

Ondes mécaniques unidimensionnelles

Sommaire

I	Équation de d'Alembert unidimensionnelle	2
I.1	Exemple 1 : ondes transversales sur une corde vibrante	2
I.2	Exemple 2 : ondes longitudinales dans une tige solide	4
I.3	Analogies entre les phénomènes de propagation dans les solides	7
I.4	Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle	8
II	Deux grandes familles d'ondes	8
II.1	Ondes progressives	8
II.2	Ondes stationnaires	12
III	Conséquences des conditions aux limites : exemple de la corde vibrante	14
III.1	Régime libre	14
III.2	Régime forcé	15
	Exercices	17

Questions de cours

- Montrer que les déplacements transversaux d'une corde vibrante vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Loi de Hooke : énoncé, domaine de validité. Interprétation du module d'Young à l'aide d'un modèle microscopique.
- Montrer que les déplacements longitudinaux dans une tige solide vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Préciser la solution la plus générale à une équation de d'Alembert 1D. Expliciter deux bases de solutions et le lien entre ces dernières.
- Ondes progressives harmoniques : vecteur d'onde, vitesse de phase. Équation de d'Alembert 1D : résolution en complexes, relation de dispersion.
- Déterminer les modes propres d'une corde tendue entre ces deux extrémités. Expliciter succinctement la méthode de résolution connaissant les conditions initiales sur la position transversale et la vitesse de chaque élément de corde.

- ★ *Prise de notes* : A quelle vitesse se propage une onde dans un câble coaxial ? le long d'une corde de guitare que l'on gratte ? Pourquoi le son se propage-t-il plus vite dans l'eau que dans l'air ? En sup' et au lycée, lors de l'étude des ondes, vous êtes partis de propriétés expérimentales (interférences / diffraction), en posant la vitesse de l'onde comme une constante du problème (indice optique du milieu...) : vous n'avez jamais fait le lien entre cette vitesse et les propriétés du milieu, car il vous manquait l'équation de propagation de l'onde (EDP car couple des effets spatiaux et temporels).

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Établir l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante et pour la tige solide, en insistant sur la méthode employée. En déduire la vitesse de propagation de l'onde.
2. Expliciter la méthode pour établir une relation de dispersion.
3. Comprendre que le milieu fixe la vitesse de propagation (seulement). Ce sont les conditions aux limites qui fixent la structure de l'onde (onde progressive, onde stationnaire, fréquence d'oscillation...).
4. Distinguer le régime *libre* d'oscillation de la corde vibrante (modes propres) et le régime *forcé*.

I Équation de d'Alembert unidimensionnelle

I.1 Exemple 1 : ondes transversales sur une corde vibrante

a Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à une corde de longueur L , masse m_c et masse linéique $\mu = \frac{m_c}{L}$. Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



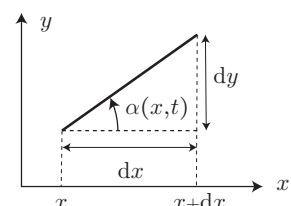
- La corde est considérée comme quasi-inextensible ($\mu = \text{cste}$) et souple (c'est-à-dire qu'elle n'oppose aucune résistance à sa déformation) ;
- elle est tendue entre ses deux extrémités avec une tension $T_0 \gg m_c g$ de sorte à négliger l'effet de son propre poids ;
- à l'équilibre, la corde est tendue horizontalement, $y(x, t) = 0, \forall t, \forall x \in [0, L]$;
- on étudie les petites déformations transversales de la corde. Ainsi en notant $\alpha(M, t)$ l'angle que fait la tangente à un point M de la corde à l'instant t , on considère que $|\alpha| \ll 1$ de sorte à linéariser l'ensemble des équations. Un point M sera alors supposé se déplacer à x fixé.

Les déformations qui vont pouvoir se propager dans la corde sont alors des ondes transversales (déformations perpendiculaires à la direction de propagation) unidimensionnelles (selon la direction (Ox)).

b Mise en équation

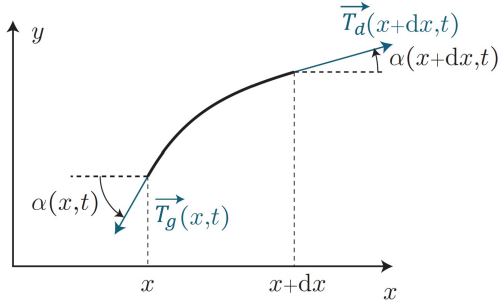
- ★ Considérons donc un élément infinitésimal de corde pris entre le point $M(x, y)$ et $M'(x + dx, y + dy)$. Notons $\alpha(x, t)$ l'angle entre la tangente à la corde en M et l'horizontale. Au premier ordre en α , et à t fixé (on fait un raisonnement spatial) :

$$\tan \alpha \simeq \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \simeq \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_t \implies \boxed{\alpha(x, t) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_t} \quad (\text{I.1})$$



La longueur de cette portion de corde vaut alors (à t fixé) :

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \sqrt{1 + \alpha^2} = dx(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) \simeq dx \quad (\text{I.2})$$



Cet élément de corde est soumis à deux forces :

Ne pas introduire de suite $\vec{T}(x,t)$. Le faire à la fin en insistant sur le fait de ne garder qu'une seule inconnue.

★

- la tension exercée par la partie droite du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_d(x+dx,t) = \vec{T}(x+dx,t)$;
- la tension exercée par la partie gauche du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_g(x,t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{T}_g(x,t) = -\vec{T}_d(x,t) = -\vec{T}(x,t)$.

Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément de corde dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_d(x+dx,t) + \vec{T}_g(x,t) = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t) \iff \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \vec{e}_y$$

(l'accélération se calcule pour le système, qui est à x fixé). En projection sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

★

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} (T(x,t) \cos(\alpha(x,t))) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (T(x,t) \sin(\alpha(x,t))) \end{aligned}$$

La première équation donne au premier ordre en α $T(x,t) \cos(\alpha) = T(x,t) = f(t) = T_0$ (avec la condition aux limites $T(L,t) = T_0$), donc la tension est de norme constante dans toute la corde. Tandis que l'autre équation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \iff \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Équation de d'Alembert à une dimension

On dit qu'un champ physique $f(x,t)$ vérifie une équation d'onde de d'Alembert si f est régi par l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \quad (\text{I.3})$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde associée au champ physique f .

Ainsi la vitesse de propagation de perturbations transversales à une corde est reliée à la tension et la masse linéique par $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

Ordre de grandeur : Prenons l'exemple de l'expérience de cours (qui sera faite plus loin dans le chapitre). La corde a une masse totale $m_c \sim 3$ g pour une longueur totale $L \sim 2$ m. La corde est tendue via une poulie reliée à une masse $M \sim 100$ g. Estimer c .

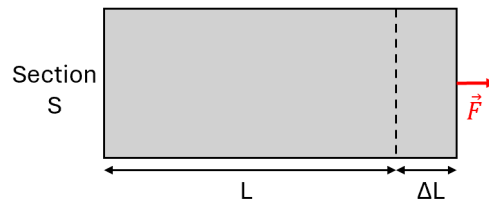
★ A.N. : $\mu = \frac{m_c}{L} = 1.5 \text{ g m}^{-1}$. Donc $c \sim 26 \text{ m/s}$

I.2 Exemple 2 : ondes longitudinales dans une tige solide

Dans cette partie, on va à nouveau déterminer une équation de d'Alembert pour un système *a priori* totalement différent : une tige solide déformée de manière longitudinale. Auparavant, nous devons évoquer une loi valable dans des solides et caractérisant leur déformation.

a Loi de Hooke

On s'intéresse à caractériser la force normale $\vec{F} = F\vec{e}_x$ qu'un opérateur doit exercer pour déformer une tige solide dans la même direction que la force.



Lorsque la déformation d'un solide est faible (moins de qq % de déformation), on peut proposer une loi simple pour relier F à ΔL : (construire la formule avec eux, l'objectif étant qu'ils soient capables de la retrouver aisément)

$$F = \text{cste} \times S \frac{\Delta L}{L}$$

Loi de Hooke

Dans le domaine d'élasticité du solide (c'est-à-dire pour de faibles déformations $\Delta L/L$), la force normale F qu'un opérateur doit exercer pour allonger de ΔL une tige solide uniforme de longueur au repos L et de section S est donnée par la loi de Hooke :

$$F = E S \frac{\Delta L}{L}$$

avec E le module d'Young du solide

★ Ajouter l'unité de E

Ordre de grandeur (à connaître) : Pour les solides usuels, l'odg de E varie de 1 GPa (non métaux) à 100 GPa (métaux).

