

TP6

Ondes

# Propagation d'une onde dans un câble coaxial

Ce TP est constitué de deux parties. La première partie, théorique, a pour but d'établir l'équation de d'Alembert pour la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial et d'exprimer le coefficient de réflexion en amplitude de tension à l'issue du câble coaxial. Aucun des résultats établis dans cette première partie n'est à savoir par cœur, seules les méthodes (identiques au reste de la physique des ondes) sont à connaître. La seconde partie du TP, expérimentale, a pour but de confronter le modèle théorique aux résultats expérimentaux.

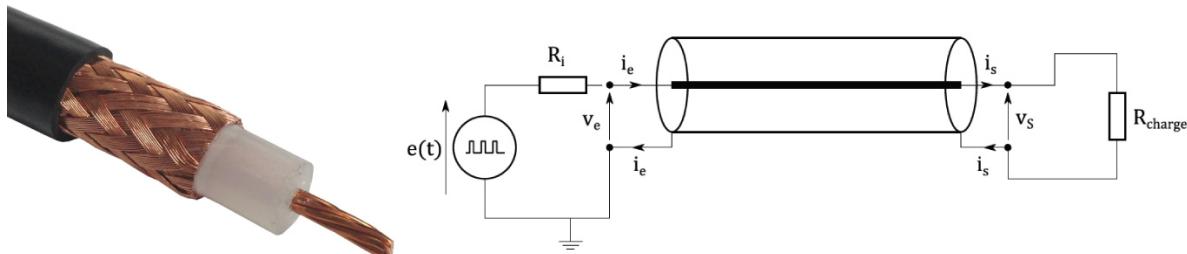
Compétence	En détail	++	+	-	--
S'approprier	Comparer des échelles de temps pour choisir les réglages du GBF en mode impulsions.				
Réaliser	Réaliser un montage imposé. Effectuer des mesures à l'oscilloscope.				
Analyser	Proposer un protocole de mesure de $Z_c$ utilisant le coefficient de réflexion en amplitude.				
Analyser	Utiliser la mesure de fréquences de modes propres pour déterminer une vitesse de propagation.				
Valider	Analyser tous les résultats ou observations, de manière critique.				
Valider	Évaluer une incertitude de type B avec des curseurs sur l'oscilloscope.				
Communiquer	Indiquer les objectifs du TP en introduction du compte-rendu.				
Communiquer	Organiser un compte-rendu expérimental de manière claire.				

Liste du matériel à disposition (en plus du matériel électronique usuel) : câble coaxial de 100 m de long, potentiomètre variable.

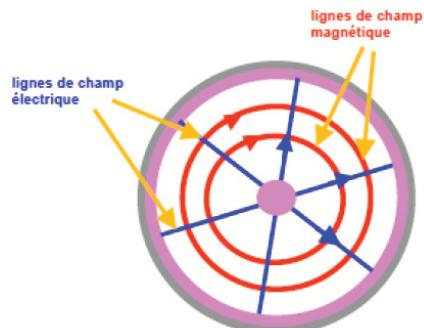
## I Théorie : onde électrique dans un câble coaxial

### I.1 Présentation

Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux électriques, par exemple depuis une antenne de transmission vers le décodeur d'une télévision, ou encore en TP. Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.



La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs (courant quasi superficiques dans la tresse). On constate qu'outre des phénomènes résistifs, il y a des effets capacitifs et inductifs liés à la structure spatiale du champ électromagnétique créé par cette structure.

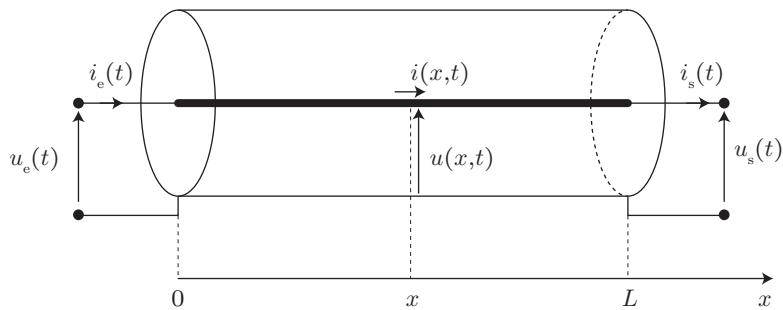


Comparativement à ce que l'on fait d'habitude en électronique, on ne va pas se placer dans les conditions de l'ARQS, car les lignes de transmission avec des câbles coaxiaux peuvent être très longues.

