

# Ondes électromagnétiques dans le vide et réflexion entre deux DLHI

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques</b>	<b>2</b>
I.1	Équations de Maxwell dans le vide . . . . .	2
I.2	Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques . . . . .	2
I.3	Domaines de fréquences des ondes électromagnétiques . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Exemples de solution : ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OPPH)</b>	<b>3</b>
II.1	Fonction d'onde d'une OPPH . . . . .	3
II.2	Relation de dispersion de l'équation de d'Alembert . . . . .	5
II.3	Structure d'une OPPH . . . . .	6
II.4	Énergie transportée . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Polarisation des OPPH</b>	<b>8</b>
III.1	OPPH polarisée ou non polarisée ? . . . . .	8
III.2	Cas particulier de la polarisation rectiligne . . . . .	9
III.3	Cas général d'une onde totalement polarisée : polarisation elliptique . . . . .	12
III.4	Cas particulier de la polarisation circulaire . . . . .	13
III.5	Synthèse sur la polarisation des OPPH . . . . .	14
<b>IV</b>	<b>Réflexion et transmission à l'interface entre deux DLHI transparents</b>	<b>15</b>
IV.1	Propagation dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope (DLHI) transparent . . . . .	15
IV.2	Position du problème : onde incidente à une interface entre deux milieux . . . . .	16
IV.3	Conséquence du changement de milieu de propagation . . . . .	17
	<b>Exercices</b>	<b>21</b>

## Questions de cours

- Démonstration de l'équation de d'Alembert à 3D vérifiée par les champs électromagnétiques. Célérité des ondes EM dans le vide.
- Structure d'une onde plane progressive harmonique.
- Vecteur de Poynting dans le cas d'une onde plane progressive harmonique et densité volumique d'énergie. Oug de flux surfacique moyen.
- Présentation des différents types de polarisation. Loi de Malus.
- Onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement en incidence normale à l'interface entre deux diélectriques linéaires homogènes et isotropes : calcul des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. Interprétation.

*Prise de notes* : Il est connu qu'à des champs électromagnétiques est associé le concept d'onde : on utilise le vocabulaire courant (longueur d'onde, fréquence, célérité). Mais pour le moment, nous n'avons pas démontré qu'il existait des **ondes EM** : comment faire ? -> Equation de d'Alembert. Nous allons nous appuyer sur les équations de Maxwell pour justifier que le champ électrique comme le champ magnétique sont solutions d'une équation de d'Alembert.

★

Pour cela, et c'est une nouveauté par rapport au chapitre d'EM, on va totalement considérer le couplage électro-magnétique imposé par les équations de Maxwell (pas d'ARQS magnétique, pas de régime stationnaire). On s'attachera aussi à décrire comment s'exerce ce couplage en pratique sur un exemple d'onde : l'OPPH.

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Montrer que les équations de Maxwell dans le vide imposent que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont solutions d'une équation de d'Alembert 3D.
2. Différencier la direction du champ  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  (direction de polarisation) de la direction de propagation.
3. Décrire la structure locale d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique (couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ).
4. Maths : Retrouver rapidement l'action des opérateurs d'analyse vectorielle ( $\vec{\text{rot}}$ ,  $\text{div}$ ,  $\Delta$ ) sur un champ en notation complexe.

## I Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques

### I.1 Équations de Maxwell dans le vide

Rappelons les quatre équations de Maxwell particularisées au cas du vide, c'est-à-dire un milieu sans charges ni courants :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

### I.2 Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques

Comme on cherche à obtenir une équation de d'Alembert pour  $\vec{E}$  et une pour  $\vec{B}$ , il est nécessaire de découpler les équations associées à chaque champ. On utilise alors une propriété fort utile des opérateurs vectoriels (à connaître) :  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} = \text{grad div} - \Delta$ .

Équation de propagation sur  $\vec{E}$  :

on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, en permutant les opérateurs de dérivées temporelle et spatiale (Schwarz) :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \iff \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{I.1})$$

★

en utilisant  $\text{div } \vec{E} = 0$  et l'équation de Maxwell-Ampère. Cela conduit à :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}} \quad (\text{I.2})$$

où l'on reconnaît une équation de d'Alembert à 3D, en introduisant la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

**Exercice :** Obtenir de la même manière l'équation de propagation sur le champ magnétique.

On part de l'équation de Maxwell-Ampère, où l'on applique également l'opérateur rotationnel :

$$\star \quad \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = +\varepsilon_0\mu_0 \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \iff \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{E}) = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (\text{I.3})$$

en utilisant  $\text{div } \vec{B} = 0$  et l'équation de Maxwell-Faraday. Cela conduit également à :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \Delta \vec{B}} \quad (\text{I.4})$$

### Interprétations :

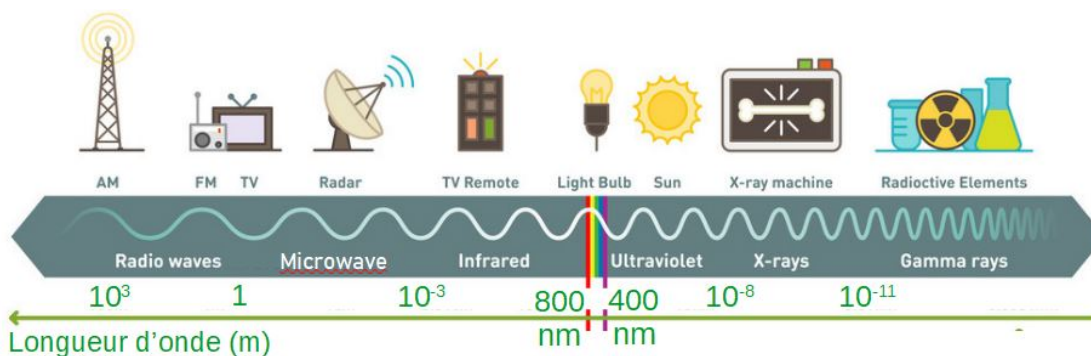
- Si le champ  $\vec{E}$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$  (cas d'une propagation 1D), on retrouve l'équation de d'Alembert 1D :  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$ .
- Attention, il y a des différences fondamentales entre les ondes mécaniques 1D du chapitre O1 et les ondes électromagnétiques dans le vide :
  - Contrairement aux ondes matérielles, la propagation des ondes EM peut se faire dans le vide.  
La propagation des ondes EM peut se faire dans les trois directions de l'espace. (cf. II)
- ★ Le champ qui se propage est un champ vectoriel ( $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ) dans le cas des ondes électromagnétiques, alors qu'il s'agissait de champs scalaires ( $y$  ou  $u$ ) pour les ondes mécaniques étudiées. (cf. III)
- Les champs électrique et magnétique vérifient une équation d'onde de d'Alembert, qui a été obtenue grâce au couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (équation de Maxwell-Faraday ou de Maxwell-Ampère) : on parle donc d'**ondes électromagnétiques**.
- En conséquence, les interactions électromagnétiques ne sont pas instantanées.  
En comparaison, dans le régime stationnaire des chapitres d'EM ou dans l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell couplant  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont modifiées, ce qui empêche d'obtenir des équations d'onde : le concept d'onde EM n'a plus de sens et les interactions EM sont instantanées.

★

## I.3 Domaines de fréquences des ondes électromagnétiques

Les sources des champs électromagnétiques sont des charges ou des courants oscillants dans le temps.

Suivant la fréquence ou la longueur d'onde du champ considéré, les énergies des photons associés seront très différentes, et donc les applications varient aussi :



## II Exemples de solution : ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OPPH)

### II.1 Fonction d'onde d'une OPPH

## a Définition d'une onde plane

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une base de solutions de l'équation de d'Alembert 1D était constituée d'ondes progressives harmoniques. La différence ici est qu'il nous faut décrire le caractère 3D de l'onde (onde qui existe dans tout l'espace tridimensionnel). Pour ce faire, on introduit la notion de surface d'onde.

### Définition : surface d'onde

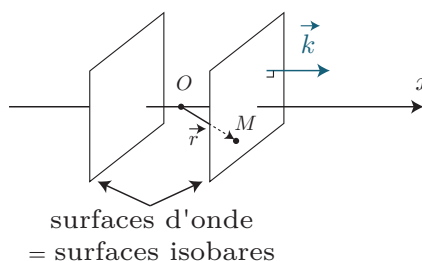
Une surface d'onde est l'ensemble des points de l'espace présentant le même état vibratoire, c'est-à-dire tels que la fonction d'onde possède la même valeur à un instant  $t$  fixé.

### Définition : onde plane

Une onde est plane si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles entre eux.

On peut alors définir un vecteur  $\vec{u}$  orthogonal aux plans d'ondes.

★



**Exemples :** En coordonnées cartésiennes :

- On étudie la fonction d'onde  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{e}_x$  avec  $\vec{k} = k\vec{u} = k\vec{e}_x$  le vecteur d'onde décrivant la direction de propagation de l'onde. Ainsi, on peut ré-écrire la fonction d'onde  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x$ .

★ A  $t$  fixé,  $\vec{E} = \text{cste} \Rightarrow kz = 2n\pi$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ). Il s'agit des équations de plans à  $x = \text{cste}$  parallèles entre eux. L'onde est plane.

- Dans une cavité laser, on peut rencontrer une fonction d'onde du type

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x. \text{ A } t \text{ fixé, } \vec{E} = \text{cste} \Rightarrow e^{-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}} \cos(\omega t - kz + \varphi) = \text{cste}$$

qui n'est pas l'équation d'un plan. L'onde n'est pas plane.

**Propriété :** Si une fonction d'onde ne dépend que d'une variable d'espace cartésienne et du temps, alors l'onde est plane. (La réciproque est fausse.)

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à des ondes électromagnétiques planes.

## b Expression générale des champs dans le cas d'une OPH

- L'onde est supposée plane : les plans d'onde sont orthogonaux à la direction de propagation.
- L'onde est progressive : elle se propage dans l'espace sans se déformer. La direction de propagation de l'onde est la direction du vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}$ . L'onde transporte alors de l'énergie.
- L'onde est harmonique : la fonction d'onde de chacune des composantes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  évolue de manière sinusoïdale avec le temps.

L'intérêt de ce type de solutions est que toute onde plane solution de l'équation de d'Alembert est une somme (éventuellement continue) d'OPH se propageant dans les deux sens  $\pm \vec{u}$ .

Dans le cas des ondes électromagnétiques, chacune des composantes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$

s'écrit donc sous la forme :

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  le vecteur d'onde. Bien sûr, les amplitudes et les déphasages peuvent être différents pour chaque composante, et on obtient ainsi :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \vec{e}_z$$

et de même pour  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .



Il n'y a aucune raison que la direction de  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  soit identique à la direction  $\vec{u}$ .

**Vitesse de phase** La vitesse de phase est toujours définie par  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ .

### c Notation complexe

Le gros intérêt de s'intéresser à des solutions sous forme d'OPPH est qu'on peut utiliser la notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{0x} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x)} \vec{e}_x + \dots = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

avec  $\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y + E_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{e}_z$  l'amplitude complexe vectorielle du champ électrique.

#### Action des opérateurs d'analyse vectorielle :

On s'intéresse à l'action des opérateurs usuels sur une OPPH. On note  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ , ainsi :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (\text{II.1})$$

La dérivation temporelle conduit simplement à  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}$ . Pour l'opérateur divergence, on a :

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial x} (\underline{E}_{0x} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) + \frac{\partial}{\partial y} (\underline{E}_{0y} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) + \frac{\partial}{\partial z} (\underline{E}_{0z} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) \quad (\text{II.2})$$

$$\star \quad = (-jk_x \underline{E}_{0x} - jk_y \underline{E}_{0y} - jk_z \underline{E}_{0z}) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.3})$$

Par la même méthode, on peut montrer que :

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \quad \text{et} \quad \Delta \underline{\vec{E}} = (-j \vec{k})^2 \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.4})$$



Ces relations ne sont valables que pour une OPPH, et non pour une onde progressive plane quelconque ET à la condition de choisir la convention en  $+j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r}$  !

