

Dispersion et absorption

Sommaire

I Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs	2
I.1 Propagation dans un plasma dilué	2
I.2 Propagation dans un conducteur ohmique	5
I.3 Synthèse sur le traitement des milieux conducteurs	7
II Généralités sur la dispersion et l'absorption	8
II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe	8
II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant	9
III Application aux ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs	14
III.1 Préambule : relation de structure avec un vecteur d'onde complexe	14
III.2 Application au plasma dilué	15
III.3 Application au conducteur ohmique	18
IV Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux d'indices optiques complexes	20

Questions de cours

- Modèle du plasma dilué : hypothèses, équation de propagation et relation de dispersion. Commenter physiquement.
- Présenter la pseudo-onde électromagnétique plane progressive harmonique, où \underline{k} est complexe. Donner le sens physique associé à la partie réelle et à la partie imaginaire. Définition de l'indice optique complexe.
- Présenter la notion de paquet d'onde, donner un exemple. Préciser le lien entre largeur spectrale et largeur temporelle. Présenter l'effet de la dispersion, en discutant de la notion de vitesse de phase et vitesse de groupe.
- À partir de la relation de dispersion du plasma dilué $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, discuter selon la valeur de ω de l'effet d'un plasma dilué sur la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Application.
- Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu conducteur. En déduire la relation de dispersion et l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur. Interpréter.

Prise de notes : Qu'a-t-on vu jusqu'ici sur les ondes ?

- 1. Équation de d'Alembert apparaît dans de nombreux domaines de la physique. À chaque fois, on a négligé tout phénomène de dissipation d'énergie (on a négligé la résistance à la déformation de la corde vibrante, on a négligé les frottements pour les vibrations dans un solide et on a étudié une onde EM dans le vide). Dans ce chapitre, on va prendre en compte les phénomènes de dissipation ! Donc on aura plus du d'Alembert. ABSORPTION
- ★ 2. D'Alembert menait toujours à $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_\varphi = c$, indépendant de ω . Ce ne sera pas le cas dans ce chapitre, et suivant leur fréquence, les ondes n'iront pas à la même vitesse dans le milieu. DISPERSION

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Établir des relations de dispersion.
2. Dédire, de la relation de dispersion, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
3. Distinguer la modélisation du plasma dilué de celle des conducteurs ohmiques.
4. Calculer $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour la propagation des ondes EM dans le plasma dilué et dans les conducteurs ohmiques, et l'interpréter.

I Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Dans cette partie, on étudie deux exemples de milieux conducteurs, c'est-à-dire des milieux où des cations et des électrons libres sont présents.

I.1 Propagation dans un plasma dilué

a Modélisation du plasma

Un plasma est un gaz ionisé globalement **neutre**, c'est-à-dire constitué d'ions positifs, qui résultent de la perte d'un ou plusieurs électrons par une molécule de gaz, et d'électrons qui leur ont été arrachés.

Un exemple fréquent de plasma est l'ionosphère, portion d'atmosphère terrestre entre 50 et 1000 km. Le gaz est ionisé par le rayonnement du Soleil. La pression atmosphérique y est inférieure à 2 Pa : le gaz est peu dense. La densité électronique résultante est autour de $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$: on parle de **plasma peu dense**.

Modèle adopté pour la propagation de l'onde EM dans le plasma :

1. On étudiera un plasma peu dense.
2. On envisage uniquement le cas de la propagation d'une OPPH transverse, de direction de propagation $+\vec{e}_x$:

En notation complexe :

★

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$$

où on a choisi l'origine des phases telle que la phase à l'origine soit nulle.

Une conséquence directe de considérer des ondes transverses porte sur la densité volumique de charges :

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon_0 (-j \vec{k}) \cdot \vec{E} = 0$$

Le plasma est donc aussi localement neutre.

Appelons alors n la densité volumique d'électrons de charge $-e$ et n_c la densité volumique de cations de charge $+Ze$.