Exercice : Cas d'un élastique Calculer l'allongement ΔL d'un élastique utilisé pour le saut à l'élastique, de diamètre $d = 10 \text{ cm}$ et de longueur au repos $L = 50 \text{ m}$, supportant en traction une masse $M = 75 \text{ kg}$. On donne le module d'Young de l'élastique (odg bien plus faible que pour les solides usuels) : $E = 1 \times 10^{-3} \text{ GPa}$.

$$\Delta L = \frac{MgL}{ES} = 4.7 \text{ m}$$

★ , soit une déformation de $\Delta L/L = 9\%$ (mais pas problématique car on étudie un élastique).

Interprétations et remarques :

- **Vocabulaire** : Le rapport F/S est appelé *contrainte (normale)* appliquée au solide (cf. chapitres de mécanique des fluides). ΔL est appelé l'*allongement* du solide, alors que $\frac{\Delta L}{L}$ est la *déformation* (ou la variation relative de longueur) (sans unité).
- Comparaison avec la force qu'un opérateur exerce sur un ressort pour l'allonger : Dans la loi de Hooke, la force est proportionnelle à l'allongement du solide. Cette loi a donc la même forme que la force qu'un opérateur doit exercer sur un ressort pour l'allonger : $F = K(L - \ell_0) = K\Delta L$ avec K la constante de raideur du ressort. ★ Avec la loi de Hooke, on identifie $\ell_0 = L$ et $K = \frac{ES}{L}$. (Pas de k dans ce chapitre, car k représentera le vecteur d'onde...)

Néanmoins, notons une différence avec le cas du ressort : pour un élastique, si celui-ci est détendu, alors $F = 0$.

- On peut exprimer la loi de Hooke dans le cas d'une section infinitésimale du solide : $dF = E \frac{\Delta L}{L} dS$.
- Expérimentalement, la mesure du module d'Young peut donc se faire avec un banc de traction.

b Modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés : passage du microscopique au mésoscopique

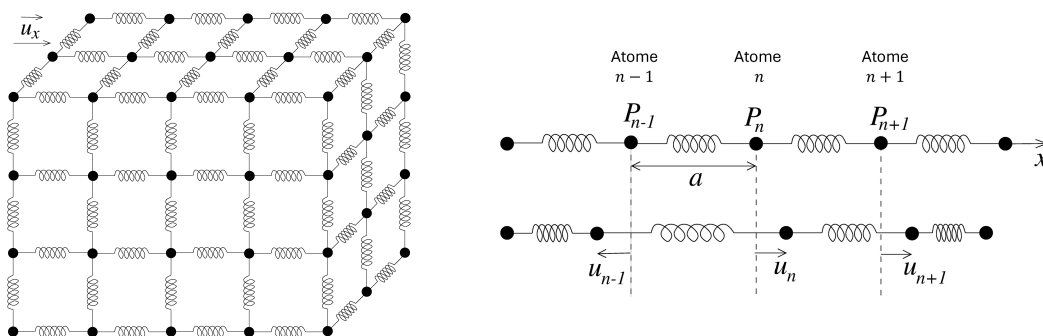
Dans cette sous-partie, on cherche à interpréter microscopiquement l'origine du module d'Young dans un solide. Nous allons pour cela réaliser un modèle microscopique caractérisant les mouvements des atomes dans un cristal cubique simple.

Présentation du modèle microscopique de la chaîne d'atomes élastiquement liés

Dans un cristal cubique simple de paramètre de maille a , les atomes se situent, **au repos**, aux nœuds d'un réseau cubique. Lorsqu'un opérateur extérieur exerce une force $\vec{F} = +F\vec{e}_x$ sur la face de droite du cristal, il éloigne les atomes situés tout à droite du cristal de leurs positions d'équilibre pour les attirer vers la droite. Du fait (principalement) des interactions entre les cations du réseau et les électrons, ces atomes attirent à leur tour les atomes situés à leur gauche et ainsi de suite.

On modélise alors (de manière simpliste) les interactions entre deux atomes plus proches voisins par une force élastique, de constante de raideur K identique pour tous les atomes et de longueur au repos a .

Il y a invariance du problème par translation selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, donc on se contente d'étudier des chaînes d'atomes unidimensionnelles. Ce modèle porte donc le nom de **modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés**.



Pour une chaîne d'atomes, on appelle alors P_n la position de l'atome n . Le décalage entre la position P_n et la position au repos est noté $u_n(t)$.

Lien avec le module d'Young du modèle mésoscopique

Intéressons nous à une chaîne d'atomes et en particulier à l'atome n de cette chaîne.
Système : {atome n }.

La force exercée par toute la partie droite de la chaîne est : $\vec{F}_{d,n} = K(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$.
On cherche désormais à reconnaître la loi de Hooke. La loi de Hooke étant une loi mésoscopique, et non microscopique, on doit s'intéresser à la force exercée par la partie droite au niveau d'une surface infinitésimale dS contenant un grand nombre de chaînes atomiques. La force totale exercée par la partie droite est donc :

$$\star \quad \vec{F}_{d,dS} = \vec{F}_{d,n} \times \text{nbr de chaînes} = \vec{F}_{d,n} \frac{dS}{a^2} = \frac{K}{a} dS \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \vec{e}_x$$

Cette force est reliée à la déformation du cristal $\frac{\text{allongement entre } n \text{ et } n+1}{\text{longueur au repos entre } n \text{ et } n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$.

On reconnaît ainsi la loi de Hooke et on identifie le module d'Young :

$$E = \frac{K}{a}$$

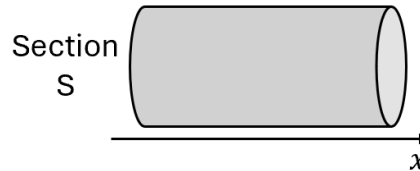
★

c Equation de d'Alembert : déformation longitudinale dans une tige solide

Nous avons désormais tous les outils pour déterminer l'équation de d'Alembert caractérisant la déformation longitudinale dans une tige solide. Pour cela, on effectue un modèle mésoscopique.

i) Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à un solide de forme cylindrique, de section S , de longueur L et de masse volumique ρ . Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



- Le rayon du solide est bien plus faible que sa longueur (en odg : $\sqrt{S} \ll L$), ce qui permet de considérer que le phénomène de propagation de la déformation dans le solide a lieu selon $\vec{e}_x$.
- Le solide est considéré comme quasi-incompressible et quasi-indilatable ($\rho = \text{cste}$).
- On étudie les petites déformations longitudinales du solide, ce qui permet d'utiliser la loi de Hooke.

Les déformations qui vont pouvoir se propager sont alors des ondes longitudinales (déformation dans la direction de propagation) unidimensionnelles (selon (Ox)).

- ★ Cette situation modélise bien la propagation d'une onde sonore (longitudinale) dans un solide.

ii) Mise en équation

- ★ Considérons une portion infinitésimale du solide pris entre les abscisses x et $x + dx$. Schéma.

Lors du passage de l'onde, un plan d'abscisse x se décale de sa position au repos. On définit alors l'écart $u(x,t)$ entre la position du plan d'abscisse x lors du passage de l'onde et sa position au repos.

Attention, le modèle effectué ici est un modèle mésoscopique, et non microscopique : on ne s'intéresse pas à la position des atomes, mais directement à la position d'un grand nombre

d'atomes du solide. Cela permet de définir une grandeur $u(x,t)$ continue de l'espace : nous sommes dans le cadre de la physique des milieux continus.

Cet élément de solide est soumis à deux forces :

- la force exercée par la partie droite du solide sur cet élément infinitésimal de solide : $\vec{F}_d(x+dx, t) = \vec{F}(x+dx, t)$.
- la force exercée par la partie gauche du solide sur cet élément infinitésimal : $\vec{F}_g(x, t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{F}_g(x, t) = -\vec{F}_d(x, t) = -\vec{F}(x, t)$.

★ On peut ré-exprimer cette force $\vec{F}(x, t)$ à l'aide de la loi de Hooke. L'allongement de la portion infinitésimale du solide vaut : $\Delta\ell = u(x+dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Donc, la loi de Hooke donne : $\vec{F}(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$.

Ainsi, en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cette portion infinitésimale du solide dans le référentiel du laboratoire galiléen :

★
$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \vec{e}_x = \vec{F}(x+dx, t) - \vec{F}(x, t) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \vec{e}_x$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ainsi, la vitesse de propagation de perturbations longitudinales dans une tige solide est reliée au module d'Young et à la masse volumique par : $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Ordre de grandeur : La masse volumique usuelle d'un non métal est de l'ordre de 10^3 kg m^{-3} , celle d'un métal varie entre 10^3 kg m^{-3} et 10^4 kg m^{-3} . En déduire les ordres de grandeur de la vitesse de propagation des ondes sonores dans un solide.

- ★ $c \sim 3 \times 10^3 \text{ m/s}$ à $1 \times 10^4 \text{ m/s}$ (à comparer avec la vitesse de propagation du son dans l'air 340 m/s et dans l'eau $1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$).