## II.2 Relation de dispersion de l'équation de d'Alembert

### Rappel : Méthode systématique pour déterminer une relation de dispersion

1. Chercher la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une onde plane progressive harmonique, et passer en notation complexe.
2. Après avoir injecté cette fonction d'onde dans l'équation d'onde, déterminer le lien entre  $\omega$  et  $k$ .

**Exercice :** Déterminer la relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert 3D.

★ Ici, on aboutit à (comme d'habitude avec d'Alembert) (la difficulté est de travailler avec  $\vec{E}$  et non  $\underline{s}$  :

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

On en déduit que si l'onde se propage dans le sens  $+\vec{u}$  :  $k = \frac{\omega}{c} \iff v_\varphi = c$ .

Ce résultat sera systématiquement celui que l'on obtiendra avec une équation de d'Alembert. Cela démontre également que dans le vide,  $k \in \mathbb{R}$ .

## II.3 Structure d'une OPPH

### a Ondes transverses

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson dans le vide conduisent alors pour une OPPH à :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \implies \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Comme  $k \in \mathbb{R}$ , ces relations sont aussi vérifiées pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  réels :  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  et  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ . Ainsi,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux à la direction  $\vec{u}$  de propagation. Cela justifie que les ondes électromagnétiques sont des ondes *transverses* (ou transversales), car de direction perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}$ .

Comme une OPP se décompose avec Fourier en somme d'OPPH, ce résultat d'orthogonalité de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  avec  $\vec{u}$  est toujours valable.

### b Relation de structure : lien entre les champs magnétique et électrique

On peut aller plus loin en reliant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . On se sert pour cela de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \iff \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

★ Or le vecteur  $\vec{k}$  et  $\omega$  étant réels, cette relation est aussi vérifiée pour les champs réels. Ainsi, pour une OPPH :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Avec la relation de dispersion de d'Alembert  $k = \frac{\omega}{c}$  :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

Via l'équation de Maxwell-Ampère, on peut également montrer de manière équivalente que  $\vec{E} = -c\vec{u} \wedge \vec{B} = c\vec{B} \wedge \vec{u}$ .

#### Relation de structure d'une OPPH

Pour une onde électromagnétique **plane progressive et harmonique**, se propageant **dans le vide**, les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires à la direction de propagation, et  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  forment un trièdre direct vérifiant :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \tag{II.5}$$

Par décomposition en série de Fourier, une OPP vérifie les mêmes propriétés.

## II.4 Énergie transportée

### a Rappel : équation locale de Poynting

Nous avons déjà établi, dans le cas général, l'équation locale de Poynting :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

avec le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

Dans le cas du vide, cette équation se simplifie en :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0$$

traduisant l'absence de dissipation d'énergie électromagnétique dans le vide.

### b Densité volumique d'énergie

Calculons la densité volumique associée au champ magnétique pour une OPPH :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\left(\frac{E}{c}\right)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_E \quad (\text{II.6})$$

On constate ainsi l'équipartition de l'énergie entre les formes électriques et magnétiques.

Ainsi au total, la densité volumique d'énergie électromagnétique vaut :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{II.7})$$

dans le cas d'une OPP.

### c Vecteur de Poynting et direction/vitesse de transport de l'énergie électromagnétique

Exprimons le vecteur de Poynting pour l'OPPH considérée :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} \quad (\text{II.8})$$

(Faire un rappel maths sur le double produit vectoriel.) On constate ainsi que le vecteur de Poynting est dirigé selon  $\vec{u}$  : la direction de propagation de l'énergie (et donc du vecteur de Poynting) est la direction de propagation de l'onde.

★ **Remarque :** C'est ainsi qu'on définit la direction d'un rayon lumineux : il s'agit de la direction de  $\vec{\Pi}$ .

De plus, comme  $u_{em} = \varepsilon_0 E^2$  :

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = u_{em} c \vec{u} \quad (\text{II.9})$$

à rapprocher de la structure générale  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  avec  $\rho$  une densité de grandeur physique (masse volumique, densité de charge, densité énergétique) et  $\vec{v}$  la vitesse de propagation associée : l'énergie électromagnétique se propage à la célérité  $c$  dans le vide.

### Définition de l'éclairement lumineux (= intensité lumineuse) :

On définit l'intensité lumineuse afin de caractériser la puissance reçue sur un détecteur de la part d'une onde électromagnétique :

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$$

Pour une OPP, au vu de la relation de proportionnalité entre  $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$  et  $\langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$ , on a alors :

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \propto \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$$

## d Ordres de grandeur

Si on connaît la puissance moyenne  $P$  transportée par une OPPH (moyenne au sens temporel) et la surface typique  $S$  sur laquelle se répartit cette puissance, on peut déterminer tous les ordres de grandeur intéressants :

$$P = \iint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S = \varepsilon_0 c \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle S \quad (\text{II.10})$$

soit en notant  $E_0$  l'amplitude du champ électrique,  $\langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$ , d'où

$$\star \quad E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\varepsilon_0 c S}} = \sqrt{2\mu_0 c \frac{P}{S}} \quad (\text{II.11})$$

tandis que l'amplitude du champ magnétique associé est  $B_0 = \frac{E_0}{c}$ .

### Exemples :

- Laser hélium néon de laboratoire de puissance  $P = 1 \text{ mW}$  de rayon typique  $1 \text{ mm}$  (♥) :  $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{P}{S} \sim 10^3 \text{ W m}^{-2}$ , d'où  $E_0 \sim 9 \times 10^2 \text{ V m}^{-1}$  et  $B_0 \sim 3 \times 10^{-6} \text{ T}$ .
- Flux solaire moyen : sur Terre, on reçoit une puissance surfacique de  $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \simeq 3.5 \times 10^2 \text{ W m}^{-2}$ , ce qui conduit à des ordres de grandeur similaires à ceux du laser He-Ne.

## e Interprétation particulière du flux du vecteur de Poynting

L'étude d'expériences d'introduction à la mécanique quantique montre la double interprétation ondulatoire/corpusculaire des ondes électromagnétiques. Donnons donc une vision corpusculaire du vecteur de Poynting.

On peut associer au flux d'énergie moyen  $\iint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$  un flux de photons. Pour cela, rappelons que l'énergie associée à un photon de fréquence  $\nu$  (longueur d'onde  $\lambda$ ) est :  $E_{1 \text{ photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  (relation de Planck-Einstein et relation de dispersion). On considère à nouveau que  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  est uniforme sur une section droite  $S$ .

Schéma. Définition de  $\frac{\delta N}{dt}$

$$\star \quad P = \langle \Pi \rangle S = \frac{\delta N h \nu}{dt} \iff \frac{\delta N}{dt} = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} \quad (\text{II.12})$$

soit pour un laser Hélium-Néon où  $\lambda = 632 \text{ nm}$ , le débit de photons vaut :

$$\frac{\delta N}{dt} = 3.1 \times 10^{15} \text{ photons/s} \quad (\text{II.13})$$

## III Polarisation des OPPH

### III.1 OPPH polarisée ou non polarisée ?

Considérons une OPPH se propageant selon  $\vec{u} = +\vec{e}_z$ . On peut alors exprimer le champ électrique associé :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_y$$

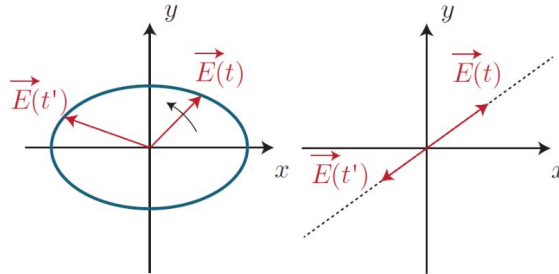
**Remarque :** On peut redéfinir l'origine des temps de sorte à annuler l'une des deux phases à l'origine (mais juste une seule des deux !). Dans le cas général, l'OPPH peut donc être écrite :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \vec{e}_y$$



On distingue alors deux grandes familles d'ondes :

- les ondes non polarisées :  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  varient de manière aléatoire dans le temps. On dit alors que les composantes selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  du champ sont *incohérentes*.  
Cas le plus fréquent des sources naturelles : Soleil, lampe blanche. (Ceci est lié au fait qu'il y a de nbr émetteurs avec une agitation thermique : aucune raison qu'ils émettent avec un déphasage constant.)
- les ondes totalement polarisées :  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont des constantes. Dans un plan d'onde donné, on peut alors observer l'évolution du champ électrique avec le temps :



Notons qu'il existe des ondes partiellement polarisées, modélisées comme la somme d'une onde non polarisée et d'une onde totalement polarisée. Dans la suite du cours, on ne s'intéressera qu'à des ondes totalement polarisées.

## III.2 Cas particulier de la polarisation rectiligne

### a Fonction d'onde

C'est le cas où  $E_x$  et  $E_y$  sont en phase ou en opposition de phase. En posant  $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$ , on a alors :

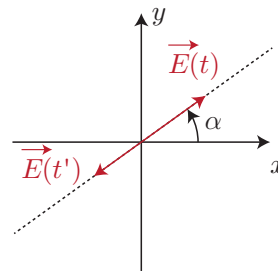
$$\vec{E} = \cos(\omega t - kz + \varphi) (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_p$$

★

avec  $E_0\vec{e}_p = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y$ .

Entourer  $-kz$  : propagation selon les  $z$  croissants ///  $\vec{e}_p$  : direction de polarisation

⚠ Distinguer la direction de propagation de la direction de polarisation !

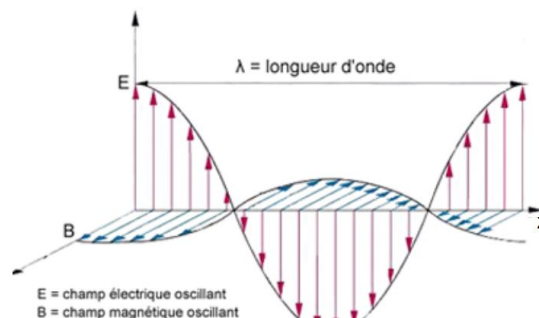


En notation complexe, le champ électrique s'écrit simplement :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz + \varphi)} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_p$$

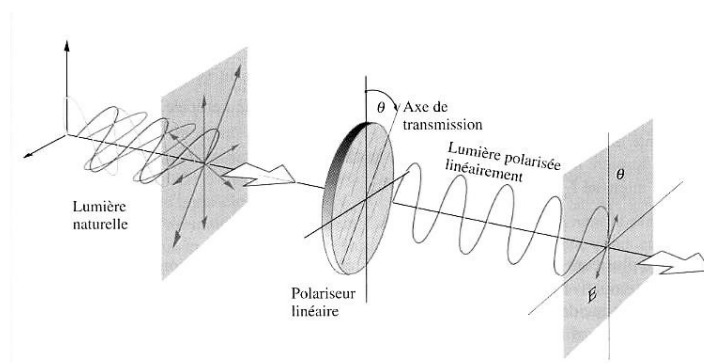
La direction d'oscillation du champ électrique dans un plan d'onde est donc fixée avec un angle  $\alpha$  vérifiant  $\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$ .

Si on représente l'onde électromagnétique totale dans l'espace, elle fait apparaître deux directions bien définies pour le vecteur  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :



## b Effet d'un polariseur

Il existe différents moyens de polariser rectilignement une onde électromagnétique initialement non polarisée. Le moyen le plus fréquemment utilisé en laboratoire consiste à utiliser un *polariseur dichroïque*. Le dichroïsme est la propriété d'un corps d'absorber sélectivement une des deux composantes transverses d'un faisceau incident.

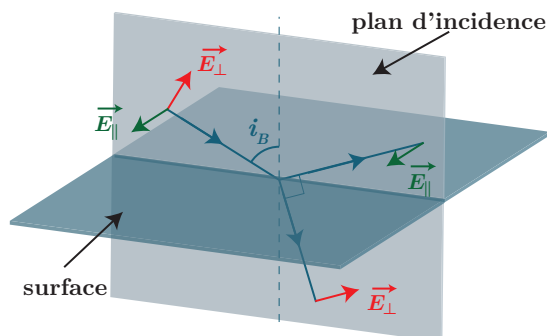


★ Tracer des polymères étirés dans une direction qui absorbe le champ dans la direction d'étirement.

