Du fait d'un échauffement de température, les spires de la bobine subissent une dilatation thermique de l'ordre de 1% de leur diamètre. Calculer la variation d'intensité ΔI à appliquer pour maintenir la balance équilibrée avec la même masse m que précédemment.

Correction de l'exercice 4

1. A.N. : $\frac{\Delta m}{m} = \frac{35 \mu\text{g}}{1 \text{ kg}} = 3.5 \times 10^{-8}$, ce qui est très faible ! Plusieurs pistes peuvent expliquer l'écart entre la masse de l'artéfact et de ses copies :

- dépôt de poussières sur les masses
- abrasion de matière lors de la manipulation des masses (on utilise ces masses de temps en temps afin de mesurer très précisément la masse d'un système dans un laboratoire)
- défaut de précision lors de la copie du prototype officiel

Remarque : Lorsqu'en physique, la précision de la mesure d'une masse devient limitée par la précision de la masse d'un artéfact, c'est qu'il est temps de changer de définition d'une unité pour ne plus dépendre d'un artéfact !

2. La force s'exerçant sur les spires est la force de Laplace (courant + champ magnétique). Pour équilibrer la balance, cette force doit être orientée selon $+\vec{e}_z$.

Or, la force élémentaire de Laplace s'exerçant sur une portion de longueur $d\vec{\ell}$ des spires s'écrit : $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Avec la main droite, on détermine que le sens $I > 0$ doit être de la gauche vers la droite pour la partie "venant vers nous" des spires.

On a alors :

$$d\vec{F} = I d\ell B \vec{e}_z \Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{F} = I \ell B \vec{e}_z$$

car I , B et $\vec{e}_z$ sont uniformes sur toutes les spires.

3.
 - Système : {Balance + Masse + Bobine}
 - Référentiel du labo galiléen
 - Bilan des actions extérieures :
 - Action de la pivot sur la balance
 - Poids de la balance à vide. Comme à vide, le fléau est horizontal, cela signifie que $\mathcal{M}_{(Cy)}(\vec{P}_{\text{balance à vide}}) = 0$ (le centre de gravité de la balance à vide est dans le plan (Cyz)).
 - Poids de la masse m
 - Force de Laplace sur la bobine $\vec{F}$
TMC par rapport à l'axe (Cy) , à l'équilibre :

$$0 = \underbrace{\mathcal{M}_{(Cy)}(\vec{P}_{\text{balance à vide}})}_{=0} + \underbrace{\mathcal{M}_{(Cy)}(\text{pivot})}_{=0} + \mathcal{M}_{(Cy)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Cy)}(\vec{F})$$

De plus, le point d'application de $\vec{F}$ se situe au centre de la bobine par symétrie. D'où, avec le bras de levier :

$$0 = mgb - I\ell Ba \Rightarrow m = \frac{I\ell Ba}{gb}$$

4. On a $\ell = N \times 2\pi R = N\pi D$ avec R le rayon des spires. Ainsi :

$$m = \frac{I B a N \pi D}{gb}$$

A.N. : $m = 0.50 \text{ kg}$

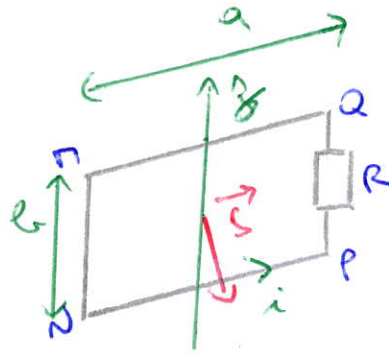
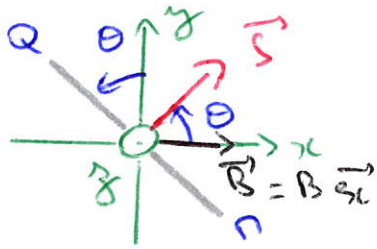
5. On effectue une différentielle logarithmique de la relation précédente :