I.3 Analogies entre les phénomènes de propagation dans les solides

Les deux situations mécaniques étudiées portent sur des systèmes n'ayant a priori aucun lien. Pourtant, on aboutit dans les deux cas à une équation de d'Alembert. Quels sont les "ingrédients" pour obtenir une équation de d'Alembert (et donc une onde) dans une situation mécanique ?

Propriétés communes	Corde vibrante	Tige solide
★ Inertie du milieu	Reliée à μ	Reliée à ρ
★ Présence d'une force de rappel	Reliée à T_0	Reliée à E
★ <-> Raideur du milieu		

★ Ainsi, s'il y a déformation du système mécanique, la force de rappel tend à ramener le système dans sa situation au repos, mais du fait de l'inertie, ce retour vers la situation de repos n'est pas instantané. On retiendra que la célérité des ondes dans un milieu mécanique augmente si la raideur du milieu augmente et diminue si l'inertie augmente. (Ce qui est cohérent avec l'interprétation avec les mains.)

I.4 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

Dans la suite, nous allons voir **3 manières différentes d'écrire la solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension** : $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$. Voici la première.

Euler montra que les fonctions de la forme $s_+(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $s_-(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ sont les uniques formes de solutions de l'équation de d'Alembert. Vérifions que ces fonctions sont bien solutions. Posons $u = t - x/c$:

$$\frac{\partial s_+}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{c} f'(u) \implies \frac{\partial^2 s_+}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s_+}{\partial t^2} = f''(u) \quad (\text{I.4})$$

Donc f est bien solution de l'équation de d'Alembert, et il en est de même pour g .

On admet alors que la solution générale de l'équation de d'Alembert à 1D est :

1ère écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (\text{I.5})$$

ou de manière équivalente $s(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$.

L'équation de d'Alembert en elle-même n'impose pas la forme des fonctions f et g , ce sont les conditions aux limites qui l'imposent.

II Deux grandes familles d'ondes

Pour rappels, une onde consiste en le déplacement d'une perturbation à travers un système (matériel ou non). C'est donc un cas particulier de champs avec un couplage spatio-temporel.

II.1 Ondes progressives

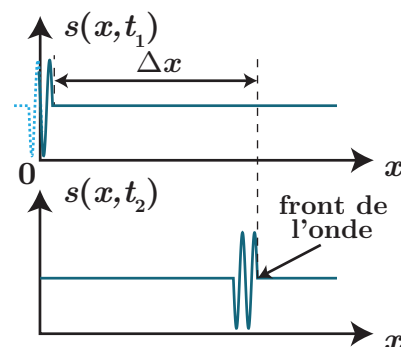
a Définition générale

Une onde est progressive si elle se propage sans déformation.

Montrons que, si une onde s'écrit sous la forme $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, alors cette onde est progressive.

Connaissant l'allure de l'onde à l'instant t_1 , qu'en est-il à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$?

$$\begin{aligned} s(x, t_1 + \Delta t) &= f\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{c}\right) \\ &= f\left(t_1 - \frac{(x - c\Delta t)}{c}\right) \\ &= s(x - c\Delta t, t_1) \end{aligned}$$



c'est-à-dire que l'onde à x et à l'instant $t_1 + \Delta t$ est l'onde qui était auparavant en $x - c\Delta t$ à l'instant t_1 : l'onde s'est propagée sans déformation à la vitesse c dans le sens des x croissants. $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ décrit donc une onde progressive dans le sens des x croissants, et de même $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ décrit une onde progressive dans le sens des x décroissants.

Ainsi, les solutions générales de l'équation de d'Alembert 1D peuvent s'écrire comme une somme de deux ondes progressives contra-propageantes, se propageant à la vitesse c .

★  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est une onde progressive, $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ est une onde progressive, mais $f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ n'est PAS une onde progressive.

b Ondes progressives harmoniques

i) Définition générale

Une onde progressive est harmonique (OPH) ou monochromatique si sa fonction d'onde est sinusoïdale :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

avec ω la pulsation de l'onde, $\vec{k} = k\vec{e}_x$ le vecteur d'onde indiquant la direction et le sens de propagation et φ la phase à l'origine des temps et de l'espace.

Remarque : Ceci est la définition générale d'une OPH. On n'a pas pour le moment spécifié que cette onde devait être solution de l'équation de d'Alembert.

Comme l'onde est progressive harmonique, il y a un lien entre ω , k et la vitesse de propagation de l'OPH :

★
$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi\right) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi\right)$$

On identifie $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase de l'onde.

Interprétation de la vitesse de phase v_φ

On définit la phase totale de l'onde par $\Psi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$. À phase totale égale, les vibrations sont égales. La vitesse de phase est donc la vitesse à laquelle se déplacent des points de phase égale. C'est la vitesse de propagation dans le cas où l'onde est progressive harmonique.

★ Schéma selon x d'une OPH à t_1 , puis à $t_2 > t_1$, en mettant en évidence un point de phase égale sur les deux graphes.

Dans le cas général, la vitesse de phase varie avec la pulsation de l'onde : $v_\varphi(\omega)$.

Remarque : Si l'onde est solution de l'équation de d'Alembert, alors nous retrouverons juste après que $v_\varphi(\omega) = c = \text{cste}$.

Remarque : Il existe une autre démonstration permettant de déterminer l'expression de la vitesse de phase. Elle consiste à dire que l'on cherche la vitesse à laquelle se propage un point de phase $\Psi = \text{cste}$. On différentie alors Ψ :

$$d\Psi = 0 = \omega dt - k dx \Rightarrow v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

ii) Double périodicité

Soit une OPH décrite par $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Elle possède une période temporelle T :

$$\begin{aligned} \forall(x, t) \quad s(x, t+T) = s(x, t) &\iff \cos(\omega t + \omega T - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ \implies \omega T = 2\pi &\iff \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \end{aligned}$$

mais également une période spatiale λ , la longueur d'onde :

$$\forall(x, t) \quad s(x + \lambda, t) = s(x, t) \iff \cos(\omega t - kx - k\lambda + \varphi) = \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{II.1})$$

$$\implies k\lambda = 2\pi \implies \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \quad (\text{II.2})$$

On peut réécrire la longueur d'onde en faisant intervenir la vitesse de propagation de l'OPH :



$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_\varphi}{\omega} = v_\varphi T$$

Cette relation, toujours valable pour une OPH, permet de retrouver le couplage spatio-temporel.

iii) Relation de dispersion

En passant en notations complexes, $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe. On retrouve alors l'intérêt de l'introduction des notations complexes :



$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk \underline{s} \quad (\text{II.3})$$



Dans certains domaines de la physique (mécanique quantique par exemple), on préfère la convention $e^{j(kx - \omega t)}$, ce qui ne change rien au sens physique. Dans ce cas les relations précédentes sont différentes. Il faut donc conserver tout le long d'un raisonnement les mêmes notations (et bien définir le choix que vous faites sur la définition de la notation complexe que vous utilisez).



L'utilisation des grandeurs complexes est à proscrire dès qu'on manipule des produits de fonctions ou des équations différentielles non linéaires !

Une relation de dispersion est une relation reliant ω et k . Cette relation permet donc d'expliciter la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$.

Méthode systématique pour déterminer une relation de dispersion

1. Chercher la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une onde progressive harmonique, et passer en notation complexe.
2. Après avoir injecté cette fonction d'onde dans l'équation d'onde, déterminer le lien entre ω et k .

Exercice : Déterminer la relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert.

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme $\underline{s} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$. On a donc :



$$c^2(-jk)^2 \underline{s} = (j\omega)^2 \underline{s} \implies \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

On a alors deux solutions $k = \pm \frac{\omega}{c}$ (on garde $k = +\omega/c$ si OPH dans le sens des x croissants et $k = -\omega/c$ si OPH dans le sens des x décroissants). On obtient $v_\varphi(\omega) = \pm c = \text{cste}$ pour l'équation de d'Alembert.

Ainsi, une OPH n'est solution de l'équation de d'Alembert que si elle vérifie la relation de dispersion $k = \pm \frac{\omega}{c}$.

Pour une OPH allant dans le sens des x croissants et vérifiant l'équation de d'Alembert, on a donc :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = c \frac{2\pi}{\omega} = cT$$

Cette relation n'est valable que parce que la relation de dispersion est $k = \frac{\omega}{c}$!

iv) Intérêts des OPH



L'intérêt d'introduire les OPH est que l'on peut faire des calculs plus simples en utilisant les notations complexes. Cependant une OPH n'existe pas, car elle serait infiniment étendue dans le temps et l'espace. Mais alors, comment décrire une onde réelle ?

Nous allons pour cela nous servir de l'analyse de Fourier.