**Ordre de grandeur :** Dans la partie expérimentale de ce TP, nous étudierons un câble coaxial de  $L = 100\text{ m}$  de long. Déterminer la valeur numérique de la fréquence  $f$  à partir de laquelle on ne peut plus supposer l'ARQS valide pour le câble étudié.

★ ARQS valide si  $L \ll \lambda = \frac{c}{f} \iff f \ll \frac{c}{L} \sim 3\text{ MHz}$ . Donc, à partir de  $f \geq 100\text{ kHz}$ , le modèle de l'ARQS n'est plus valide. (Dans ce TP, nous n'appliquerons donc quasiment que des fréquences  $f \geq 100\text{ kHz}$ .)

On note alors  $i(x,t)$  et  $u(x,t)$  la tension et le courant à une abscisse  $x$  du câble :

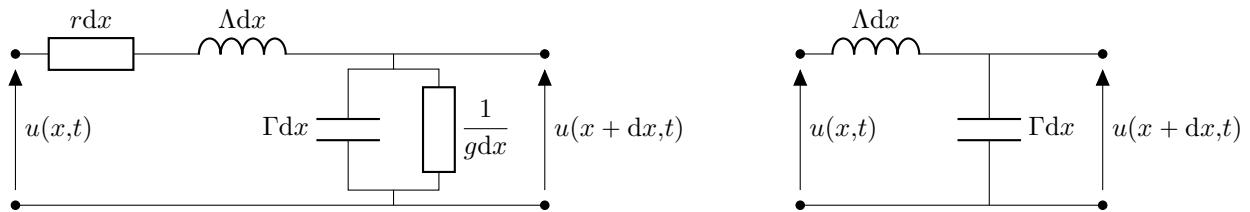


## I.2 Modélisation à constantes réparties

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire  $\text{d}x$ .

★ Sur ces tronçons de longueur  $\text{d}x$ , les lois des mailles et noeuds sont applicables.

Pour prendre en compte les effets résistifs, capacitifs et inductifs, la modélisation électrique d'un câble est la suivante :



où  $r\text{d}x$  est la résistance en série (le long des conducteurs),  $\Gamma\text{d}x$  la capacité,  $A\text{d}x$  l'inductance, et  $g\text{d}x$  la conductance latérale de fuite (isolant imparfait). Ces grandeurs étant extensives, on introduit leurs équivalents linéïques.

Dans toute la suite de cette partie théorique, on se limitera à l'étude d'un modèle sans perte (i.e. sans effet Joule) (modèle de droite) : on parle de modèle à **constantes réparties**.

**Odg typiques (cas d'un câble coaxial de TP) :**  $\Gamma = 100\text{ pF m}^{-1}$  et  $A = 0.25\text{ }\mu\text{H m}^{-1}$ , quasi-constants jusqu'à des fréquences de l'ordre du GHz.

## I.3 Equations couplées et équation de d'Alembert

**Exercice :** Appliquer la loi des mailles et la loi des noeuds pour déterminer les équations aux dérivées partielles couplant  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$ . En déduire l'équation de d'Alembert sur  $u(x,t)$ .

On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en  $dx$  :

$$u(x,t) = \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+dx,t) \implies \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (\text{I.1})$$

et la loi des noeuds :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

Or,

$$\star \quad \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} dx$$

avec le dernier terme qui donnera un ordre 2 en  $dx$  : on le néglige.

$$\implies \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (\text{I.3})$$

En dérivant la première par rapport à  $x$  et la deuxième par rapport à  $t$ , on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (\text{I.4})$$

★

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant  $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \sim 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . On peut de même montrer que  $i$  vérifie l'équation  $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ .

#### I.4 Impédance caractéristique du câble

On a vu que la tension et l'intensité dans un câble coaxial obéissaient à des équations de d'Alembert identiques. Toutefois, on ne peut pas les résoudre indépendamment l'une de l'autre, car ces deux grandeurs restent couplées par les équations établies à l'aide de la loi des mailles et des noeuds.

Si on cherche  $u$  sous la forme d'une OPH se propageant dans le sens des  $x$  croissants, quel sera le lien avec  $i$  ?

$$\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}^+(x,t) = \underline{i}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{I.5})$$

Le système étant linéaire, il s'agit de la même pulsation  $\omega$ .

★ D'où, avec  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$  :

$$-jk\underline{u}^+ = -\Lambda j \omega \underline{i}^+ \implies \frac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+} = \frac{\Lambda \omega}{k} = \Lambda c = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \boxed{\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c \in \mathbb{R}} \quad (\text{I.6})$$

Pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, on pose  $\underline{u}^-(x,t) = \underline{u}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$  et  $\underline{i}^-(x,t) = \underline{i}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$ . On obtient alors :

$$jk\underline{u}^- = -\Lambda j \omega \underline{i}^- \Rightarrow \underline{u}^- = -\frac{\Lambda \omega}{k} \underline{i}^- = -Z_c \underline{i}^-$$

Comme l'impédance est réelle, ces deux relations sont valables également pour les fonctions d'ondes réelles :

#### Relation courant-tension dans un câble coaxial

Dans le cadre d'ondes progressives harmoniques se propageant dans un câble coaxial, on observe les relations suivantes :

$$\text{OPH dans le sens des } x \text{ croissants} \quad u^+(x,t) = Z_c i^+(x,t) \quad (\text{I.7})$$

$$\text{OPH dans le sens des } x \text{ décroissants} \quad u^-(x,t) = -Z_c i^-(x,t) \quad (\text{I.8})$$

avec l'impédance caractéristique  $Z_c$  représentant le lien entre l'onde de tension et celle de courant. Elle s'exprime bien en ohms.

Pour un câble coaxial de TP,  $Z_c \sim 50 \Omega$ .

Par décomposition en transformée de Fourier, ces deux relations sont toujours valables entre une onde progressive (non harmonique) de tension et de courant allant dans des sens identiques.

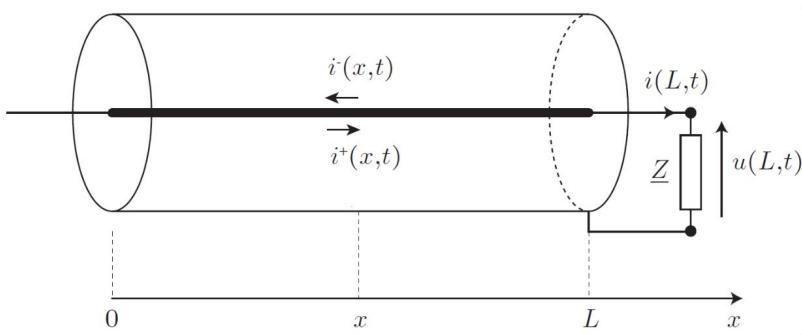
★  En revanche, on ne peut rien dire sur une onde quelconque de tension et de courant : pour  $u = u^+ + u^-$  et  $i = i^+ + i^-$ , on a :  $u = Z_c(i^+ - i^-) \neq Z_c i$  !

### Sens physique associé à l'impédance caractéristique

- On a déterminé cette impédance  $Z_c$  alors même qu'il n'y aucune perte dans le modèle effectué du câble coaxial (pas de résistance dans le modèle du coax). Cette impédance n'est donc pas une impédance dissipative : il n'y a aucun effet Joule dans le câble ! Ainsi, l'impédance fait juste le lien entre les deux grandeurs couplées qui se propage : on parle d'impédance propagative.
- Cette impédance est une grandeur caractéristique du milieu de propagation. Un changement de milieu de propagation se traduira par un changement d'impédance, et donc par une réflexion partielle de l'onde.