- ★ Mathématiquement, un polariseur effectue une projection du champ  $\vec{E}$  selon sa direction passante.

Citons deux autres moyens d'obtenir une polarisation rectiligne :

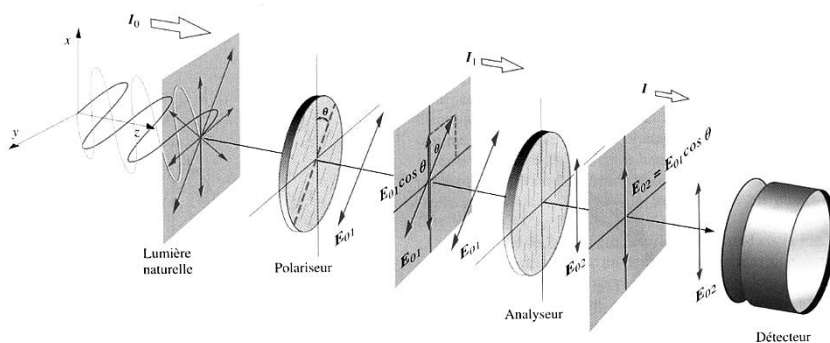
- polarisation par *réflexion vitreuse* : à l'interface entre deux milieux, la lumière transmise et réfléchie dépend de la polarisation (tangentielle ou orthogonale au plan d'incidence). Pour un angle d'incidence particulier  $i_B$  appelé angle de Brewster, l'onde réfléchie est polarisée rectilignement :



- polarisation par *diffusion* : lorsqu'une lumière non polarisée traverse un milieu diffusant (avec de petites particules qui réémettent de la lumière dans toutes les directions), l'onde réémise dans une direction perpendiculairement à la direction de propagation incidente est polarisée rectilignement.

### c Loi de Malus

Un polariseur peut permettre également de détecter si une onde est polarisée : on dit alors qu'il joue le rôle d'*analyseur*.



En sortie du polariseur, on obtient une OPPH polarisée rectilignement du type :

$$\vec{E}_p = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{e}_p$$

Après l'analyseur, l'onde transmise est donc :

- ★ 
$$\vec{E}_a = \vec{E}_p \cdot \vec{e}_a = E_{01} \cos(\theta) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Donc l'intensité lumineuse transmise est :

$$I \propto \left\langle \left\| \vec{E}_a \right\|^2 \right\rangle = \frac{E_{01}^2}{2} \cos^2(\theta) \Rightarrow I = I_0 \cos^2(\theta)$$



### Loi de Malus

L'intensité  $I$  transmise par l'analyseur éclairé par une lumière polarisée rectilignement suit la *loi de Malus*:

$$I = I_0 \cos^2(\theta) \quad (\text{III.1})$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction de la polarisation rectiligne incidente et la direction passante de l'analyseur, et  $I_0$  l'intensité maximale transmise.

Dans le cas où  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , le polariseur et l'analyseur sont croisés, et l'intensité lumineuse s'annule (sous réserve de défauts du matériau).

### III.3 Cas général d'une onde totalement polarisée : polarisation elliptique

Reprenons le cas général d'une OPPH totalement polarisée :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_y$$

avec  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  quelconques, mais constants.

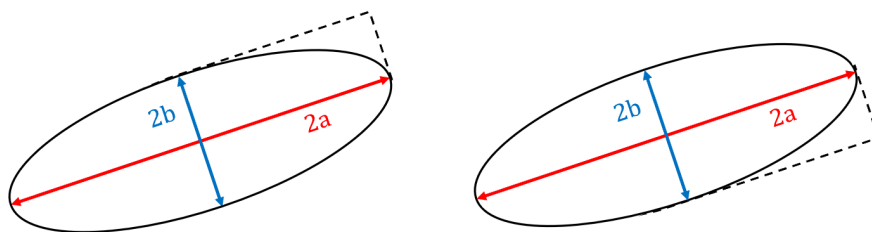
Représentons ce champ électrique au cours du temps, dans un plan d'onde, et donc à  $z$  fixé (pour simplifier, prenons  $z = 0$ ) :

★ 
$$E_x(z = 0, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \text{et} \quad E_y(z = 0, t) = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Représentation, en construisant un rectangle de longueurs  $2E_{0x}$  et  $2E_{0y}$ . Représenter l'ellipse en commençant par l'instant où  $E_x$  est maximal, et représentation de certains vecteurs  $\vec{E}(z = 0, t)$  à différents instants.

Au vu de la trajectoire suivie par la flèche du vecteur  $\vec{E}(z = 0, t)$ , on parle de **polarisation elliptique**.

#### Caractérisation de l'état de polarisation elliptique :



★ Orienter le vecteur d'onde. Orienter les sens de parcours des ellipses, et préciser "Polarisation elliptique gauche" ou "droite". Définir aussi l'ellipticité sur les deux graphes.

On définit différentes caractéristiques de l'état de polarisation elliptique :

- les *axes* de l'ellipse, appelés grand axe et petit axe, correspondant à la plus longue et la plus petite corde de l'ellipse. On donne alors leurs directions.
- le *sens de parcours* de l'ellipse. Pour le qualifier, on choisit par convention d'étudier le champ électrique lorsque la lumière vient vers notre œil. Si, dans un plan d'onde, le champ électrique tourne alors dans le sens trigonométrique, on parle de polarisation elliptique gauche ; s'il tourne dans le sens horaire, on parle de polarisation elliptique droite.

**Remarque :** On définit aussi parfois l'ellipticité  $\theta$  de la polarisation elliptique. Par définition  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice :** On donne l'OPPH suivante :  $\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}) \vec{e}_y$  avec  $k > 0$ . S'agit-il d'une OPPH polarisée de manière elliptique gauche ou droite ?

★ Etudions le plan d'onde  $z = 0$ . Juste après l'instant  $t = 0$ ,  $E_x$  diminue et  $E_y$  augmente. Or, l'onde se propage selon  $+\vec{e}_z$ . Faire un schéma, avec les axes présents. Il s'agit d'une polarisation elliptique gauche.

**Exercice :** Considérons une OPPH totalement polarisée dans le cas général :  $\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \vec{e}_y$ . Quelles peuvent être les valeurs de  $\Delta\varphi$  pour que les axes de l'ellipse soient les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  ?

Etudions le plan d'onde  $z = 0$ . On souhaite que lorsque  $E_x$  est maximal,  $E_y$  soit nul. Donc, il faut que  $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . On peut alors ré-écrire :

★ 
$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \pm E_{0y} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

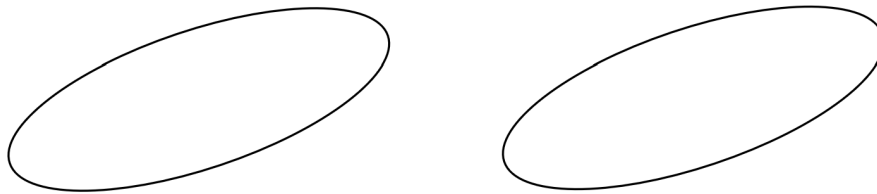
Représentation.

### Effet d'un polariseur sur une OPPH polarisée de manière elliptique :

On envoie une OPPH polarisée de manière elliptique sur un polariseur. On fait alors varier l'angle de l'axe passant du polariseur. Quelle intensité lumineuse est perçue après le polariseur ?

On se sert de l'évolution temporelle du champ électrique dans un plan d'onde.

Représentation du champ électrique dans un plan d'onde



★ Schéma : indiquer les axes passants du polariseur pour avoir une intensité lumineuse max, puis une intensité lumineuse min. En tournant l'axe passant du polariseur, on observe une intensité lumineuse variant entre un maximum et un minimum non nul.

### Notation complexe :

Pour finir cette sous-partie sur la polarisation elliptique, rappelons que comme on considère toujours une OPPH, on peut toujours écrire le champ en notation complexe. Dans le cas de la polarisation elliptique, on a :

$$\underline{\vec{E}} = E_{0x} e^{j(\omega t - kz + \varphi_x)} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j(\omega t - kz + \varphi_y)} \vec{e}_y = \underbrace{(E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y)}_{=\underline{\vec{E}_0}} e^{j(\omega t - kz)}$$

## III.4 Cas particulier de la polarisation circulaire

Un cercle est un cas particulier d'une ellipse. On obtient donc une polarisation circulaire à condition que :

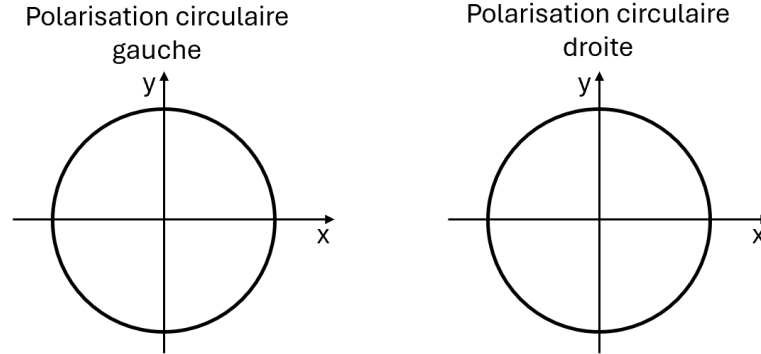
1. les axes de l'ellipse soient les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  : le déphasage entre  $E_x$  et  $E_y$  doit donc être de  $\pm \frac{\pi}{2}$

2. les amplitudes  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  soient égales :  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

Si ces deux conditions sont respectées, alors le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 ( \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x \pm \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_y )$$

On distingue à nouveau deux sens de parcours du cercle :



Circulaire gauche :  $\vec{E} = E_0 ( \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_y )$   
En notation complexe, comme  $\sin(\alpha) \longrightarrow -j e^{j\alpha}$ , le champ s'écrit :

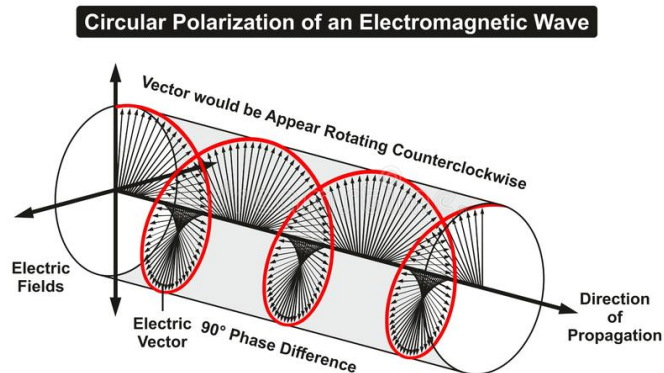
★

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kz + \varphi)} (\vec{e}_x - j \vec{e}_y)$$

Circulaire droite :  $\vec{E} = E_0 ( \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x - \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_y )$   
En notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kz + \varphi)} (\vec{e}_x + j \vec{e}_y)$$

Si on représente l'onde électromagnétique dans l'espace (à  $t$  fixé), on observe alors une rotation du champ électrique au fur et à mesure de sa propagation :



**Exercice** : Quel type de polarisation obtient-on si on somme deux OPPH de même amplitude polarisées circulairement, l'une droite et l'autre gauche ?

★ On obtient une polarisation rectiligne !