Rappels sur l'analyse de Fourier dans le cas d'une fonction $s(t)$ périodique

On peut décomposer tout signal périodique comme une somme de sinusoides. On parle de développement en *série de Fourier* :

Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se décompose de *manière unique* en une somme de sinusoides :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

★

où

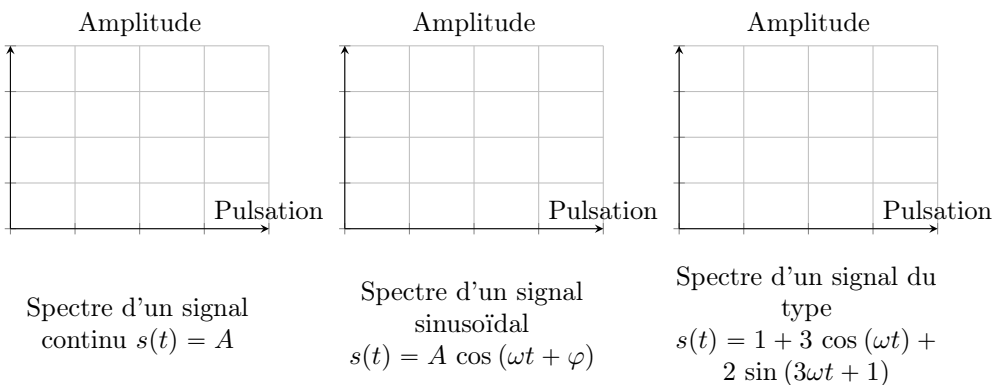
- S_0 est la composante continue du signal, c'est-à-dire sa *valeur moyenne* ;
- la composante $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'*harmonique de rang n* , de pulsation $n\omega$ multiple du fondamental ;
- pour $n = 1$, on parle du *fondamental* du signal périodique.
- φ_n sont les déphasages à $t = 0$ pour chaque harmonique de rang n .

Remarque : La valeur efficace suit le théorème de Parseval : $s_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_n \frac{S_n^2}{2}$.

★

Prendre le temps de rappeler la définition d'une valeur efficace, et de rappeler la définition d'une moyenne. Rappeler la moyenne de $\cos(\omega t + \varphi)$, de $\cos^2(\omega t + \varphi)$, de $\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

Caractériser un signal périodique revient donc à connaître les amplitudes et déphasages pour les fréquences mises en jeu. On peut le représenter graphiquement pour une meilleure lisibilité : on parle de *spectre en amplitude* (resp. en phase) lorsqu'on représente les valeurs S_n (resp. φ_n) en fonction de la pulsation $\omega_n = n\omega$ (ou tout simplement en fonction de n). Il est nécessairement *discret*. Par exemple :



Retour aux ondes : comment décrire une onde réelle ?

- soit le signal est périodique en temps et en espace (pas beaucoup plus réaliste qu'une OPH, sauf si l'onde est construite à partir d'une onde de taille finie par répétition), on peut décomposer en série de Fourier (décomposition unique) :

$$s(x, t) = \sum_{n,p=0}^{+\infty} S_{n,p} \cos(n\omega t \mp pkx + \varphi_{n,p}) \quad (\text{II.4})$$

Pour que l'onde puisse se propager, chacune de ces OPH doit vérifier la relation de dispersion $pk = \frac{n\omega}{v_\varphi(n\omega)}$. On simplifie alors la somme précédente :

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos\left(n\omega\left(t \mp \frac{x}{v_\varphi(n\omega)}\right) + \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos\left(n\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi_n\right)$$

si d'Alembert.

- soit le signal n'est pas périodique, on généralise alors à l'aide de la transformée de Fourier (on admet que l'on peut décomposer, de manière unique, tout signal "fini" quelconque avec une transformée de Fourier) :

$$s(x,t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} \int_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(\omega,k) \cos(\omega t - kx + \varphi(\omega,k)) d\omega dk \quad (\text{II.5})$$

À nouveau, pour que ce signal soit une onde qui puisse se propager, on doit avoir $k = \pm \frac{\omega}{v_\varphi(\omega)}$. D'où la simplification :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= \int_{\omega=0}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{v_\varphi(\omega)}\right) + \varphi(\omega)\right) d\omega \\ &= \int_{\omega=0}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi(\omega)\right) d\omega \quad \text{si équation de d'Alembert} \end{aligned}$$

On parle alors de **paquet d'ondes**, notion qui sera développée dans un prochain chapitre.

2ème écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OPH se propageant dans les deux sens à la célérité c : les OPH constituent alors une base des solutions de l'équation de d'Alembert.

II.2 Ondes stationnaires

a Définition générale

Une onde est dite stationnaire si sa fonction d'onde au point M découple les variables temporelles et spatiales :

$$s(M,t) = f(M)g(t) \quad (\text{II.6})$$

soit à une dimension $s(x,t) = f(x)g(t)$. Il n'y a alors **pas de propagation**.

b Ondes stationnaires harmoniques

i) Définition générale

Une onde stationnaire est harmonique (OSH) si sa fonction d'onde est un produit de deux sinusoides :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi)$$

ii) Résolution de l'équation de d'Alembert par la méthode des variables séparées

Montrons que, si une onde stationnaire est solution de l'équation de d'Alembert, alors cette onde stationnaire est harmonique.

En injectant la forme d'onde stationnaire dans l'équation de d'Alembert à 1D, on aboutit à :

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t) \implies \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad \forall (x,t) \quad (\text{II.7})$$

- ★ en des points où le produit $f(x)g(t)$ ne s'annule pas. On a donc l'égalité d'une fonction de x avec une fonction du temps, ces deux quantités sont constantes, on se retrouve alors à résoudre deux équations :

$$f''(x) - Kf(x) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$g''(t) - c^2 K g(t) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Partant de la seconde équation, on peut éliminer de notre étude les cas $K > 0$ et $K = 0$, car ils impliquent que $g(t) \rightarrow \pm\infty$ ou $g(t) = \text{cste}$, ce qui ne sera pas le cadre d'étude de propagation sans perte et sans amplification. Posons alors $K = -k^2 < 0$, on a alors deux équations d'oscillateurs harmoniques :

★

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \implies f(x) = A \cos(kx + \varphi) \quad (\text{II.10})$$

$$g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 \implies g(t) = B \cos(\omega t + \Psi) \quad (\text{II.11})$$

en posant $\omega = ck$. Ainsi si l'onde stationnaire $s(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert, alors elle s'écrit :

$$s(x,t) = s_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \Psi) \quad (\text{II.12})$$

iii) Ventres et nœuds

Par définition :

- les nœuds de l'onde stationnaire sont tels que $s(x,t) = 0, \forall t$, impliquant

$$\cos(kx + \varphi) = 0 \iff kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (\text{II.13})$$

c'est-à-dire, en notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que deux nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$;

- les ventres de l'onde stationnaires sont les lieux où l'amplitude de s est maximale $\forall t$:

$$\cos(kx + \varphi) = \pm 1 \iff kx + \varphi = n\pi \iff x = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (\text{II.14})$$

Ainsi deux ventres plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$, et un ventre et un nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/4$.

iv) Relation entre les ondes stationnaires et les ondes progressives

Il existe un lien entre ces deux types de solutions. En effet, une onde stationnaire est la somme de deux ondes progressives contra-propageantes :

$$s_0 \cos(\omega t + \Psi) \cos(kx + \varphi) = \frac{s_0}{2} \left(\cos(\omega t - kx + \Psi - \varphi) + \cos(\omega t + kx + \Psi + \varphi) \right) \quad (\text{II.15})$$

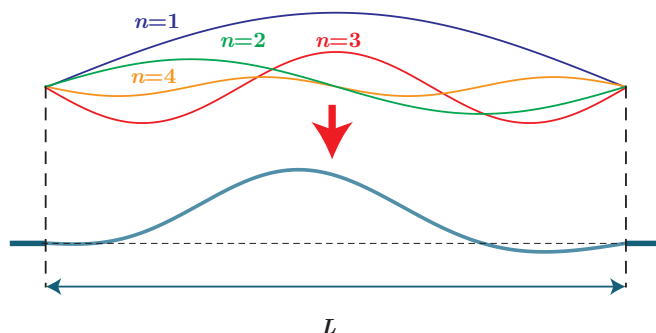
À l'inverse, une onde progressive est la somme de deux ondes stationnaires :

$$s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (\text{II.16})$$

Ainsi, comme les OPH constituaient une base des solutions de l'équation de d'Alembert, on en déduit que les OSH constituent, elles aussi, une base de l'équation de d'Alembert :

3ème écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OSH vérifiant la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$: les OSH constituent alors une base des solutions de l'équation de d'Alembert.