## I.5 Réflexion en amplitude sur une impédance terminale

Considérons la propagation d'une onde progressive harmonique de tension à l'intérieur d'un câble coaxial branché sur une impédance terminale  $\underline{Z}$ . L'onde est a priori partiellement absorbée par l'impédance terminale, partiellement réfléchie. Comment choisir  $\underline{Z}$  afin que toute la puissance de l'onde soit absorbée par le récepteur ?



### Condition limite :

L'impédance à l'extrême du câble impose la condition limite en  $x = L$  :

$$\underline{u}(L,t) = \underline{Z} i(L,t) \quad (\text{I.9})$$

### Formes générales des fonctions d'onde :

On suppose que l'onde incidente se propage dans le sens des  $x$  croissants. Les formes générales des fonctions d'onde sont alors :

(Tirer un trait au milieu, pour séparer le raisonnement pour les ondes de tension et d'intensité.)

$$\begin{aligned} \underline{u}^+(x,t) &= U_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} & \underline{i}^+(x,t) &= \frac{1}{Z_c} \underline{u}^+(x,t) = \frac{U_0^+}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} \\ \star \quad \underline{u}^-(x,t) &= U_0^- e^{j(\omega t + kx)} & \underline{i}^-(x,t) &= -\frac{1}{Z_c} \underline{u}^-(x,t) = -\frac{U_0^-}{Z_c} e^{j(\omega t + kx)} \end{aligned}$$

Justifications : linéarité (même  $\omega$ ), sens de propagation ( $\pm kx$ ), déphasage possible ( $U_0^- \in \mathbb{C}$ ), relation de dispersion de d'Alembert ( $k = \omega/c$ ). Justification : OPH.

L'onde totale s'écrit :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}^+(x,t) + \underline{u}^-(x,t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = \underline{i}^+(x,t) + \underline{i}^-(x,t) \quad (\text{I.10})$$

### Coefficient de réflexion en amplitude de tension :

Appelons  $\underline{r}_u = \frac{\underline{u}^-(L,t)}{\underline{u}^+(L,t)} \in \mathbb{C}$  le coefficient de réflexion en amplitude de la tension en  $x = L$ .

La condition limite en  $x = L$  donne alors :

$$\begin{aligned} \star \quad & \underline{u}(L,t) = \underline{Z}\underline{i}(L,t) \\ & \underline{u}^+(L,t) + \underline{u}^-(L,t) = \underline{Z}(\underline{i}^+(L,t) + \underline{i}^-(L,t)) \\ & (1 + \underline{r}_u)\underline{u}^+(L,t) = \frac{\underline{Z}}{Z_c}(\underline{u}^+(L,t) - \underline{u}^-(L,t)) = \frac{\underline{Z}}{Z_c}(1 - \underline{r}_u)\underline{u}^+(L,t) \\ & (1 + \underline{r}_u)Z_c = (1 - \underline{r}_u)\underline{Z} \\ & \underline{r}_u = \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \end{aligned}$$

### Analyse

Regardons quelques cas particuliers :

- si  $\underline{Z} = Z_c$ , il n'y a pas de réflexion : on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**, car l'onde incidente est totalement absorbée par la charge résistive.
- si  $\underline{Z} = 0$ , on est en **court-circuit**, et  $\underline{r}_u = -1$  : il y a alors réflexion totale de l'onde incidente avec changement de signe de la tension. Un calcul supplémentaire montre alors qu'on a une onde totale stationnaire à la fois pour la tension et pour l'intensité, mais qu'elles sont en quadrature spatiale et temporelle (donc aucune puissance n'est transportée en moyenne).
- si  $|\underline{Z}| \rightarrow +\infty$ , on est en **circuit ouvert**, et  $\underline{r}_u = +1$ , il y a également réflexion totale sans changement de signe de la tension. On peut également montrer que les ondes totales stationnaires de tension et d'intensité sont en quadrature.

## II Expérimentation : étude d'un câble coaxial pour la télévision

### II.1 Analyse de la fiche technique

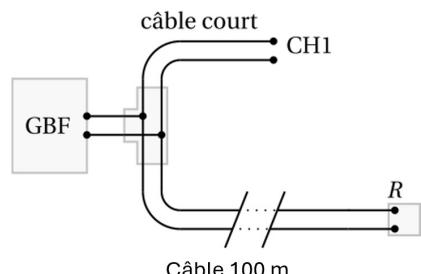
La fiche technique du câble coaxial étudié dans ce TP est donnée en fin d'énoncé. On précise par ailleurs que le câble étudié a une longueur  $\ell = 100 \text{ m}$ .