★ L'électro-neutralité locale implique que $\rho = Zen_c - en = 0 \Rightarrow n = Zn_c$

b Conductivité du plasma

On cherche à exprimer le lien entre le vecteur densité de courant électrique complexe \vec{j} et le champ \vec{E} . On procède donc de manière similaire au chapitre EM1, en réalisant un raisonnement de type Drüde.

Modèle adopté pour la conductivité du milieu :

1. La masse des cations étant beaucoup plus élevée que celle des électrons ($m_e/m_{\text{proton}} \sim 10^{-3}$!), on suppose les cations fixes dans notre étude. Il en résulte que la densité volumique de cations $n_c = \text{cste} \Rightarrow n = Zn_c = \text{cste}$.
2. Les électrons sont indépendants : ils n'interagissent pas les uns avec les autres.
3. Les électrons sont libres : aucune interaction électrostatique entre les électrons et les cations fixes.

4. Un électron du plasma subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq -e\vec{E} \quad (\text{I.1})$$

Comparons les deux composantes de la force de Lorentz en ordg :

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes.

On ne gardera que la force électrique de Lorentz.

- ★ 5. Comme le champ électrique oscille, l'électron va également osciller spatialement avec une amplitude X_0 . Schéma avec électron, X_0 + zone de variation de \vec{E} , λ . On souhaite se ramener à l'étude d'un électron dans un champ uniforme spatialement. On veut donc que $X_0 \ll \lambda$.

On peut relier X_0 à l'amplitude V_0 de la vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = j\omega \underline{\vec{r}} \Rightarrow V_0 = \omega X_0$. Donc,

$$\frac{X_0}{\lambda} = \frac{V_0}{\omega\lambda} \sim \frac{V_0\omega}{\omega c 2\pi} = \frac{V_0}{2\pi c} \ll 1$$

dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes.

6. Enfin, et c'est la grande différence avec la conduction dans les métaux, on **néglige toute collision entre les électrons et les cations**. En effet, le plasma étant peu dense, les collisions sont peu probables et ne permettent pas d'introduire une force de freinage.

Application du PFD :

On applique le PFD à un "électron moyen" dans le référentiel des cations fixes, supposé galiléen. On se place en régime sinusoïdal forcé pour le vecteur vitesse : $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_0 e^{j\omega t}$.

$$m_e \frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = -e\underline{\vec{E}} \iff j\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \iff \underline{\vec{j}} = n(-e)\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2}{j\omega m_e} \underline{\vec{E}} \quad (\text{I.2})$$

★

d'où une conductivité imaginaire pure $\underline{\gamma} = -j \frac{ne^2}{\omega m_e}$.

Puissance moyenne cédée du champ aux électrons :

On peut alors en déduire la puissance volumique moyenne que le champ électromagnétique fournit aux électrons : $\mathcal{P}_{\text{vol}} = \langle \underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}} \rangle$

On doit repasser en réels ! On suppose \underline{k} réel pour le calcul.

$$\underline{j} = \frac{ne^2}{\omega m_e} \times e^{-j\frac{\pi}{2}} \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \Rightarrow \underline{j} = \frac{ne^2}{\omega m_e} \underline{E}_0 \underbrace{\cos(\omega t - \underline{k}x - \frac{\pi}{2})}_{= \sin(\omega t - \underline{k}x)}$$

★

Donc :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \langle \underline{j} \cdot \underline{E} \rangle = \frac{ne^2}{\omega m_e} \left\| \underline{E}_0 \right\|^2 \langle \sin(\omega t - \underline{k}x) \cos(\omega t - \underline{k}x) \rangle = 0$$

Ainsi, une conductivité imaginaire pure implique que le champ n'échange aucune puissance avec les charges en moyenne.

c Digression maths : calcul d'une moyenne d'un produit de deux grandeurs harmoniques synchrones

Dans cette sous-partie, nous allons remarquer l'existence d'un outil mathématique pratique pour calculer la moyenne temporelle d'un produit de deux fonctions sinusoïdales synchrones. Soient $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = B \cos(\omega t + \psi)$ deux fonctions harmoniques synchrones.