On peut alors se demander quelle base choisir entre les OPH et les OSH, au vu de cette équivalence. Le choix se fait souvent en lien avec la situation physique rencontrée, en particulier les conditions aux limites imposées au système.

III Conséquences des conditions aux limites : exemple de la corde vibrante

III.1 Régime libre

i) Système étudié

Considérons une corde vérifiant une équation de d'Alembert 1D, fixée en ses deux extrémités.

Elle vérifie deux **conditions aux limites** :

$$\forall t, \quad y(0, t) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\forall t, \quad y(L, t) = 0 \quad (\text{III.2})$$

★ À $t = 0$, on déforme la corde : on impose alors des **conditions initiales** :

$$y(x, 0) = a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) \quad (\text{III.3})$$

où a et b sont deux fonctions définies sur $[0; L]$.

ii) Modes propres

Comme les deux CL sont des nœuds de vibration, on va chercher une solution sous forme d'OSH :

$$y(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.4})$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad y(0, t) = 0 \iff \forall t, \quad C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) = 0 \iff \Psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$\iff y(x, t) = -C \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (\text{III.6})$$

en choisissant $\Psi = +\frac{\pi}{2}$.

$$\forall t, \quad y(L, t) = 0 \iff \forall t, \quad -C \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\star \implies kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \implies \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad (\text{III.8})$$

soit avec $\omega = ck$, une valeur de n définit une pulsation associée $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, une fréquence

$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$, où $f_1 = \frac{c}{2L}$ est le fondamental. Enfin les longueurs d'onde vérifient

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}.$$

Ainsi les seules OSH qui sont compatibles avec les CL ont la forme déterminée ci-dessus : on appelle ces OSH des **modes propres** de la corde vibrante.

Modes propres d'une corde vibrante

Par définition, un **mode propre** est une OSH solution de l'équation de d'Alembert et vérifiant les conditions aux limites.

Pour une corde de longueur L , célérité c maintenue entre ses deux extrémités, les modes

propres constituent une base particulière de solutions de l'équation de d'Alembert 1D :

$$y_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (\text{III.9})$$

Remarque : Si on avait choisi $\Psi = -\frac{\pi}{2}$, on aurait écrit $y(x,t) = C \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$, ce qui a pour seul impact de modifier le signe de la constante C dans la résolution. Quand vous avez plusieurs valeurs possibles pour une phase à l'origine, vous pouvez choisir la valeur que vous souhaitez sans perdre de solution physique.

Remarque : D'un point de vue pragmatique, si un exercice vous demande de seulement déterminer les fréquences des modes propres, il est beaucoup plus rapide de se baser sur un schéma :

★ Schéma de la corde, détermination de λ_n , et donc de f_n

iii) Solution du problème

La solution générale pour une corde tendue entre ses deux extrémités est donc une combinaison linéaire des modes propres ainsi obtenus :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (\text{III.10})$$

On détermine alors les constantes $\{C_n, \varphi_n\}$ ou $\{A_n, B_n\}$ avec les conditions initiales

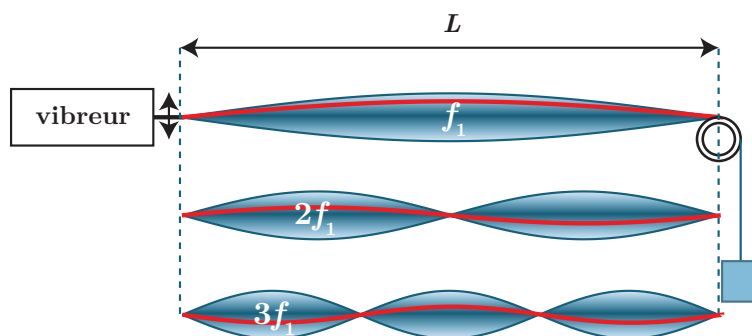
$$y(x,0) = a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (\text{III.12})$$

c'est-à-dire que les A_n et $B_n \omega_n$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ et $b(x)$.

III.2 Régime forcé

Au lieu d'imposer des conditions initiales à la corde, on peut également imposer une condition aux limites périodique : on peut par exemple attacher l'extrémité $x = 0$ à un vibreur imposant une excitation sinusoïdale à la pulsation ω_0 , tout en laissant l'autre extrémité fixe. Ainsi $y(0,t) = a \cos(\omega_0 t)$ et $y(L,t) = 0, \forall t$. C'est l'expérience de la corde de Melde :



Comme l'une des CL est un nœud de vibration, on cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.13})$$

★ CL n°1 : en $x = 0$:

$$\forall t \quad s(x=0,t) = a \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) \implies \omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad a = A \cos \Psi \quad (\text{III.14})$$

Ainsi, en régime établi, $\omega = \omega_0$: une pulsation a priori inaccessible en régime libre devient possible en régime forcé ! On peut très bien avoir $\omega_0 \neq n\omega_1$!!!

CL n°2 : en $x = L$:

$$0 = A \cos(\omega t) \cos(kL + \Psi) \implies kL + \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL \quad (\text{III.15})$$

On choisit $\Psi = \frac{\pi}{2} - kL$ D'où :

$$\cos(kx + \Psi) = \cos\left(k(x - L) + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(k(x - L))$$

et de manière similaire $\cos(\Psi) = \sin(kL)$. En réinjectant dans la solution complète :

$$y(x,t) = \frac{a}{\cos(\Psi)} \cos(\omega t) \cos(kx + \Psi) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L - x))}{\sin(kL)} \quad (\text{III.16})$$

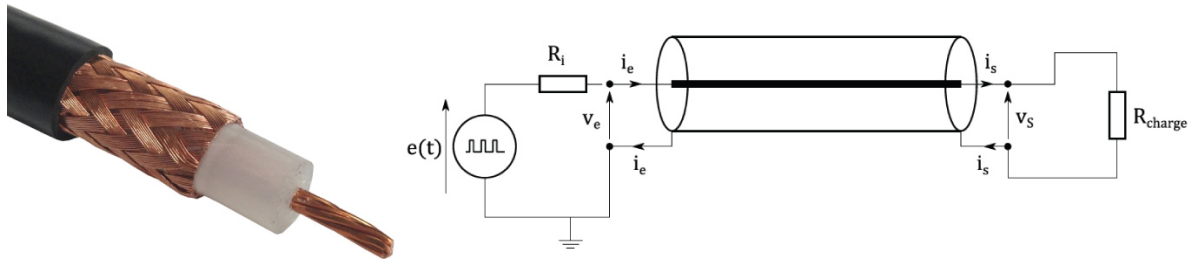
On observe alors en particulier que pour $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire pour $\omega_0 = n\omega_1$, $y \rightarrow +\infty$: il y a résonance de la corde de Melde pour une pulsation de vibreur égale à la pulsation d'un des modes propres définis précédemment en régime libre. En pratique, à cause des frottements et de la non-linéarité ($\alpha \ll 1$ plus vérifié), l'amplitude ne diverge pas.

Exercices

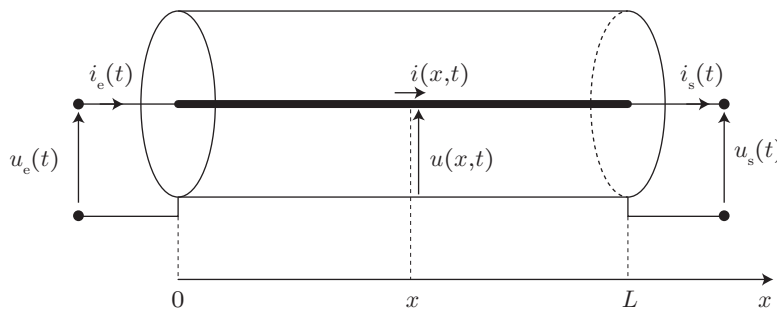
Ex. 1 Équation d'onde dans un câble coaxial

On cherche à déterminer une équation de d'Alembert dans le domaine de la propagation des signaux électriques.

Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux sur de longues distances (antennes de transmissions, TP...). Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.

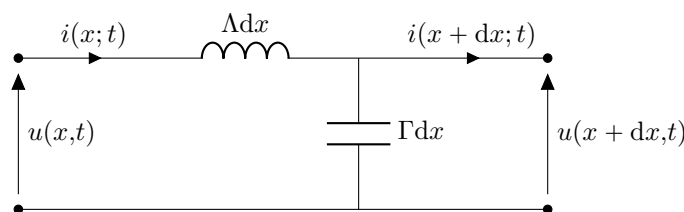


La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs. Comme on étudie la propagation de signaux électriques, on ne se place pas dans le cadre de l'ARQS. On note alors $i(x,t)$ et $u(x,t)$ la tension et le courant à une abscisse x du câble :



1. Rappeler l'hypothèse de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) en électronique dans le cas d'une tension périodique de fréquence f . A.N. : Calculer la longueur maximale d'un câble ethernet pour que l'ARQS soit vérifiée, sachant que dans ces câbles, $f \sim 10$ MHz.