### III.5 Synthèse sur la polarisation des OPPH

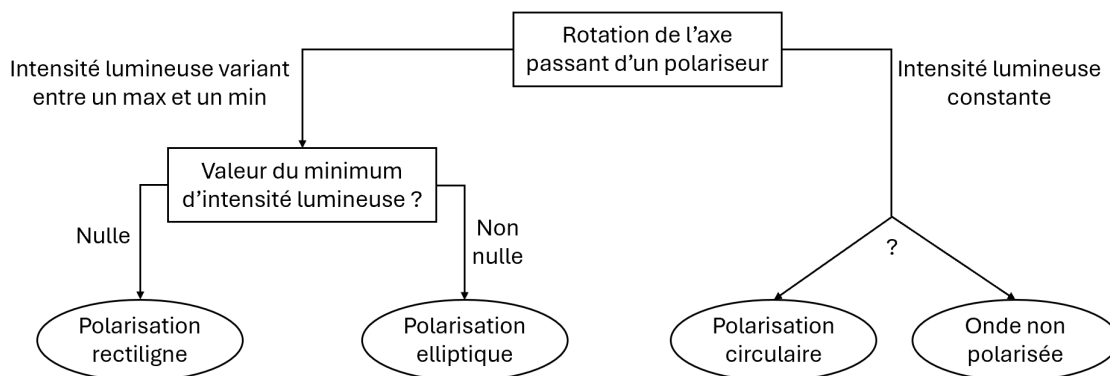
Ecriture des champs en notation complexe :

Pour une OPPH se propageant selon  $+\vec{e}_z$ , on peut toujours écrire le champ électrique sous la forme :  $\vec{E} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$ . L'état de polarisation a un impact sur l'expression de  $\underline{\vec{E}}_0$ , du fait du déphasage entre la composante  $E_x$  et la composante  $E_y$ .

Polarisation	Expression de $\vec{E}_0$
Elliptique	★ $\vec{E}_0 = E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y$
Rectiligne	★ $\vec{E}_0 = (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) e^{j\varphi}$
Circulaire	★ $\vec{E}_0 = E_0 e^{j\varphi} (\vec{e}_x \pm j \vec{e}_y)$

Si elle n'est pas imposée par l'énoncé, on peut redéfinir l'origine des temps de sorte à choisir l'une des phases nulle.

### Analyse de l'état de polarisation avec un polariseur :



Du point de vue pragmatique, si l'on vous demande l'état de polarisation d'une onde, on attend que vous donniez le type de polarisation.

- Si la polarisation est *rectiligne*, il faut que vous précisiez la *direction de l'axe* de polarisation.
- Si la polarisation est *circulaire*, il faut que vous précisiez le *sens de rotation*.
- Si la polarisation est *elliptique*, il faut que vous précisiez le *sens de rotation* ; et si les axes de l'ellipse sont les *axes* ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), il faut que vous donniez la direction des axes de l'ellipse.

## IV Réflexion et transmission à l'interface entre deux DLHI transparents

### IV.1 Propagation dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope (DLHI) transparent

#### a Définitions

On appelle milieu **diélectrique** un milieu dans lequel aucune charge libre de se déplacer n'est présente à l'état naturel. Un diélectrique n'est donc pas un conducteur (et inversement, un conducteur n'est pas un diélectrique). Les diélectriques sont responsables des propriétés isolantes de la matière.

Rappelons quelques définitions :

- Milieu **linéaire** : milieu dans lequel le principe de superposition est applicable.
- Milieu **homogène** : caractéristiques du milieu uniforme dans tout le milieu (homogène = uniforme).
- Milieu **isotrope** : toutes les directions de propagation des ondes sont équivalentes (pas de direction privilégiée).

- Milieu **transparent** : pas d'absorption de l'onde par le milieu.

Dans la suite, on s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique linéaire homogène isotrope transparent (DLHI transparent). Ce milieu sera également non magnétique.

## b Modélisation d'un DLHI transparent

On admet que, contrairement au cas du vide, une OPPH se propage dans un DLHI transparent à la vitesse de phase  $v_\varphi \neq c$ . On définit alors l'indice optique du milieu :

### Indice optique d'un DLHI transparent

Une OPPH de pulsation  $\omega$  se propage dans un DLHI transparent à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\omega)}$$

avec  $c$  la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide et  $n(\omega)$  l'indice optique (réel) du diélectrique transparent à la pulsation  $\omega$ .

Appelons  $\vec{u}$  le vecteur dirigeant le sens de propagation d'une OPPH. Le vecteur d'onde de l'OPPH s'écrit alors  $\vec{k} = k\vec{u}$  avec  $k > 0$ .

- ★ Avec la définition de la vitesse de phase :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} \iff k = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{\omega n}{c} \in \mathbb{R}$ .  
On appelle parfois  $k_0$  le vecteur d'onde dans le vide. On a alors  $k = nk_0$ .

Il en résulte également que la longueur d'onde d'une OPPH de pulsation  $\omega$  est différente dans le vide et dans un DLHI transparent.

## c Expression du champ électromagnétique d'une OPPH dans un DLHI transparent

Considérons une OPPH se propageant dans le sens des  $z$  croissants au sein d'un DLHI transparent d'indice  $n$  :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_y$$

Comment s'exprime le champ magnétique associé ?

La relation de Maxwell-Faraday est inchangée. Donc, en notation complexe, on aura toujours :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

- ★ Comme  $k \in \mathbb{R}$ , les champs réels vérifient :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

## IV.2 Position du problème : onde incidente à une interface entre deux milieux

A partir de maintenant, le milieu dans lequel se propage l'onde électromagnétique n'est plus illimité, car l'onde rencontre une interface avec un autre milieu. On modélise la situation par un premier DLHI transparent d'indice  $n_1$  occupant le demi-espace  $z < 0$  et un second DLHI transparent d'indice  $n_2$  occupant le demi-espace  $z > 0$ .

On étudie ce qu'il se passe lorsqu'une OPPH incidente se propage dans le milieu 1 selon  $+\vec{e}_z$  (incidence normale) et est polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_x$  :



$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_1 z) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{n_1 \omega}{c}$$

Pour calculer le champ magnétique associé, on utilise la relation de structure dans un DLHI transparent :

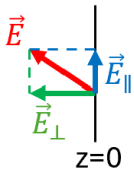
★

$$\vec{B}_i = \underbrace{\quad}_{\text{propagation selon } +\vec{e}_z} = \frac{k_1 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 z) \vec{e}_y$$

### IV.3 Conséquence du changement de milieu de propagation

#### a Des champs continus à l'interface

Pour déterminer l'onde transmise à l'interface, on a besoin de conditions aux limites à l'interface  $z = 0$  sur les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . La formulation de ces conditions aux limites nécessite de distinguer la composante normale et la composante tangentielle des champs à l'interface.



Dans le cadre du programme, on admet que les équations de Maxwell dans un DLHI non magnétique impliquent que :

- le champ magnétique  $\vec{B}$  est continu à l'interface :  $\vec{B}_1(z = 0^-, t) = \vec{B}_2(z = 0^+, t)$
- la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est continue à l'interface :  $\vec{E}_{\parallel,1}(z = 0^-, t) = \vec{E}_{\parallel,2}(z = 0^+, t)$

**Remarque :** C'est hors programme, mais voici la condition aux limites sur  $\vec{E}_{\perp}$  :  $n_1^2 \vec{E}_{\perp,1}(z = 0, t) = n_2^2 \vec{E}_{\perp,2}(z = 0, t)$ .

#### b Expressions des champs incidents, réfléchis et transmis

Dans le cas général, lorsqu'une onde incidente (onde indicée  $i$ ) arrive sur une interface depuis la gauche, elle crée une onde réfléchie dans le milieu gauche (onde indicée  $r$ ) et une onde transmise dans le milieu droit (onde indicée  $t$ ).

★

Schéma : représenter les sens de propagation via des flèches courbées (comme des photons). A ce stade, ne pas représenter les champs EM, car leur sens dépend du caractère plus ou moins réfringent du milieu 2.

Comme on étudie des OPPH, écrivons les champs électromagnétiques en notation complexe :

$$\vec{B}_i(z, t) = \frac{n_1}{c} E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_i(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_r(z, t) = E_{r0} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_t(z, t) = E_{t0} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x$$

★

$$\vec{B}_r(z, t) = \frac{-k_1 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_r(z, t)}{\omega} = -\frac{n_1}{c} E_{r0} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_t(z, t) = \frac{+k_2 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_t(z, t)}{\omega} = \frac{n_2}{c} E_{t0} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y$$

Plusieurs remarques sur cette modélisation des ondes :

★

- Par linéarité des phénomènes de propagation électromagnétique, la pulsation temporelle de l'onde est conservée au cours de la propagation (même  $\omega$ ).
- L'onde réfléchie se propage selon  $-\vec{e}_z$ , alors que les ondes incidente et transmise se propagent selon  $+\vec{e}_z$  : attention au  $\pm k z$ .
- Pour que ces ondes vérifient la relation de dispersion dans un DLHI, il est nécessaire que  $k_i = \frac{n_1 \omega}{c} = k_r = k_1$  et que  $k_t = \frac{n_2 \omega}{c} = k_2$ .
- Comme le champ électrique incident est polarisé rectilignement selon  $\vec{e}_x$ , il ne peut induire que des champs électriques polarisés rectilignement selon  $\vec{e}_x$ . (Vient de l'excitation des charges à l'interface selon  $\vec{e}_x$ )
- Le champ électrique est donc uniquement tangentiel à l'interface : la condition aux limites en  $z = 0$  impose sa continuité.

Ainsi, dans la zone  $z \leq 0$ , le champ électrique **total** est, par superposition :  $\vec{E}_1(z, t) = \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t)$ . Dans la zone  $z \geq 0$ , le champ électrique **total** vaut :  $\vec{E}_2(z, t) = \vec{E}_t(z, t)$ .

### c Nécessité d'une onde réfléchie

Nous allons effectuer un raisonnement par l'absurde. Supposons un moment qu'il n'y ait pas de réflexion à l'interface.

- (Faire un schéma) Dans ce cas, le champ en  $z = 0^-$  est  $\vec{E}_1(z = 0^-, t) = \vec{E}_i(z = 0^-, t) = E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_x$  et le champ en  $z = 0^+$  est  $\vec{E}_2(z = 0^+, t) = \vec{E}_t(z = 0^+, t) = E_{t0} e^{j\omega t} \vec{e}_x$ .
- ★ La condition aux limites sur  $\vec{E}$  en  $z = 0$  impose alors :  $\vec{E}_1(z = 0^-, t) = \vec{E}_2(z = 0^+, t) \Rightarrow E_0 = E_{t0}$ . MAIS, la condition aux limites sur  $\vec{B}$  en  $z = 0$  imposerait alors que :  $\vec{B}_1(z = 0^-, t) = \vec{B}_2(z = 0^+, t) \Rightarrow n_1 = n_2$ .
- Le changement d'indice optique du milieu de propagation, i.e. le fait que  $n_2 \neq n_1$ , impose nécessairement l'existence d'une onde réfléchie.

### d Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude : coefficients de Fresnel

On cherche désormais à déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$\underline{r} = \frac{E_{r0}}{E_0} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{t0}}{E_0}$$

Ces coefficients sont définis à partir des expressions complexes des ondes au niveau de l'interface  $z = 0$ .

(Qu'est-ce qui change par rapport au calcul d'avant ? Le champ 1 est la somme du champ incident ET du champ réfléchi !!)

La condition aux limites sur  $\vec{E}$  en  $z = 0$  impose :

$$\forall t, \vec{E}_1(z = 0^-, t) = \vec{E}_2(z = 0^+, t) \Rightarrow \forall t, E_0 e^{j\omega t} + E_{r0} e^{j\omega t} = E_{t0} e^{j\omega t} \Rightarrow E_0 + E_{r0} = E_{t0}$$

De la même manière, la condition aux limites sur  $\vec{B}$  en  $z = 0$  impose :

$$\star \quad n_1 E_0 - n_1 E_{r0} = n_2 E_{t0}$$

En injectant les coefficients de réflexion et de transmission :

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad \text{et} \quad n_1 (1 - \underline{r}) = n_2 \underline{t}$$

conduisant à

$$n_1 (1 - \underline{r}) = n_2 (1 + \underline{r}) \iff \underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\text{et } \underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Ces coefficients sont appelés **coefficients de Fresnel**.