- Repérer dans la fiche technique la valeur de la vitesse de propagation  $c$  d'une onde électrique dans le câble coaxial et la valeur de l'impédance caractéristique  $Z_c$ .

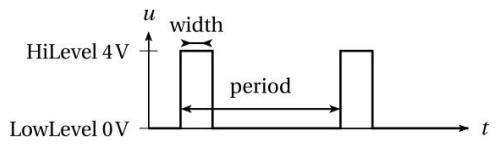
### II.2 Etude dans le cadre du modèle sans perte

#### a Etude en impulsions

- Réaliser le montage ci-contre à l'aide d'un « T » à la sortie du GBF. La résistance  $R$  est un potentiomètre que l'on placera à l'extrémité du câble. On observe la tension en sortie du câble court sur la voie 1 (CH1) de l'oscilloscope.



- On souhaite régler le GBF afin qu'il délivre des impulsions (pulse) périodiques positives rectangulaires de largeur (width)  $\tau$  espacées de  $T$ , de niveau 4 V avec une base à 0 V. Représenter le signal que l'on s'attend à observer à l'oscilloscope. Comment doit-on choisir  $\tau$  et  $T$  pour être capable de déterminer le temps de propagation ?
- Observer et analyser l'allure du signal sur l'oscilloscope en fonction de la résistance  $R$ .
- Déterminer la vitesse de propagation de l'onde dans le câble coaxial et en estimer une incertitude-type. Cette vitesse est-elle en réalité une vitesse de groupe ou une vitesse de phase ?
- Proposer un protocole de mesure de l'impédance caractéristique  $Z_c$  du câble.

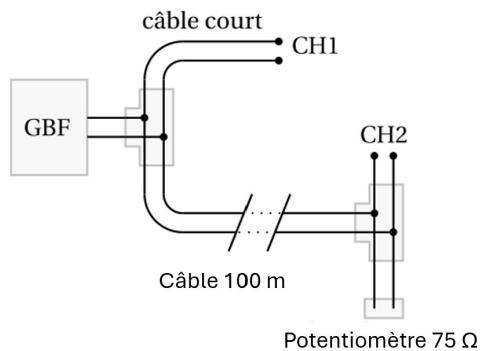


**Appeler le professeur pour présenter le protocole de mesure de  $Z_c$ .**

- Déterminer expérimentalement un ordre de grandeur de  $Z_c$ .
- Déduire de ces différentes mesures une estimation de l'inductance linéïque  $\Lambda$  et de la capacité linéïque  $\Gamma$ .

## b Etude en ondes progressives harmoniques

- Réaliser le montage ci-contre à l'aide d'un « T » à la sortie du GBF. Les voies CH1 et CH2 sont les voies de l'oscilloscope.
- Justifier la nécessité de régler le potentiomètre sur  $75 \Omega$  dans le but d'obtenir une onde progressive harmonique de tension dans le câble coaxial.
- Déterminer le retard temporel  $\Delta t$  entre l'entrée et la sortie de la ligne, en faisant varier les fréquences de 100 kHz à 1000 kHz avec un pas de 100 kHz. En déduire la vitesse de propagation.



- La vitesse mesurée est-elle une vitesse de groupe ou une vitesse de phase ? Comparer avec la valeur obtenue dans la sous-partie précédente.

## c Etude en ondes stationnaires harmoniques

On reprend le montage de la sous-partie II.2.a, avec la sortie du coaxial ouverte. Le GBF délivre un signal sinusoïdal de haute fréquence, i.e. supérieure au MHz.

- Justifier expérimentalement que l'on a bien à faire à une onde stationnaire.

Théoriquement, avec un câble parfait, on devrait observer des nœuds et des ventres. On observe plutôt, dans un câble réel, des minima et maxima.