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire dx . On propose alors un modèle sans perte (aucune résistance électrique des câbles modélisée), appelée modèle à constantes réparties :



où Γdx est la capacité, Λdx est l'inductance. Les ordres de grandeurs de la capacité linéique et de l'inductance linéique sont : $\Gamma = 100 \text{ pF m}^{-1}$ et $\Lambda = 0.25 \text{ } \mu\text{H m}^{-1}$.

2. Pourquoi, dans un câble coaxial, apparait-il des effets capacitifs (modélisés par Γ) et des effets inductifs (modélisés par Λ) ?
3. En appliquant la loi des mailles, déterminer une relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.

4. (a) En appliquant la loi des nœuds, montrer que :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$$

- (b) En réalisant un développement limité de $\frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$, montrer que l'équation précédente se simplifie à l'ordre le plus bas en dx et donner la relation simplifiée entre $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

5. En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par la tension $u(x,t)$. Exprimer puis calculer numériquement la vitesse de propagation de l'onde électrique. Commenter.

Correction de l'exercice 1

- ARQS : la distance caractéristique de variation de l'onde électrique est bien plus grande que la longueur du circuit $L \ll \lambda = \frac{c}{f}$. A.N. : on suppose que $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, donc $L \ll 30 \text{ m}$, facilement mis en défaut dans la vie quotidienne (circuit éthernet du lycée par exemple).
- Un câble coaxial est un ensemble de deux conducteurs électriques en regard, séparés par un isolant : on reconnaît la structure d'un condensateur cylindrique ! Des charges peuvent s'accumuler sur les armatures, générant des effets capacitifs. Mais un câble coaxial est aussi une très longue spire parcourue par un courant : des effets inductifs sont aussi présents. La modélisation à constantes réparties du câble coaxial est donc liée à ces effets.
- Remarque :** Comme on étudie désormais une portion infinitésimale du circuit, l'ARQS s'applique sur cette portion, et on peut appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds usuelles. On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en dx :

$$u(x,t) = \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+dx,t) \implies \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (\text{Ex.1})$$

4. (a) La loi des nœuds, avec le courant traversant le condensateur :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \quad (\text{Ex.2})$$

(b)

$$\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} dx$$

avec le dernier terme qui donnera un ordre 2 en dx quand on le ré-injectera dans l'équation précédente : on le néglige.

Donc :

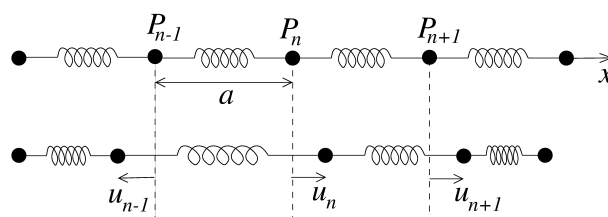
$$\implies \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (\text{Ex.3})$$

5. En dérivant la première par rapport à x et la deuxième par rapport à t , on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \implies \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (\text{Ex.4})$$

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \sim 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Cette vitesse est proche de la vitesse de la lumière dans le vide !

Ex. 2 Modèle microscopique de la propagation du son dans un solide



On considère une chaîne rectiligne infinie de points matériels P_n identiques, de masse m , de position x_n , reliés par des ressorts identiques de longueur à vide a et de raideur K .

À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_n = na$.

On note $u_n(t)$ le déplacement du point P_n par rapport à sa position d'équilibre.

1. Montrer que

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{K}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

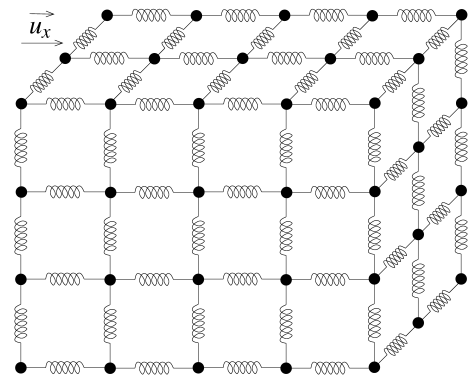
2. Approximation continue. On considère le cas où la distance a entre deux points successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des u_n . On peut alors modéliser les déplacements de l'ensemble des points par une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $u(x,t)$, qui coïncide avec les fonctions $u_n(t)$ lorsque $x = na$: $u(x = na, t) = u_n(t)$. En effectuant des développements limités de $u_{n+1}(t) = u(na + a, t)$ et de $u_{n-1}(t) = u(na - a, t)$, montrer que $u(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert.
3. En déduire la vitesse de propagation des ondes dans la chaîne en fonction de K , a et m . On précisera également le type d'onde qui se propage.

Ondes sonores dans un solide

considère un solide de module d'Young E et de masse volumique μ , dans lequel les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles, en réseau cubique simple de paramètre de maille a , reliées par des ressorts identiques de raideur K et de longueur à vide a .

On considère une onde plane longitudinale se propageant selon la direction $\vec{e}_x$: le déplacement des atomes ne dépend que de x et est dirigé selon $\vec{e}_x$.

4. On s'intéresse à l'atome n . Ré-exprimer, dans le cadre de l'approximation des milieux continus, la force exercée par l'atome $n + 1$ sur l'atome n . En déduire l'expression du module d'Young en fonction des caractéristiques microscopiques du solide.
5. Déterminer la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique. Faire l'application numérique pour un acier de masse volumique $\mu = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.



Validation a posteriori de l'approximation des milieux continus

4. Etablir la relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert. En déduire l'intervalle de variation de la longueur d'onde des ondes acoustiques audibles dans l'acier.
5. En déduire que l'échelle caractéristique spatiale de variation de $u(x,t)$ est largement supérieure à l'ordre de grandeur de la distance a entre deux atomes.

Correction de l'exercice 2

1. Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la masse n soumise à deux forces de rappel de la part des ressorts de gauche et de droite, dans le référentiel galiléen du laboratoire, projeté selon l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(u_{n+1} - u_n) - K(u_n - u_{n-1}) \iff \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{K}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (\text{Ex.5})$$

2. Dans l'approximation continue, à l'ordre 2 : $u_{n+1} = u(na + a, t) \simeq u(na, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t)\frac{a^2}{2}$, de même $u_{n-1} = u(na, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t)\frac{a^2}{2}$, soit en injectant dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Ex.6})$$

c'est-à-dire une équation de d'Alembert, en posant $c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$.

3. $c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, car la direction de propagation est la même que celle de la déformation.

4. La force exercée sur la masse n par l'atome $n + 1$ est, de même qu'à la Q.1 : $\vec{F}_{d,n} = K(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$. Dans le cadre de l'approximation continue, le DL de u_{n+1} permet d'écrire : $\vec{F}_d(x,t) = K \frac{\partial u}{\partial x} a \vec{e}_x$.

On reconnaît quasiment une loi de Hooke en identifiant $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$ à la variation relative de longueur du cristal. Il reste à étudier la force exercée sur l'ensemble du plan de section S par l'ensemble des atomes situés à droite de ce plan : $\vec{F}_{d,plan}(x,t) = \frac{S}{a^2} \times \vec{F}_d(x,t) = \frac{KS}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$ car il y a S/a^2 chaînes d'atomes sur la

section S . Ainsi, par identification : $E = \frac{K}{a}$.

5. On peut exprimer la célérité en fonction du module d'Young :

$$c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{Ea^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = 5.16 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{Ex.7})$$

6. Pour établir la relation de dispersion, cherchons la solution sous la forme d'une OPH : $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$. En injectant dans l'équation de d'Alembert, on obtient :

$$-\omega^2 = c^2(-k^2) \iff k = \pm \frac{\omega}{c}$$

On peut traduire cette relation de dispersion en terme de longueur d'onde λ et de fréquence f : $\lambda = \frac{c}{f}$.

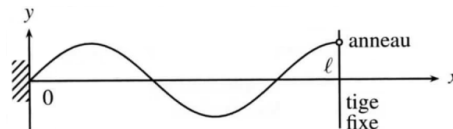
Dans l'audible, $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$, donc dans l'acier $\lambda \in [0.26 \text{ m}, 2.6 \times 10^2 \text{ m}]$.

7. La longueur caractéristique de variation de $u(x,t)$ est λ ! Il s'agit en effet de la période spatiale de $u(x,t)$. (Pour s'en convaincre, on peut aussi remarquer que $\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \sim \frac{u}{\text{long. caract. variation}} = -j \frac{2\pi}{\lambda} \underline{u}$.)

Ici, il est très clair que $\lambda \gg a \sim 1 \times 10^{-10} \text{ m}$. L'approximation des milieux continus est donc vérifiée a posteriori.