#### Interprétations :

- On retrouve le fait que  $\underline{r} = 0$  si et seulement si  $n_1 = n_2$ . Dès que les milieux de propagation ont des propriétés optiques différentes, il y aura réflexion partielle de l'onde. On peut d'ailleurs vérifier que si  $n_1 = n_2$ , alors  $\underline{t} = 1$ .
- $\underline{t} = t$  est réel positif : l'onde transmise est en phase avec l'onde incidente.
- $\underline{r} = r$  est réel, mais :
  - si  $n_1 > n_2$ ,  $r > 0$  : l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente.
  - si  $n_1 < n_2$ ,  $r < 0$  : l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente. C'est le cas d'une interface air  $\rightarrow$  verre (dans ce cas, on parle de réflexion vitreuse).

- ★ Schémas avec la représentation des champs électriques dans les deux cas  $n_1 > n_2$  et  $n_1 < n_2$ .


## e Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

On définit le coefficient de réflexion en puissance, grâce à la surface  $S$  de l'interface :

Schéma pour orienter le  $\vec{dS}$ .

$$R = \frac{\langle P_r \rangle(z=0^-)}{\langle P_i \rangle(z=0^-)} = \frac{\left\langle \iint_{(S)} \vec{\Pi}_r(z=0^-,t) \cdot (-\vec{dS}) \right\rangle}{\left\langle \iint_{(S)} \vec{\Pi}_i(z=0^-,t) \cdot \vec{dS} \right\rangle} = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(z=0^-,t) \right\| \right\rangle S}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(z=0^-,t) \right\| \right\rangle S} = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(z=0^-,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(z=0^-,t) \right\| \right\rangle} = \frac{I_r(z=0^-)}{I_i(z=0^-)}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les vecteurs de Poynting incident et réfléchi.

 Il est indispensable de repasser en notation réelle pour calculer un produit vectoriel !  
Onde incidente :  
 (Calcul des champs en réels)

★

$$\vec{\Pi}_i(z,t) = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \left\langle \vec{\Pi}_i(z=0^-,t) \right\rangle = \frac{n_1 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

Onde réfléchie :

$\vec{E}_r = r E_0 e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_x$ . Comme  $r$  est réel :  $\vec{E}_r(z,t) = r E_0 \cos(\omega t + k_1 z) \vec{e}_x$  et un calcul similaire donne :  $\left\langle \vec{\Pi}_r(z=0^-,t) \right\rangle = -\frac{n_1 E_0^2}{2\mu_0 c} r^2 \vec{e}_z$

Finalement :

$$R = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

De manière identique, on définit le coefficient de transmission en puissance

$$T = \frac{\langle P_t \rangle(z=0^+)}{\langle P_i \rangle(z=0^-)} = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(z=0^+,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(z=0^-,t) \right\| \right\rangle} = \frac{I_t(z=0^+)}{I_i(z=0^-)}$$

On calcule alors le vecteur de Poynting de l'onde transmise en repassant en notation réelle :

$$\begin{cases} \vec{E}_t(z,t) = t E_0 \cos(\omega t - k_2 z) \vec{e}_x \\ \vec{B}_t(z,t) = \frac{n_2}{c} t E_0 \cos(\omega t - k_2 z) \vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \left\langle \vec{\Pi}_t(z=0^+,t) \right\rangle = \frac{n_2 E_0^2}{2\mu_0 c} t^2 \vec{e}_z$$

On en déduit le coefficient de transmission en puissance :

$$T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

**Interprétations :**

- On constate que  $R + T = 1$  : toute la puissance incidente a été soit réfléchie, soit transmise. C'est logique, car l'interface n'absorbe pas d'énergie.
- On retrouve (encore une fois) qu'il n'y a aucune puissance réfléchie dans le seul cas où  $n_1 = n_2$ . On a alors  $R = 0$  et  $T = 1$ . Ainsi, si dans un système, on souhaite transmettre un maximum de puissance, il faut se rapprocher de la situation  $n_1 = n_2$ .
- Le fait d'invertir les indices 1 et 2 dans les formules précédentes ne change pas les résultats : l'ordre des milieux traversés par l'onde électromagnétique n'a pas d'impact sur la réflexion et la transmission.

**Ordre de grandeur** : Pour le verre, l'indice optique dans le visible est de l'ordre de 1.5.  
Donc, au niveau d'un dioptre air/verre, on a :  $R = 4\%$  et  $T = 96\%$ .

## Exercices


### Ex. 1 Caractéristiques d'une onde électromagnétique

On étudie une onde électromagnétique harmonique se propageant dans le vide et dont le champ électrique est  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ , avec  $E_x = E_0 \cos(\omega t - a(x + y + z))$ , avec  $a = 10^6$  u.SI (= unité du système international).

1. Quel est l'unité SI de  $a$  ?
2. L'onde est-elle progressive ? Si oui, déterminer le vecteur d'onde  $\vec{k}$  de cette onde. En déduire la direction de propagation de l'onde.
3. En déduire la longueur d'onde  $\lambda$ . Dans quel domaine du spectre se situe cette onde ?
4. L'onde est-elle plane ? Calculer sa fréquence et sa pulsation.
5. En utilisant la structure de l'onde électrique, exprimer  $E_y$  en fonction de  $E_x$ .
6. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$ .


---

#### Correction de l'exercice 1

1.  $a$  est en  $m^{-1}$ .
2. On identifie la phase à  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ , donc les variables spatiales et temporelles sont couplées dans le terme de propagation. Ainsi, on identifie  $\vec{k} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ . La direction de propagation de l'onde est celle du vecteur  $\vec{k}$ .
3.  C'est la norme de  $\vec{k}$  qui est reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  :  $\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$ .  
On en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|} = \frac{2\pi}{a\sqrt{3}} = 3.6 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (\text{Ex.1})$$

On est dans la gamme des infrarouges.

4. A  $t$  fixé,  $E_x = \text{cte}$  implique  $x + y + z = \text{cte}$ , ce qui est l'équation d'un plan : l'onde est plane.  
**Remarque :** On sait aussi que pour une OPP, les plans d'onde sont orthogonaux à la direction de propagation. Donc, on peut aussi répondre à la question en disant : En se déplaçant d'un vecteur  $\vec{r}$  orthogonal à  $\vec{k}$  à  $t$  fixé,  $E_x$  est inchangé : les plans orthogonaux à  $\vec{k}$  sont donc des plans d'onde, l'onde est plane.  
 Dans la suite, on utilise la relation de dispersion et le relation de structure qui ne sont valables que pour des OPPH dans le vide. Il fallait donc bien justifier qu'il s'agissait d'une onde plane progressive.

Avec la relation de dispersion (OPPH dans le vide), on en déduit  $f = \frac{c}{\lambda} = 8.3 \times 10^{13} \text{ Hz}$  et  $\omega = 2\pi f = 5.2 \times 10^{14} \text{ rad/s}$ .

5. L'OPPH étant transverse,  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = (E_x + E_y)a$ . Donc  $E_y = -E_x$ .
6. On a bien une onde plane progressive dans le vide, donc on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{a}{\omega}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge E_x(\vec{e}_x - \vec{e}_y) = \frac{aE_x}{\omega}(\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \quad (\text{Ex.2})$$

On peut alors vérifier qu'on a bien  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .

### Ex. 2 (Ecrit Centrale PC 2025) Cavité électromagnétique cylindrique résonante

On modélise une cavité électromagnétique résonante par une coquille cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de rayon intérieur  $R$ , d'épaisseur  $e$ , de dimension infinie dans la direction  $(Oz)$ . La coquille cylindrique est constituée par un matériau supraconducteur. Du vide se trouve dans la cavité.

Soit  $M$  un point quelconque situé dans le vide à l'intérieur de la cavité, que l'on repère avec les coordonnées cylindriques. On admet que le champ électrique au point  $M$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{e}_z$$

et le champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e}_\theta.$$

**Q5.** Montrer que  $E$  dans le vide vérifie l'équation suivante :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

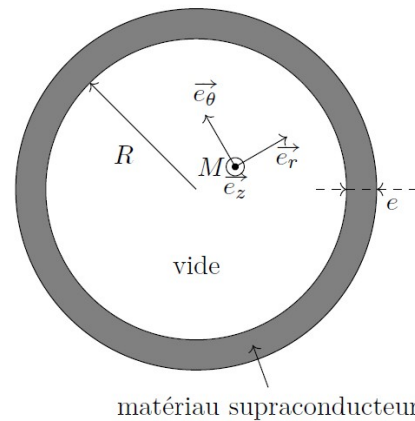
On cherche le champ électrique sous la forme d'une onde stationnaire :

$$E(r,t) = E_0 \xi(t) \psi(r),$$

où  $E_0$  est une constante homogène à un champ électrique et les fonctions  $\xi$  et  $\psi$  sont sans dimension.

**Q6.** Montrer que la fonction  $\xi$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - A \xi = 0,$$



**Figure 4**

et que la fonction  $\psi$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{A}{c^2} \psi = 0,$$

où  $A$  est une constante réelle. Justifier que  $A$  est strictement négative.

Pour la suite, on introduit  $\omega$  la pulsation de l'onde électromagnétique telle que  $A = -\omega^2$  et on introduit le vecteur d'onde  $\vec{k}$  dont le module vérifie  $k = \frac{\omega}{c}$  dans le vide. On admet que  $\xi$  et  $\psi$  s'écrivent sous la forme :

$$\xi(t) = -\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \psi(r) = J_0(kr) ;$$

où  $J_0$  est une fonction de Bessel d'ordre 1. La courbe représentative de  $J_0(x)$  en fonction de la variable  $x$  est donnée dans la partie « Données et formulaire ». On admet enfin que le matériau supraconducteur impose un nœud pour le champ électrique : le champ électrique s'annule donc en  $r = R$ .

- Q7.** Exprimer les trois plus petites pulsations  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  que peut prendre le champ électrique dans cette cavité résonante en fonction de  $R$ ,  $x_{01}$ ,  $x_{02}$ ,  $x_{03}$  et  $c$  ; où  $x_{01}$ ,  $x_{02}$  et  $x_{03}$  sont les trois premières valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction  $J_0$  s'annule.
- Q8.** Pour les cavités utilisées dans le laser à électrons libres européen  $\omega_1 = 2\pi \times 1,3 \cdot 10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ . En déduire la valeur numérique de  $R$ .
- Q9.** Exprimer le champ magnétique dans la cavité pour la pulsation  $\omega_1$ , en fonction de la fonction  $J_1$ ,  $E_0$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $\omega_1$ ,  $t$ , où  $J_1$  est la dérivée de la fonction  $J_0$ . On suppose que le champ magnétique a une valeur moyenne temporelle nulle.
- Q10.** On veut  $E_0 = 50 \text{ MV.m}^{-1}$  pour la pulsation  $\omega_1$ . En déduire l'amplitude du champ magnétique en  $r = R$ . On pourra se servir de la courbe de la fonction  $J_1$ , disponible dans le formulaire, pour estimer la valeur de  $J_1(x)$  pour une valeur de  $x$  donnée.

## Formulaire :

$$-\vec{\text{rot}} \left( \vec{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{A} \right) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

- opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

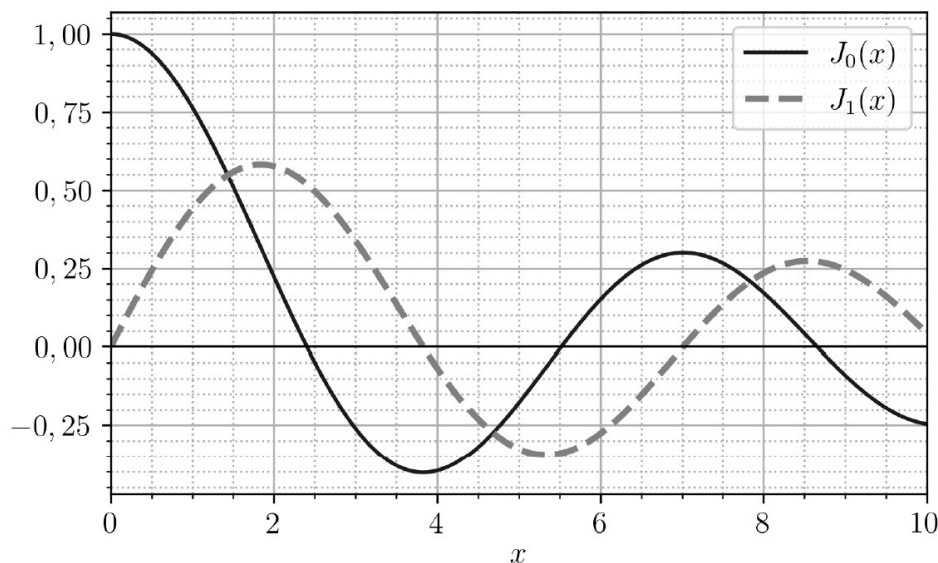
$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

- opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



– Courbes représentatives des fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$ .