- Noter d'une part, quelques fréquences correspondant à un ventre de tension à l'entrée de l'oscilloscope, et d'autre part, quelques fréquences correspondant à un nœud de tension.
- Exploiter ces résultats pour obtenir une nouvelle valeur de la célérité des ondes dans le câble.

**Appeler le professeur pour présenter les différentes mesures de vitesses réalisées.**

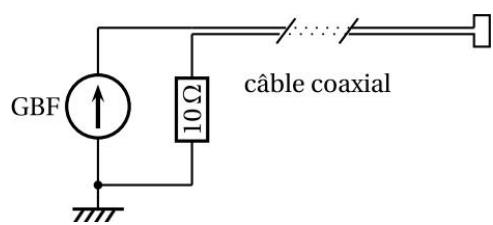
## II.3 Détermination des caractéristiques du câble coaxial dans le modèle avec pertes

### a Utilisation d'un multimètre

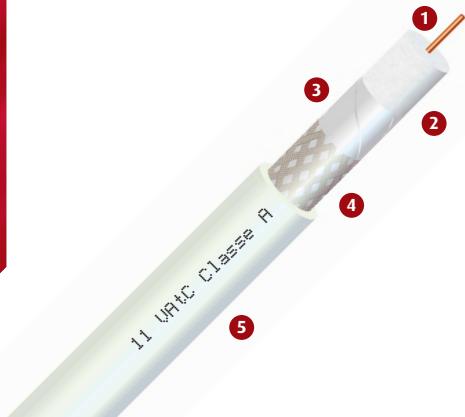
- En utilisant un multimètre, essayer de mesurer la conductance linéique du câble. On négligera désormais  $g$ .
- Mesurer la résistance série du câble coaxial complet (âme + gaine) et en déduire  $r$ .
- Mesurer la capacité du câble coaxial et en déduire  $\Gamma$ .

### b Etude d'un filtre

- Le GBF délivre un signal sinusoïdal, la sortie du câble est en court-circuit. On admet que jusqu'à 250 kHz environ, le câble entier est équivalent, vu depuis l'entrée, à sa résistance en série avec son inductance.
- On réalise donc le circuit suivant, comprenant le GBF, le câble et la boîte AOIP réglée sur  $10\Omega$ .
- Proposer un protocole permettant de déterminer l'inductance du câble coaxial.
- Mettre en œuvre ce protocole. En déduire  $\Lambda$ .



## 11 VAtC classe A



- ① Âme massive cuivre nu  
Composition nominale : 1 x 1.68 mm
- ② Diélectrique : polyéthylène cellulaire  
Diamètre nominal : 7.0 mm
- ③ Ruban polyester/aluminium
- ④ Tresse cuivre étamé
- ⑤ Gaine : PVC  
Diamètre nominal : 10.3 mm  
Couleur standard : blanc RAL 9003

## Caractéristiques

- Impédance : 75 ohms
- Capacité nominale : 50 pF/m
- Efficacité d'écran à 1 GHz : ≥ 85 dB
- Vitesse de propagation : 88 %
- Masse linéique approximative : 106 kg/km
- Rayon de courbure minimal : 55 mm
- Température d'utilisation : -30°C à +80°C
- Non propagateur de la flamme catégorie C2 selon NF C 32-070, IEC 60332-1

## Marquage

EN 50117-2 11VAtC 1.7/6.9 Classe A 3 GHz

## Homologations - Normes

UTE C 90-132, NF EN 50117-1, NF EN 50117-2-1, NF C 32-070, IEC 60332-1

## Conditionnement

Bobines. Tourets.

## Options

Autres couleurs : nous consulter.

## Applications

Câble coaxial de raccordement conçu pour les réceptions difficiles ou longues distances. Ce câble est utilisé pour le câblage intérieur des points d'interface dans les habitations à usage collectif. Plage d'utilisation jusqu'à 1000 MHz.

## Affaiblissements

Fréquence (MHz)	Affaiblissement linéique maximal (dB/100m)	Affaiblissement de réflexion (dB/100m)
5	0.9	23.0
50	2.7	23.0
100	3.8	23.0
200	5.4	23.0
400	7.7	23.0
800	11.0	20.0
862	11.5	20.0
950	12.1	
1000	12.4	

Affaiblissement linéique maximal