$$0 = \frac{dI}{I} + \frac{dD}{D} \Rightarrow \Delta I = -\frac{I \Delta D}{D}$$

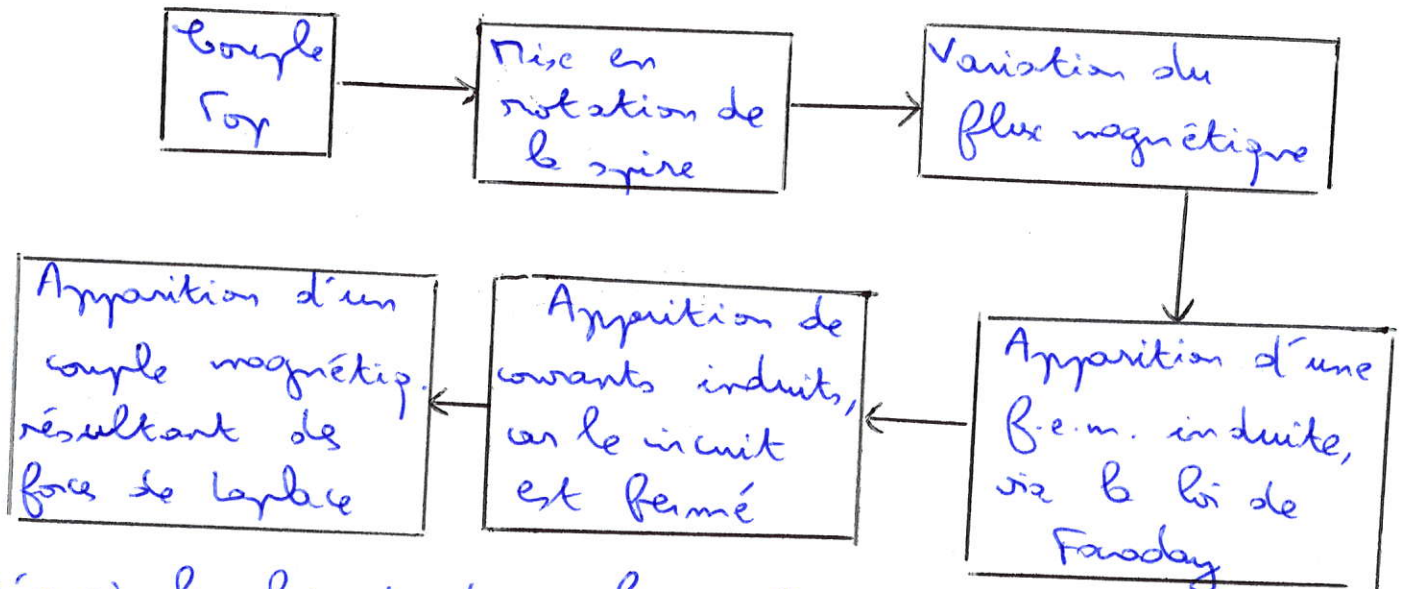
A.N. : $\Delta I = -0.1 \text{ mA}$.

Corrigé - Modélisation simplifiée d'un alternateur

Vue de dessus



1) Description qualitative:



D'après la loi de Lenz, le couple magnétique s'oppose à Γ_{ext} : $\Gamma_{\text{mag}} < 0$.

2) Étude électrique:

Force électromotrice, liée à $\vec{B}$ extérieur:

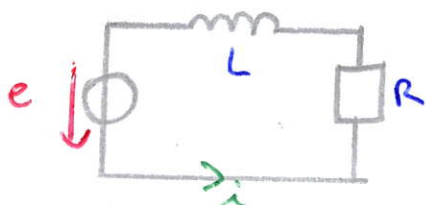
$$e = - \frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi_{\text{mag}} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$= a b B \cos \theta$$

($d\vec{l}$ orienté avec la règle de la main droite par rapport à i)

$$\Rightarrow e = a b B \dot{\theta} \sin \theta$$



L modélise l'auto-induction non prise en compte dans e ici.

loi des mailles: $e = L \frac{di}{dt} + Ri = B a b \dot{\theta} \sin \theta$ (EE)

Étude mécanique:

Système: {spire MNPQ}

Référentiel du laboratoire galiléen

Bilan de moments cinétiques par rapport à (O_3) :

- Couple de l'opérateur Γ_{op}

- Couple magnétique (extérieur): $\Gamma_{mag} = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_3$
 $= (i \vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_3$
 $= -i a b B \sin \theta$

Rq: $\Gamma_{mag} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{M} = i \vec{S}$ est un résultat du cours: peut être donné directement. (Pour la démo: voir exercice sur l'action magnétique sur une spire.)

- Moment de la liaison pivot autour de son axe: $M_{(O_3)}(\text{pivot}) = 0$

- Moment du poids par rapport à (O_3) : $M_{(O_3)}(\vec{P}) = 0$ (car G sur (O_3))

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe (O_3) :

$$J \ddot{\theta} = \Gamma_{op} - i a b B \sin \theta \quad (EP)$$

avec J moment d'inertie autour de (O_3)

Rq: lien avec Q.1: $\Gamma_{mag} < 0$ car i change de signe suivant si $\sin \theta > 0$ ou $\sin \theta < 0$ (se voit avec le changement de signe de e)

3) (EE) $\times i$: Puissance générée par le f.e.m.: $B a b i \dot{\theta} \sin \theta = P_{fem}$

(EP) $\times \dot{\theta}$: Puissance exercée par la force de Laplace: $P_L = -i a b \dot{\theta} B \sin \theta$

$\Rightarrow P_{fem} = -P_L$: toute la puissance générée par le fem

est dissipée mécaniquement via la force de Laplace: couplage électromécanique parfait.

$$4) (EE) \times i: B a b i \dot{\theta} \sin \theta = L i \frac{di}{dt} + R i^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2 \quad (A)$$

$$(ED) \times \dot{\theta}: 3 \ddot{\theta} \dot{\theta} = \tau_{\text{qr}} \dot{\theta} - i a b B \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} 3 \dot{\theta}^2 \right) = \tau_{\text{qr}} \dot{\theta} - i a b B \dot{\theta} \sin \theta \quad (B)$$

$$(B) - (A): \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + 3 \dot{\theta}^2 \times \frac{1}{2} \right) + \underbrace{R i^2}_1 = \underbrace{\tau_{\text{qr}} \dot{\theta}}_{\text{Puisissance fournie par l'opérateur}}$$

Puissance émettant de faire varier i et $\dot{\theta}$
 (liée à l'énergie magnétique stockée dans L et à l'énergie cinétique)

Puissance fournie à la charge (= la résistance): il s'agit de la puissance utile pour un alternateur.