Les trois plus petites racines positives de la fonction  $J_0$  sont  $x_{01} = 2,405$ ,  $x_{02} = 5,520$  et  $x_{03} = 8,654$ . La fonction  $J_1$  est la dérivée de la fonction  $J_0$  :

$$J_1(x) = \frac{dJ_0}{dx}.$$

## Correction de l'exercice 2

5. Démontrons l'équation de d'Alembert portant sur le champ électrique vectoriel  $\vec{E}$ . On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et on permute les opérateurs de dérivées temporelle et spatiale (théorème de Schwarz) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \iff \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{Ex.3})$$

en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. De plus, l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide donne  $\text{div}(\vec{E}) = 0$ . Ainsi :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (\text{Ex.4})$$

On projette cette équation de d'Alembert sur  $\vec{e}_z$ , en notant que comme  $\vec{e}_z$  est un vecteur unitaire fixe de la base cylindrique, on a  $\Delta \vec{E} \cdot \vec{e}_z = \Delta E_z = \Delta E$ . Ainsi :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

6. On injecte la forme de la solution dans l'équation précédente :

$$E_0 \xi(t) \Delta \psi(r) - \frac{1}{c^2} E_0 \psi(r) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\psi(r)} \Delta \psi(r) = \frac{1}{c^2 \xi(t)} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

en divisant par  $E_0 \xi(t) \psi(r) \neq 0$ . On a égalité d'une fonction ne dépendant que de  $r$  avec une fonction ne dépendant que de  $t$  : ces deux fonctions sont égales à une même constante  $B$ . On obtient alors le système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - B c^2 \xi(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \xi}{dt^2} - A \xi(t) = 0 & \text{avec} \quad A = B c^2 \\ \Delta \psi(r) - \frac{A}{c^2} \psi(r) = 0 \end{cases}$$



En utilisant le formulaire en coordonnées cylindriques, la dernière équation se ré-écrit bien

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{A}{c^2} \psi(r) = 0$$

Signe de la constante  $A$  :

On s'appuie sur la première équation différentielle  $\frac{d^2\xi}{dt^2} - A\xi(t) = 0$ . Réalisons une disjonction de cas.

Si  $A = 0$ , la solution est  $\xi(t) = \alpha t + \beta$ . Pour éviter une divergence de  $E(r, t)$  si  $t \rightarrow \pm\infty$  (ce qui serait absurde dans le vide), on impose  $\alpha = 0$ . Or, la solution  $\xi(t) = \text{cte}$  ne décrit pas une solution  $E(r, t) = E(r)$  sous forme d'onde. Le cas  $A = 0$  n'est donc pas physiquement intéressant.


Si  $A > 0$ , alors la solution générale est  $\xi(t) = \alpha e^{At} + \beta e^{-At}$ . Pour éviter une divergence de  $E(r, t)$  si  $t \rightarrow \pm\infty$  (ce qui serait absurde dans le vide), on impose  $\alpha = 0 = \beta$ . Le cas  $A > 0$  ne conduit à aucune solution physique intéressante.

Ainsi, nécessairement,  $A < 0$ .


7. La condition limite en  $r = R$  impose  $J_0(kR) = 0$ . Ainsi, les 3 premières pulsations propres vérifient :

$$\omega_1 = \frac{x_{01}c}{R} \quad \omega_2 = \frac{x_{02}c}{R} \quad \omega_3 = \frac{x_{03}c}{R}$$

8.  $R = \frac{x_{01}c}{\omega_1}$ . A.N. :  $R = 8.8 \text{ cm}$ .

9.  L'onde étudiée n'est ni plane (les surfaces d'onde vérifient  $r = \text{cte}$ ), ni progressive. On ne peut PAS utiliser la relation de structure. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\vec{E}) = + \frac{\partial E}{\partial r} \vec{e}_\theta = E_0 \xi(t) \frac{d\psi}{dr} \vec{e}_\theta = -E_0 \sin(\omega_1 t) J_1\left(\frac{\omega_1}{c} r\right) \frac{\omega_1}{c} \vec{e}_\theta$$

 Il s'agit d'une équation avec une dérivée partielle. On va intégrer pour déterminer  $\vec{B}$ , mais donc, on doit intégrer à  $r$  constant. La constante d'intégration peut donc dépendre de  $r$ . On intègre :

$$\vec{B} = \left( \frac{E_0}{c} \cos(\omega_1 t) J_1\left(\frac{\omega_1}{c} r\right) + f(r) \right) \vec{e}_\theta$$

où la "constante" d'intégration est une fonction  $f(r)$ . Or,  $\forall r, \langle \vec{B} \rangle = \vec{0} = f(r) \vec{e}_\theta \Rightarrow f(r) = 0$ . Ainsi,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega_1 t) J_1\left(\frac{\omega_1}{c} r\right) \vec{e}_\theta$$

10. L'amplitude du champ magnétique vaut, en  $r = R$ ,  $\frac{E_0}{c} J_1\left(\frac{\omega_1}{c} R\right) = \frac{E_0}{c} J_1(x_{01})$  d'après la Q.7. On lit graphiquement  $J_1(x_{01}) = 0.52$ . Donc, l'amplitude du champ magnétique est  $87 \text{ mT}$ .

### Ex. 3 Etat de polarisation d'une onde électromagnétique

On s'intéresse à un champ en coordonnées cartésiennes  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} (\vec{e}_x + 2j\vec{e}_y)$ , avec  $E_0$  un réel et  $k > 0$ .

1. L'onde est-elle progressive ? Si oui, donner sa direction de propagation. L'onde est-elle plane ?
2. Décrire l'état de polarisation de l'onde.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec un champ  $\vec{E} = E_0 e^{-j(\omega t - kz)} (\vec{e}_x + 2j\vec{e}_y)$ , avec  $E_0$  un réel et  $k > 0$ .
4. Proposer un exemple de champ électrique complexe  $\vec{E}$  décrivant une onde plane, progressive selon les  $z$  croissants et polarisée rectilignement selon une direction qui ne soit ni l'axe ( $Ox$ ) ni l'axe ( $Oy$ ).

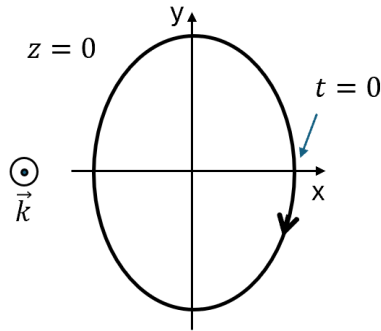
---

#### Correction de l'exercice 3

1. On reconnaît le terme de propagation en  $t - \frac{k}{\omega} z$  : il s'agit donc d'une onde progressive dans le sens des  $z$  croissants.  
A un instant  $t$  fixé, l'équation  $\vec{E} = \text{cte}$  implique  $z = \text{cte}$ , qui est l'équation d'un plan : l'onde est plane.
2. Pour identifier l'état de polarisation, on passe en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - 2E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

On se place dans un plan d'onde fixé, par exemple  $z = 0$ . A partir de  $t = 0$ ,  $E_x$  diminue avec le temps et  $E_y$  diminue.



La polarisation est elliptique droite, d'axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

3. (a) Attention, on reconnaît toujours le même terme de propagation en  $t - \frac{k}{\omega}z$  : l'onde est progressive dans le sens des  $z$  croissants.

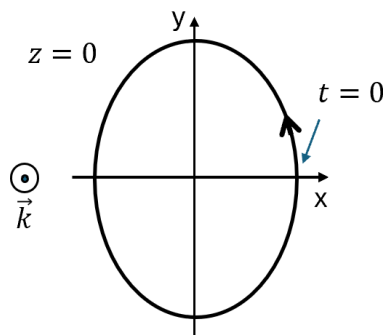
**Remarque :** La direction de propagation serait dans le sens des  $z$  décroissants si les signes devant le terme temporel et le terme spatial étaient identiques.

L'onde est plane car à  $t$  fixé, le champ  $\vec{E}$  est constant dans un plan  $z = \text{cste}$ .

- (b) En notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + 2E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

On se place en  $z = 0$  (plan d'onde). A partir de  $t = 0$ ,  $E_x$  diminue avec le temps et  $E_y$  augmente.



Donc la polarisation est elliptique gauche, d'axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

4. Au vu des contraintes imposées, on doit forcément proposer :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm j(\omega t - kz)}$  avec  $\vec{E}_0$  un vecteur de composantes réelles, qui ne soit ni selon  $\vec{e}_x$ , ni selon  $\vec{e}_y$ . Donc, proposons par exemple :

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$$

Onde plane progressive et polarisée rectilignement selon une direction portée par le vecteur directeur  $\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ .

## Ex. 4 (Ecrit E3A PC 2025) Pression de radiation

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page<sup>4</sup>

Un photon de longueur d'onde  $\lambda$  se propage dans le vide et arrive sous incidence normale sur une surface réfléchissante. Lorsqu'il frappe la surface, il "rebondit" sans perte d'énergie dans la direction définie par les lois de Snell-Descartes.

On rappelle la quantité de mouvement pour un photon :  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  la constante de Planck réduite ( $h$  est la constante de Planck).

1. Déterminer la variation de la quantité de mouvement d'un photon  $\Delta \vec{p}_{1 \text{ photon}}$  frappant la surface parfaitement réfléchissante en incidence normale.

On considère maintenant un gaz de photons incidents de densité volumique  $n$  uniforme. Tous les photons incidents arrivent en incidence normale sur la surface réfléchissante.

2. Déterminer le nombre de photons  $dN$  frappant la surface  $S$  pendant la durée  $dt$ . À l'aide de la question précédente et de la deuxième loi de Newton, déterminer la force totale exercée par l'ensemble des photons incidents sur une section  $S$  de la surface réfléchissante.

Ainsi, lorsqu'une onde électromagnétique frappe une surface réfléchissante, l'onde exerce une force sur cette surface ! Cette force est normale à la surface et est proportionnelle à l'élément de surface  $S$ , elle correspond donc à une "force de pression".

3. Donner alors l'expression de la pression de radiation  $p_{rad}$  exercée par les photons sur la surface réfléchissante, en fonction de  $n$ ,  $\lambda$ ,  $h$  et la célérité de la lumière dans le vide  $c$ .

Dans le document « Sur les tensions de radiation », Brillouin explique que la pression de radiation n'est pas à proprement parler une pression. Il écrit : « le terme de pression doit être réservé pour des forces proportionnelles à l'élément de surface sur lequel elles s'exercent, et indépendantes de l'orientation de celui-ci. Les forces dues aux radiations varient essentiellement suivant l'orientation des surfaces émettrices, absorbantes ou réfléchissantes sur lesquelles on les observe ».

On considère un faisceau de photons arrivant avec une incidence  $\theta$  sur une surface réfléchissante.

4. Reprendre le raisonnement des questions Q1, Q2 et Q3 et montrer que l'expression de la pression de radiation dépend de l'angle d'incidence comme  $p_{rad} = 2n \frac{hc}{\lambda} \cos^2(\theta)$ . On prendra soin de réaliser un schéma de la situation.

On éclaire désormais un cheveu en incidence normale avec un laser rouge de longueur d'onde  $\lambda = 635 \text{ nm}$  et de puissance  $P = 0.9 \text{ mW}$ . On donne ci-dessous le profil du faisceau laser au niveau du cheveu.