Ex. 3 Modes propres d'une corde avec une extrémité libre

Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. Le présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T . L'anneau est de masse quasi nulle.



1. (a) Quelle est la conditions à la limite en $x = 0$?
 (b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'anneau et en déduire la condition à la limite en $x = \ell$.
2. Quels sont les modes propres de cette corde ?

Correction de l'exercice 3

1. (a) En $x = 0$, on a la condition aux limites $y(0,t) = 0, \forall t$.
 (b) En $x = \ell$, on n'a aucune contrainte sur $y(\ell,t)$, par contre on en a une sur la vitesse. Appliquons le PFD sur l'anneau dans le référentiel terrestre galiléen, en le considérant de masse nulle :

$$\vec{0} = \vec{F}_{corde \rightarrow anneau} + \vec{F}_{tige \rightarrow anneau} = \vec{T}(x = \ell) + F_{tige \rightarrow anneau} \vec{e}_x$$

La direction suivant $\vec{e}_x$ de la force de la tige sur l'anneau se justifie par le fait que l'anneau glisse sans frottement : la réaction de la tige sur l'anneau est donc purement normale à la surface de la tige.

Quelle CL cela impose-t-il sur $y(x,t)$? On introduit (comme dans le cours) l'angle $\alpha(x,t)$ entre l'horizontale et la tangente à la corde en un point $M(x,y)$. En $x = \ell$ et à l'ordre 1 en α (petits mouvements transverses) :

$$\vec{T}(x = \ell, t) = T(x = \ell, t) \cos(\alpha) \vec{e}_x + T(x = \ell, t) \sin(\alpha) \vec{e}_y \simeq T(x = \ell, t) \vec{e}_x + T(x = \ell, t) \alpha(x = \ell, t) \vec{e}_y$$

Ainsi, on obtient nécessairement :

$$\alpha(\ell, t) = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t)$$

2. On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (\text{Ex.8})$$

Avec $y(0,t) = 0$, on a donc $\cos(\Psi) = 0$, soit $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Prenons $\Psi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x = \ell, t) = Ak \cos(\omega t + \varphi) \cos(k\ell) = 0 \quad (\text{Ex.9})$$

soit $\cos(k\ell) = 0$, ce qui se traduit par $k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\omega = \frac{\pi c}{2\ell} + n\frac{\pi c}{\ell}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 4 (Ecrit E3A PSI 2021) Figures de Chladni

On convient d'appeler membrane idéale une structure mince, c'est-à-dire de faible épaisseur devant ses autres dimensions, où la raideur est due exclusivement à une précontrainte, c'est-à-dire à une tension surfacique appliquée sur son pourtour. On peut dire que les membranes sont les équivalents à deux dimensions des cordes. Elles se retrouvent dans les diaphragmes de microphones, les peaux de tambours et timbales...

Les figures dites de Chladni sont une découverte célèbre de Ernst Florence Friedrich Chladni (1756-1827), musicien et physicien de Leipzig. Pour les produire, Chladni saupoudrait une plaque métallique carrée avant de la faire vibrer avec un archet. En frottant le bord de la plaque à différents endroits, Chladni a su produire des sons différents. De plus, sous l'action de la vibration, la poudre se déplaçait pour s'accumuler aux points stationnaires de la plaque, donnant ainsi des figures caractéristiques qui portent son nom. On peut aujourd'hui faire vibrer une plaque plus simplement en utilisant un haut-parleur, ce qui permet un contrôle plus précis de la fréquence de vibration, grâce au générateur de tension. On donne ci-dessous quelques figures de Chladni pour une plaque vibrante, les lignes noires représentant les zones de l'espace où la poudre s'est accumulée.

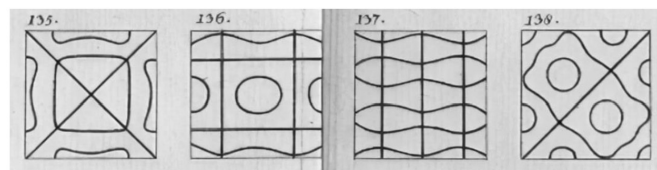


Figure 3 - Quelques figures de Chladni

1. Que représentent les lignes noires sur les figures, du point de vue de l'onde sonore de la membrane ?

Soit une membrane au repos dans le plan (Oxy) . On note z le déplacement transversal de la membrane. En négligeant toute force extérieure s'exerçant sur la membrane, on montre que l'équation de propagation est, en coordonnées cartésiennes, pour $z = z(x,y,t)$:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

où $c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ est la célérité des ondes sonores dans la membrane, τ la tension par unité de longueur de la membrane et μ la masse surfacique de la membrane.

On considère une membrane rectangulaire de longueur a selon (Ox) et b selon (Oy) , conformément à la figure 4 ci-dessous. On note Γ le contour de la membrane.

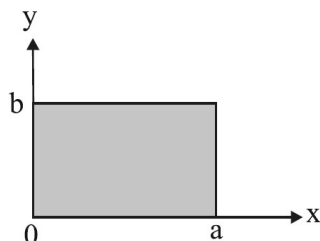


Figure 4 - Modèle géométrique de la membrane

La membrane est repliée et étirée uniformément sous le contour Γ de sorte que l'on impose comme conditions limites $z(x,y,t) = 0$ pour $(x,y) \in \Gamma$.

On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme de fonctions à variables séparées : $z(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$

2. Montrer que cela implique, avec α et β deux constantes réelles positives :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \pm \alpha^2 X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \beta^2 Y(y) = 0$$

3. Montrer que, quels que soient α et β réels positifs, les solutions de $\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha^2 X(x) = 0$ et $\frac{d^2 Y}{dy^2} - \beta^2 Y(y) = 0$ ne satisfont pas aux conditions aux limites, à moins d'avoir identiquement $X(x) = 0$ et $Y(y) = 0$, ce qui ne correspond à aucune solution physique.
4. En prenant en compte les conditions aux limites, donner alors les solutions physiquement possibles pour $X(x)$ et $Y(y)$ en fonction de deux entiers strictement positifs n et m , des paramètres géométriques a et b de la figure 4, et de deux paramètres d'intégration X_0 et Y_0 .
5. Montrer que l'équation en $T(t)$ est de la forme $\frac{d^2 T}{dt^2} + (\alpha^2 + \beta^2)c^2 T(t) = 0$ et que les pulsations propres du système sont de la forme $\omega_{nm} = \pi c \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$, où n et m sont les entiers positifs introduits à la question précédente.
6. Représenter les figures de Chladni obtenues respectivement pour :
- $n = 1$ et $m = 2$;
 - $n = 2$ et $m = 1$;
 - $n = m = 2$.

Correction de l'exercice 4

1. La poudre s'accumule dans les zones de l'espace où la membrane ne vibre pas, c'est-à-dire dans les nœuds de l'onde sonore.
2. On injecte la solution à variables séparées (onde stationnaire) dans l'équation d'onde fournie :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y(y) T(t) + \frac{d^2 Y}{dy^2} X(x) T(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} X(x) Y(y) = 0$$

En divisant par $z = X(x)Y(y)T(t)$ en tous points où ceci est non nul, on obtient :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

Ceci doit être valable $\forall x, y, t$. En particulier, on peut fixer y et t , tout en faisant varier x , montrant ainsi que $\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cste} = A \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} - AX(x) = 0$, avec A a priori de signe quelconque : $A = \pm \alpha^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$. En procédant de même, on montre que :

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - AX(x) = 0 & \text{avec } A = \pm \alpha^2 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - BY(y) = 0 & \text{avec } B = \pm \beta^2 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} - c^2(A + B)T(t) = 0 \end{cases}$$

3. Etudions d'abord l'équation différentielle sur $X(x)$. On doit distinguer deux cas : $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

Cas 1 : $\alpha = 0$:

On doit alors résoudre $\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$. On en déduit que $X(x) = A_1 x + A_2$. Les conditions limites $X(0) = 0$ et $X(a) = 0$ impliquent alors $A_2 = 0$ et $A_1 = 0$. On aurait alors $X(x) = 0$, ce qui constitue une solution non physique.

Cas 2 : $\alpha > 0$:

La solution est alors $X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$. La condition limite en $x = 0$ implique que $A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1$. Ainsi, $X(x) = A_1 (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) = 2A_1 \sinh \alpha x$. La condition limite en $x = a$ implique $A_1 = 0$. On aurait alors $X(x) = 0$, ce qui constitue une solution non physique.

Le raisonnement est identique pour $Y(y)$.

Ainsi, le seul moyen d'obtenir une solution physique est d'imposer que $A = -\alpha^2 < 0$ et $B = -\beta^2 < 0$ dans les équations différentielles.