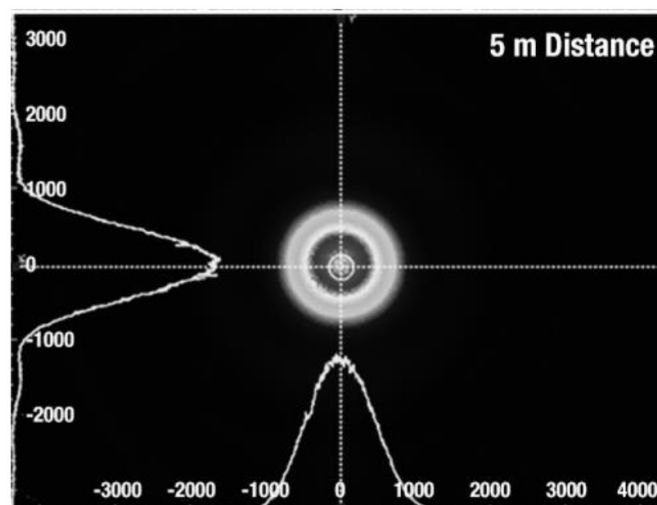


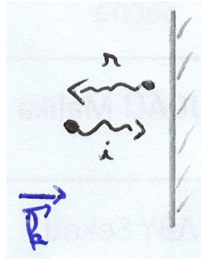
Figure 1: Profils du faisceau laser mesurés par capteur CCD au niveau du cheveu. Les courbes blanches montrent les coupes de profil pour chaque axe. Les deux axes sont gradués en  $\mu\text{m}$ . Source : <https://www.thorlabs.com>

<sup>4</sup> Q2. La démarche effectuée dans cet exercice doit vous faire penser à la théorie cinétique des gaz étudiée en PCSI... Reprenez le cours de PCSI si vous avez besoin d'un coup de pouce.

- Exprimer la pression de radiation en fonction de la puissance du laser, de la surface du faisceau laser et de la vitesse de la lumière dans le vide.
- En s'aidant de la question précédente et de la figure, déterminer un ordre de grandeur de la force exercée par le faisceau laser sur un cheveu de diamètre  $70\text{ }\mu\text{m}$  dans le cas de l'expérience étudiée. Conclure.
- Un laser émet une onde pouvant être raisonnablement considérée comme une onde plane progressive harmonique. Retrouver alors l'expression usuellement utilisée pour la pression de radiation  $p_{\text{rad}} = \frac{B_0^2}{\mu_0}$  avec  $B_0$  l'amplitude du champ magnétique créé par le laser et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

### Correction de l'exercice 4

- On a  $\Delta \vec{p}_{1\text{ photon}} = \vec{p}_{\text{final}} - \vec{p}_{\text{initial}}$ . Le photon incident et le photon réfléchi ont les mêmes longueurs d'onde (linéarité de la réflexion + relation de dispersion) et donc la même norme du vecteur d'onde. Le seul changement est la direction de propagation. Notons  $\vec{k} = \vec{k}_{\text{incident}}$ . On a alors  $\vec{k}_{\text{réfléchi}} = -\vec{k}$ . Ainsi :  $\Delta \vec{p}_{1\text{ photon}} = -2\hbar\vec{k}$ .



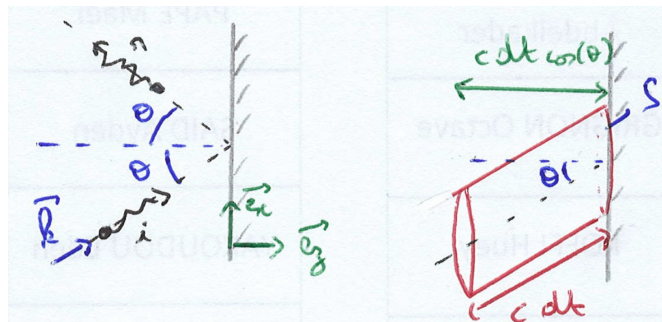
- Le nombre de photons incidents frappant  $S$  durant  $dt$  est le nombre de photons dans un cylindre de hauteur  $cdt$  et de section  $S$  situé devant la surface (tous les photons incidents ont la même direction). Ainsi,  $dN = nScdt$ .
  - Système : {Ensemble des  $dN$  photons incidents}
  - Référentiel du labo supposé galiléen
  - BdF : la seule force s'appliquant sur les photons est la force de la paroi  $\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{photons}} = -\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}}$  d'après le principe des actions réciproques.
 La deuxième loi de Newton donne donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}}$$

avec  $d\vec{p} = dN \Delta \vec{p}_{1\text{ photon}}$ . Avec la Q.1 :

$$\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}} = 2\hbar n S c \vec{k}$$

- On en déduit  $p_{\text{rad}} = \frac{2\hbar n c}{\lambda}$
- Variation de quantité de mouvement pour 1 photon :  
D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, l'angle de réflexion est (en valeur absolue) égal à l'angle d'incidence. On en déduit que la composante selon  $\vec{e}_x$  de  $\Delta \vec{p}_{1\text{ photon}}$  est nulle. Ainsi, il suffit de calculer  $\Delta \vec{p}_{1\text{ photon}} \cdot \vec{e}_z = -2\hbar\vec{k} \cdot \vec{e}_z = -2\hbar k \cos(\theta)$  où on note  $k = \|\vec{k}\|$ .



Nombre  $dN$  de photons frappant  $S$  durant  $dt$  :

Tous les photons frappant  $S$  durant  $dt$  sont dans un cylindre de volume  $Sc \cos(\theta)dt$ . Donc,  $dN = nSc \cos(\theta)dt$ .

Pression de radiation :

Ainsi, l'application de la 2ème loi de Newton donne  $\vec{F}_{photons \rightarrow paroi} = 2\hbar n S c \cos^2(\theta) k \vec{e}_z$ . Il s'agit à nouveau bien d'une force normale proportionnelle à la surface. On en déduit la pression de radiation :

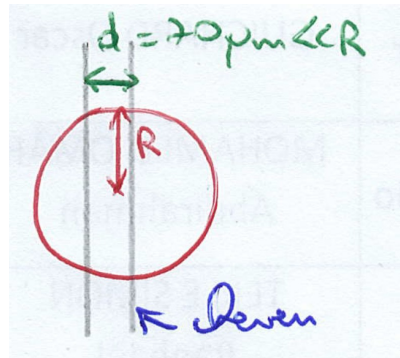
$$p_{rad} = \frac{2\hbar n c \cos^2(\theta)}{\lambda}$$

5. On doit relier la puissance du laser et la densité volumique de photons incidents. Sur la surface  $S$ , la puissance  $P$  du faisceau lumineux est égal à  $P = \frac{dE}{dt}$  avec  $dE$  l'énergie traversant  $S$  durant  $dt$ . On peut exprimer  $dE$  connaissant l'énergie d'un photon  $\frac{hc}{\lambda}$  (relation de Planck-Einstein + relation de dispersion) :  $dE = dN \frac{hc}{\lambda}$ . En reprenant le  $dN$  déterminé en Q.2, on aboutit à :

$$P = n S c \frac{hc}{\lambda}$$

Ainsi,  $p_{rad} = \frac{2P}{S c}$

6. On détermine la surface  $S$  totale du faisceau laser via la figure 1. On suppose que le faisceau laser a une section circulaire et ainsi  $S = \pi R^2$  avec  $R \sim 1$  mm.  
La force de radiation exercée sur le cheveu est en norme  $F = p_{rad} S_{cheveu}$  avec  $S_{cheveu}$  la surface du cheveu éclairée par le faisceau laser.



Comme  $d \ll R$ , on a  $S_{cheveu} = 2Rd$ . Ainsi,

$$F = \frac{4Pd}{\pi c R} \sim 0.3 \text{ pN}$$

Cette force est de norme extrêmement faible et n'est pas perceptible dans la plupart des expériences réalisées en laboratoire.

7. **Remarque :** La puissance donnée pour un faisceau lumineux est toujours une puissance moyenne. Dans le cas contraire, on aurait  $P(t)$  car  $\vec{\Pi}(t)$ ...

Pour une OPPH dans le vide, la relation de structure s'applique et donne  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$  avec la relation de dispersion de d'Alembert ( $\vec{u}$  est la direction de propagation de l'onde). <sup>$\omega$</sup>  Donc, la puissance moyenne  $P$  traversant une surface  $S$  qui s'écrit :

$$P = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle S \quad \text{avec} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{u}$$

car  $\vec{E} \cdot \vec{u} = 0$ . En moyenne,

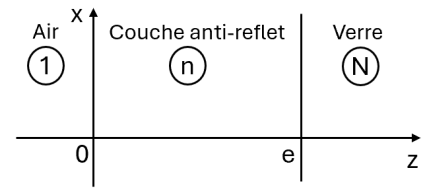
$$P = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$$

Enfin, en utilisant une seconde fois la relation de structure, on a  $B_0 = \frac{E_0}{c}$  et donc  $P = \frac{B_0^2 c S}{2\mu_0}$ .

En reprenant l'expression de la pression de radiation déterminée en Q.5, on obtient ainsi  $p_{rad} = \frac{B_0^2}{\mu_0}$ .

## Ex. 5 Couche anti-reflet

- Une onde incidente, dans l'air, arrive sur du verre d'indice optique réel  $N$ . Donner la valeur approchée de  $N$  pour un verre usuel de TP dans le domaine visible. Calculer (en utilisant directement le résultat du cours) le coefficient de réflexion en puissance à l'interface air-verre. Expliquer pourquoi cette valeur du coefficient peut être gênante si vous souhaitez regarder à travers la vitrine d'un magasin.



- On souhaite supprimer totalement l'onde réfléchi. On réalise pour cela une couche anti-reflet d'épaisseur  $e$  taillée dans un matériau diélectrique d'indice optique réel  $n$ . On pose  $k = \omega/c$ ,  $k_c = n\omega/c$  et  $k_v = N\omega/c$  avec  $c$  la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

On cherche alors en notation complexe des champs électriques dans les trois milieux de la forme :

$$\vec{E}(z < 0, t) = A_a e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.5})$$

$$\vec{E}(0 < z < e, t) = \underline{A}_c e^{j(\omega t - k_c z)} \vec{e}_x + \underline{B}_c e^{j(\omega t + k_c z)} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.6})$$

$$\vec{E}(z > e, t) = \underline{A}_v e^{j(\omega t - k_v z)} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.7})$$

- Justifier la forme de ces expressions. On commentera entre autres pourquoi il est nécessaire de choisir  $\underline{A}_c$ ,  $\underline{B}_c$  et  $\underline{A}_v$  complexes a priori.
- Donner la forme du champ magnétique dans chacun des trois milieux.
- Je préviens, cette question est calculatoire.* Dans cette situation, comme le champ électrique est tangentiel aux interfaces, il y a continuité des champs électromagnétiques aux interfaces. Écrire les conditions aux limites et en déduire que

$$e^{2jk_c e} = \frac{(n - N)(n + 1)}{(n - 1)(n + N)}$$

- En déduire que le quotient précédent vaut  $\pm 1$ . Justifier que seule la valeur  $-1$  est physiquement intéressante. Donner ensuite les expressions qu'il faut choisir pour  $n$  et  $e$ .
- En utilisant le résultat précédent, exprimer  $|\underline{A}_v|$  en fonction de  $A_a$  et  $N$ .
- Déterminer alors l'expression de la puissance électromagnétique moyenne traversant le verre de surface  $S$  dans cette configuration, en fonction de  $A_a$ ,  $S$ ,  $\mu_0$  et  $c$ . Commenter.

### Correction de l'exercice 5

- Dans le visible,  $N = 1.5$  (à noter qu'il existe des verres flint, d'indice optique 1.8 dans le visible). On applique la formule du cours :  $R = \left(\frac{1 - N}{1 + N}\right)^2 = 0.04$ , ce qui signifie que 4% de la puissance incidente est réfléchi à l'interface air/verre. Cette proportion de la puissance incidente est faible mais peut être gênante dans des situations pratiques comme l'observation à travers la vitrine d'un magasin. En effet, l'intensité lumineuse incidente venant du Soleil peut être bien plus grande que l'intensité lumineuse issue des luminaires du magasin. Ainsi, notre œil perçoit principalement la lumière réfléchi du Soleil au niveau de la vitrine, et on ne distingue pas ce qui se trouve à l'intérieur du magasin.

**Remarque :** C'est aussi un problème courant avec les lentilles où le verre de la lentille réfléchit une intensité lumineuse importante (photographie, lunettes...). On le rencontre aussi avec les écrans d'ordinateur, etc.

- Cette méthode de calcul est plus rapide que de considérer le cas général d'une onde réfléchi dans l'air, puis calculer le coefficient de réflexion et l'annuler. On doit ici aboutir à des équations qui doivent nous conduire à des conditions d'obtention d'une telle situation physique.
  - Dans l'air, on a des ondes planes progressives harmoniques dirigées selon  $+\vec{e}_z$  car on cherche en particulier à avoir en  $z = 0$  aucune réflexion. Dans la couche anti-reflet, il apparaît impossible d'avoir à la fois une transmission totale air - couche et une transmission totale couche-verre, vu la différence d'indices optiques : on a donc une onde réfléchi en  $z = e$ . Il y a ainsi la superposition de deux OPPH allant vers  $+\vec{e}_z$  et vers  $-\vec{e}_z$ . Enfin, dans le verre, la seule onde existant est une onde se propageant selon  $+\vec{e}_z$ .

Par linéarité des phénomènes de propagation électromagnétique, la pulsation est identique dans tous les milieux (mais pas le vecteur d'onde, du fait des caractéristiques différentes des trois milieux diélectriques).

Les polarisations sont toutes rectilignes selon  $\vec{e}_x$  : il n'y a pas de phénomène pouvant modifier la direction de polarisation.

Les ondes dans la couche et dans le verre n'ont aucune raison a priori d'être en phase avec l'onde incidente : on doit donc considérer des amplitudes complexes des champs.

- (b) Pour chaque onde plane progressive harmonique, on peut appliquer la relation de structure.

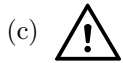


L'onde totale dans la couche n'est pas une OPPH : c'est la superposition de deux OPPH. On applique donc la relation de structure à chaque OPPH, puis on utilise le th de superposition.

$$\begin{aligned} \bullet \vec{B}(z < 0, t) &= \frac{k \vec{e}_z \wedge \vec{E}(z < 0, t)}{\omega} = \frac{A_a}{c} e^{j(\omega t - k z)} \vec{e}_y \\ \bullet \vec{B}(0 < z < e, t) &= \frac{k_c \vec{e}_z \wedge \underline{A}_c e^{j(\omega t - k_c z)} \vec{e}_x}{\omega} + \frac{-k_c \vec{e}_z \wedge \underline{B}_c e^{j(\omega t + k_c z)} \vec{e}_x}{\omega} \text{ par théorème de superposition.} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \vec{B}(0 < z < e, t) = \frac{n}{c} \left( \underline{A}_c e^{j(\omega t - k_c z)} - \underline{B}_c e^{j(\omega t + k_c z)} \right) \vec{e}_y$$

$$\bullet \vec{B}(z > e, t) = \frac{k_v \vec{e}_z \wedge \vec{E}(z > e, t)}{\omega} = N \frac{A_v}{c} e^{j(\omega t - k_v z)} \vec{e}_y$$



Il faut exprimer les CL au niveau des interfaces où elles s'appliquent : elles ne sont pas valables pour n'importe quel  $z$ .

En  $z = 0$  : les conditions aux limites sur  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  donnent :

$$\begin{aligned} \forall t, \vec{E}(z = 0^-, t) &= \vec{E}(z = 0^+, t) \Rightarrow A_a = \underline{A}_c + \underline{B}_c \\ \forall t, \vec{B}(z = 0^-, t) &= \vec{B}(z = 0^+, t) \Rightarrow A_a = n(\underline{A}_c - \underline{B}_c) \end{aligned}$$

En  $z = e$ , les CL impliquent :

$$\begin{aligned} \forall t, \vec{E}(z = e^-, t) &= \vec{E}(z = e^+, t) \Rightarrow \underline{A}_c e^{-jk_c e} + \underline{B}_c e^{jk_c e} = \underline{A}_v e^{-jk_v e} \\ \forall t, \vec{B}(z = e^-, t) &= \vec{B}(z = e^+, t) \Rightarrow n(\underline{A}_c e^{-jk_c e} - \underline{B}_c e^{jk_c e}) = N \underline{A}_v e^{-jk_v e} \end{aligned}$$

*Aide : La suite est un peu calculatoire. Pour ne pas se perdre dans les calculs, se donner un cap. Ici, on veut éliminer toutes les amplitudes. On va commencer par éliminer  $A_a$  et  $\underline{A}_v$ .*

La résolution conduit d'une part à :

$$\underline{B}_c(1 + n) = \underline{A}_c(n - 1)$$

et d'autre part à :

$$\underline{B}_c e^{jk_c e}(n + N) = \underline{A}_c e^{-jk_c e}(n - N)$$

En divisant les deux équations ensemble, on aboutit à :

$$e^{2jk_c e} = \frac{(n - N)(n + 1)}{(n - 1)(n + N)}$$

- (d) On en déduit que  $\left| \frac{(n - N)(n + 1)}{(n - 1)(n + N)} \right| = 1$ , soit comme le quotient est réel,  $\frac{(n - N)(n + 1)}{(n - 1)(n + N)} = \pm 1$ .

L'étude de la solution +1 aboutit à  $N = 1$ , ce qui est impossible du point de vue physique.

Donc, la seule solution physique est  $\frac{(n - N)(n + 1)}{(n - 1)(n + N)} = -1$ . On en déduit que :

$$(n - N)(n + 1) = (1 - n)(n + N) \iff n^2 = N \Rightarrow n = \sqrt{N} > 0$$

On aboutit également à

$$2k_c e = 2n \frac{\omega}{c} e = \pi + 2p\pi \iff e = \frac{c\pi}{2n\omega} (2p + 1) = (2p + 1) \frac{\lambda_c}{4}$$

avec  $p$  un entier naturel et  $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$  la longueur d'onde dans la couche anti-reflet.

**Remarque :** Ce résultat s'interprète aisément : il faut choisir la longueur de la couche anti-reflet de sorte à induire des interférences destructives pour l'onde réfléchie dans l'air. En effet, dans la couche, l'onde renvoyée vers l'air a, par rapport à l'onde réfléchie directement à l'interface air/couche, une différence de marche de  $\delta = 2 \times e = \frac{(2n + 1)\lambda_c}{2}$ , soit un demi-entier de longueurs d'onde. Par interférences destructives, l'onde dans l'air allant vers les  $z$  décroissants n'existe pas.

(e) On ré-écrit la CL sur  $\vec{E}$  en  $z = e$  en utilisant le résultat précédent :

$$\underline{A}_c + \underline{B}_c e^{2jk_c e} = \underline{A}_v e^{j(k_c - k_v)e} \Rightarrow \underline{A}_c - \underline{B}_c = \underline{A}_v e^{j(k_c - k_v)e}$$

On injecte alors la CL sur  $\vec{B}$  en  $z = 0$  :

$$\frac{A_a}{n} = \underline{A}_v e^{j(k_c - k_v)e}$$

En prenant le module :

$$|\underline{A}_v| = \frac{A_a}{n} = \frac{A_a}{\sqrt{N}}$$

(f) Pour calculer le vecteur de Poynting, on repasse en notation réelle. On note alors  $\underline{A}_v = |\underline{A}_v| e^{j\varphi}$ . On aboutit à :

$$\langle \vec{\Pi}_v \rangle = \left\langle \frac{N |\underline{A}_v|^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_v z + \varphi) \right\rangle = \frac{N |\underline{A}_v|^2}{2\mu_0 c}$$

En injectant le résultat précédent :

$$\langle \vec{\Pi}_v \rangle = \frac{A_a^2}{2\mu_0 c} = \langle \vec{\Pi}_a \rangle$$

Ainsi, la puissance moyenne traversant une surface  $S$  orthogonale à  $\vec{e}_z$ , dans le sens  $+\vec{e}_z$  est :  $P_v = \frac{A_a^2 S}{2\mu_0 c}$ .

Toute la puissance de l'onde incidente passe dans le verre (coefficient de transmission global en puissance égal à 1) : c'était le but du système réalisé.

## Ex. 6 Réflexion et transmission sur un nœud entre deux cordes

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique  $\mu_1$ , l'autre de masse linéique  $\mu_2$ . La corde est tendue avec une certaine tension. On néglige la masse du nœud en  $x = 0$ .

On suppose que du côté  $x < 0$  arrive une onde incidente :  $y_i(x, t) = y_{i0} \cos(\omega t - kx)$ . Une onde réfléchie et une onde transmise sont alors créées au niveau du nœud.

Définir et déterminer l'expression du coefficient de réflexion  $\underline{r}$  et du coefficient de transmission  $\underline{t}$ . On pourra pour ce faire réaliser un principe fondamental de la dynamique au nœud.

---

### Correction de l'exercice 6

#### Difficultés attendues

- Cette procédure n'a pas été faite dans le chapitre sur la corde vibrante (hors programme), mais il faut reconnaître une situation identique à ce qui est usuellement traité en réflexion d'onde.
- Poser les fonctions d'onde non définies dans l'énoncé. Il y en a besoin pour traduire la CL avec le PFD sur le nœud.
- Vouloir écrire deux CL en  $x = 0$  pour déterminer les coefficients de réflexion et transmission.
- PFD sur le nœud de masse nulle. Utiliser l'angle  $|\alpha| \ll 1$  pour traduire la CL sur les forces de tension en terme de CL sur  $y$  : procédure usuelle pour la corde vibrante.

#### Appropriation

Schéma + objectif + poser les fonctions d'onde complexes de toutes les ondes en écrivant directement  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  et

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2} + \text{définir les coefficients } \underline{r} = \frac{y_r(0, t)}{y_i(0, t)} \text{ et } \underline{t} = \frac{y_t(0, t)}{y_i(0, t)}.$$

#### Stratégie

1. Ecrire les deux CL en  $x = 0$ .
2. Utiliser les formes des fonctions d'onde pour traduire la CL liée au PFD.
3. En déduire  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

#### Résolution



1. Commençons par écrire la continuité de la position de la corde en  $x = 0$  :

$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \iff \boxed{1 + r = \tau} \quad (\text{Ex.8})$$

Ensuite on écrit une relation mécanique à la jonction, où la tension du fil à gauche et à droite sont reliées (PFD sur le noeud de masse nulle dans le référentiel du laboratoire galiléen) :

$$\vec{0} = \vec{T}_g(0,t) + \vec{T}_d(0,t) \implies T_g \cos\alpha_g(0,t) = T_d \cos\alpha_d(0,t) \quad \text{et} \quad T_g \sin\alpha_g(0,t) = T_d \sin\alpha_d(0,t) \quad (\text{Ex.9})$$

donc au premier ordre  $T_g = T_d = T$  et  $\alpha_g(0,t) = \alpha_d(0,t) \iff \frac{\partial y_g}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y_d}{\partial x}(0,t)$ .

2. On utilise les formes des fonctions d'onde pour traduire cette deuxième CL :

$$-jk_1(\underline{y}_i - \underline{y}_r) = -jk_2\underline{y}_t, \forall t \iff \frac{1}{c_1}(1 - \underline{r}) = \frac{1}{c_2}\underline{t}$$

avec  $c_1 = \sqrt{T/\mu_1}$  et  $c_2 = \sqrt{T/\mu_2}$  les vitesses de propagation des ondes dans les deux tronçons.

3. On en déduit alors  $\underline{r} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{1 - \sqrt{\mu_2/\mu_1}}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}} = r$  et  $\underline{t} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}} = t$ .

### Validation

- Forme usuelle des coefficients : pas de réflexion si  $c_1 = c_2 \iff \mu_1 = \mu_2$ . Forte réflexion si les masses linéiques sont très différentes.
- Coefficients réels. Pour  $t$  : toujours positif : ondes incidente et transmise en phase. Pour  $r$  : onde incidente et réfléchie en phase si  $\mu_2 < \mu_1$ , en opposition de phase sinon.