4. Les seules solutions physiques sont solutions de

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 & \text{avec } \alpha > 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 & \text{avec } \beta > 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2(\alpha^2 + \beta^2)T(t) = 0 \end{cases}$$

La résolution donne $X(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x)$. La condition limite en $x = 0$ donne $A_1 = 0$. Ainsi, en posant finalement $A_2 = X_0$, $X(x) = X_0 \sin(\alpha x)$. La condition limite en $x = a$ donne $\sin(\alpha a) = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$ avec n un entier relatif. Comme $\alpha > 0$, n est même un entier naturel non nul.

On procède exactement de même pour $Y(y)$ et on obtient ainsi, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} X(x) = X_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \end{cases}$$

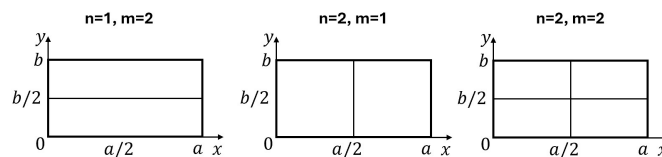
5. On a déjà trouvé l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ à la question précédente. Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_{nm} = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$$

en injectant les expressions précédemment trouvées pour α et β .

Il s'agit bien des pulsations des modes propres, car l'onde est cherchée sous forme d'onde stationnaire.

6. Par exemple, pour $m = 2$, on a $Y(b/2) = 0$. On trace alors les lieux des nœuds de l'onde stationnaire :



Remarque : Les figures de Chladni données en figure 3 sont obtenues avec une combinaison linéaire de plusieurs modes propres.

Ex. 5 Décomposition en modes de vibration pour une corde de guitare

Le problème de la corde vibrante de longueur L fixée en deux points et soumise à une déformation initiale est un problème très général en physique des ondes (cavité électromagnétique, laser, ...). On suppose qu'une corde vibrante vérifie l'équation de d'Alembert. On a montré que les modes propres formaient une base de solutions de l'équation de d'Alembert. On cherche dans la suite, pour une corde fixée en ses deux extrémités, une solution de la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \sin(nkx) \quad (\text{Ex.10})$$

où $\omega = \frac{\pi c}{L}$ et $k = \frac{\pi}{L}$. Étudions le cas d'une corde de guitare pincée de sorte qu'à l'instant initial (α et β sont des constantes) :

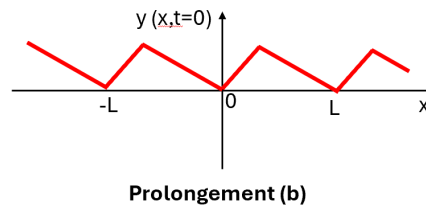
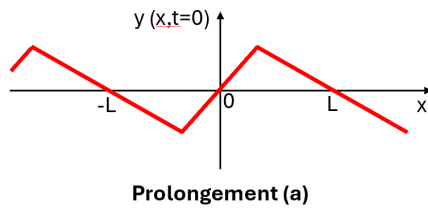
$$y(x, t = 0) = \frac{\beta}{\alpha} x \quad \text{pour } x \in [0; \alpha L] \quad \text{et} \quad y(x, t = 0) = \frac{\beta(L - x)}{1 - \alpha} \quad \text{pour } x \in [\alpha L; L] \quad (\text{Ex.11})$$

On lâche la corde sans vitesse initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.

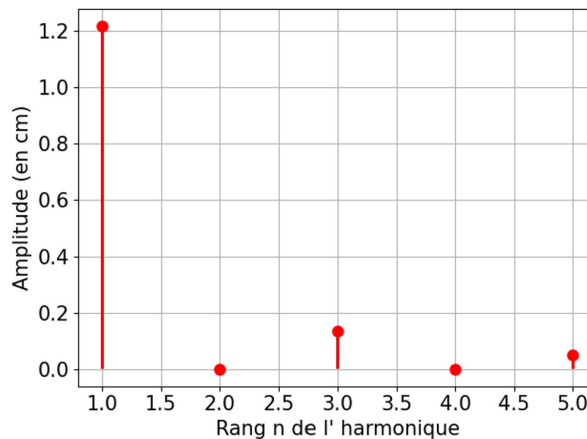
1. Montrer que, pour tout n , les coefficients b_n sont nuls.

On souhaite désormais déterminer les coefficients a_n . Pour cela, on va utiliser une décomposition en série de Fourier. Néanmoins, il est nécessaire que la fonction soit périodique pour la décomposer en série de Fourier. On va donc prolonger la fonction $y(x, t)$ sur l'intervalle spatial $] -\infty; +\infty[$.

On propose ci-dessous deux prolongements de la fonction $y(x, t = 0)$.



- En utilisant un argument de symétrie, déterminer quel prolongement de la fonction $y(x, t = 0)$ convient pour pouvoir décomposer en série de Fourier sous la forme $y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx)$.
- Dans cette question, on s'intéresse au cas particulier où la corde est initialement pincée en son milieu ($\alpha = \frac{1}{2}$).



- On donne ci-dessus le spectre en amplitude de la fonction prolongée $y(x, t = 0)$ dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta L = 1.5$ cm (on peut par exemple calculer ce spectre à l'aide de fonctions Python). Donner les valeurs absolues des coefficients a_n . Que peut-on dire concernant les harmoniques paires ?
 - Démontrer le résultat observé pour les harmoniques paires en remarquant que la fonction prolongée $y(x, t = 0)$ vérifie la symétrie de glissement $y(x, t = 0) = -y(x - L, t = 0)$.
- On admet que le calcul de a_n donne l'expression suivante : $a_n = \frac{2\beta L \sin(\alpha n\pi)}{\alpha(1 - \alpha)n^2\pi^2}$. Quelle différence de timbre y a-t-il à jouer en pinçant la corde en son milieu plutôt qu'au dessus de la rosace de la guitare ?
 - Pour changer la note sur une même corde, disons la seconde corde du La à 110 Hz, un guitariste peut appuyer le doigt sur une case entre deux frettes. En se contentant d'effleurer la corde au quart de sa longueur, il peut également obtenir une nouvelle note correspondant au diapason de référence à 440 Hz. Expliquer pour chaque cas la raison du changement de hauteur de la note, en insistant sur la différence physique entre ces deux cas.

Correction de l'exercice 5

- En utilisant la condition initiale de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n k \sin(nkx) \quad (\text{Ex.12})$$

donc par unicité du développement en série de Fourier, $b_n = 0, \forall n$.

- L'autre condition initiale sur la position de la corde conduit à :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx) \quad (\text{Ex.13})$$

Or une telle décomposition en série de Fourier signifie une fonction impaire du fait du sinus. Donc on prolonge la fonction $y(x, t = 0)$ de manière impaire sur $[-L; 0]$ (en traçant l'antisymétrique par rapport à l'axe $x = 0$), puis on la rend périodique pour pouvoir calculer la transformée de Fourier. Le prolongement correct est donc le prolongement (a).

3. (a) On lit sur le spectre : $a_1 = 1.2 \text{ cm}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0.15 \text{ cm}$, $a_4 = 0$ et $a_5 = 0.05 \text{ cm}$. Les autres coefficients sont négligeables devant a_1 . Il semble que les harmoniques paires ne soient pas excitées lorsque la corde est pincée au milieu de sa longueur.
- (b) En utilisant le développement en série de Fourier, la symétrie de glissement donne :

$$\sum a_n \sin(nkx) = - \sum a_n \sin(nkx - n\pi) = \sum (-1)^{n+1} a_n \sin(nkx)$$

Par unicité du développement en série de Fourier, on en déduit que $\forall n$, $a_n = (-1)^{n+1} a_n$, ce qui implique, pour n pair, que $a_n = -a_n \iff a_n = 0$. On ne peut rien conclure de la symétrie de glissement pour n impair.

4. NB : pour calculer a_n , on se sert l'intégrale suivante : $a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, t=0) \sin(nkx) dx$.

Si on pince la corde en son milieu, on prend donc $\alpha = \frac{1}{2}$, donc $a_n = \frac{8\beta L \sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2\pi^2}$, c'est-à-dire que l'on n'aura que les harmoniques impaires $n = 1, 3, 5, \dots$, alors qu'en jouant au dessus de la rosace de la guitare, on aura également les harmoniques paires (par exemple pour $\alpha = \frac{1}{4}$, le sinus ne s'annulera par exemple que pour $n = 4$, puis $n = 8$, etc).

5. Si on modifie la longueur de la corde, on va modifier les différents modes propres, ce qui explique le changement de hauteur. Tandis que si on effleure la corde au quart de sa longueur, tout en excitant la corde, on impose un nœud de position en ce point : on excite donc un mode qui n'est pas le fondamental à 110 Hz, mais les harmoniques compatibles avec ce nœud, en l'occurrence le mode $n = 4$, $n = 8$, etc. On a donc augmenté d'un facteur 4 la fréquence du son produit.