On a :

$$\begin{aligned} \langle f(t)g(t) \rangle &= AB \langle \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \rangle \\ &= AB \times \frac{1}{2} \left(\underbrace{\langle \cos(2\omega t + \varphi + \psi) \rangle}_{=0} + \langle \cos(\varphi - \psi) \rangle \right) \\ &= \frac{AB}{2} \cos(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

A ce stade, introduisons les notations complexes de f et g : $\underline{f}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\underline{g}(t) = B e^{j(\omega t + \psi)}$.

On remarque que l'on retrouve le résultat précédent en calculant :

★

$$\frac{1}{2} \text{Re} (\underline{f} \times \underline{g}^*) = \frac{AB}{2} \cos(\varphi - \psi)$$

avec \underline{g}^* le complexe conjugué de \underline{g} .

Outil math. pour calculer la moyenne d'un produit de deux fonctions synchrones

Mathématiquement, on pourra utiliser le raccourci de calcul suivant pour calculer la moyenne d'un produit de deux fonctions sinusoïdales **synchrones**, en passant par la notation complexe :

$$\langle f(t)g(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{f}(t) \underline{g}^*(t))$$

avec $\underline{g}^*(t)$ le complexe conjugué de $\underline{g}(t)$.



Physiquement, cela n'a aucun sens de calculer un produit de deux fonctions complexes, car le produit est une opération non linéaire. Ici, on remarque juste une propriété de calcul intéressante.

Exemple : Montrer que la puissance volumique moyenne cédée aux porteurs de charges est nulle dans un plasma, en utilisant directement les champs en notation complexe.

★

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \langle \underline{j} \cdot \underline{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{j} \cdot \underline{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(-j \frac{ne^2}{\omega m_e} \left| \underline{E} \right|^2 \right) = 0$$

Ce raccourci de calcul ne fait pas gagner beaucoup de temps sur cet exemple, mais il pourra être très efficace dans le cas où l'expression du champ réel est moins simple à déterminer.

d Équation de propagation

Listons les 4 équations de Maxwell simplifiées dans le cas d'une onde transverse dans un plasma dilué.

En utilisant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$:

★
$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

et l'on a toujours $\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{div} \vec{B} = 0$.

D'où en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \vec{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{I.4})$$

où on a utilisé le théorème de Schwarz. En utilisant le formulaire d'analyse vectorielle, on a également :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (\text{I.5})$$

Ainsi, on aboutit à :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

★ Commenter oralement

e Relation de dispersion

Rappel : Méthode systématique pour déterminer une relation de dispersion

1. Chercher la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une onde plane progressive harmonique, et passer en notation complexe.
2. Après avoir injecté cette fonction d'onde dans l'équation d'onde, déterminer le lien entre ω et \underline{k} .

Exercice : Déterminer la relation de dispersion dans le cas d'une onde EM transverse dans un plasma peu dense.

On injecte la forme d'OPPH dans l'équation différentielle :

$$(-j\underline{k})^2 \vec{E} = \frac{(j\omega)^2}{c^2} \vec{E} - j\mu_0 \frac{ne^2}{\omega m_e} (j\omega) \vec{E} \iff k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \quad (\text{I.7})$$

★ que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (\text{I.8})$$

appelée **pulsation plasma**

Notons un ordre de grandeur pour l'ionosphère, avec $n \sim 10^{10} \text{ m}^{-3}$, on trouve $\omega_p \simeq 6 \times 10^6 \text{ rad/s}$, soit $f_p \sim 1 \text{ MHz}$.

La relation de dispersion obtenue n'est plus celle liée à une équation de d'Alembert, et fait plus intéressant encore, montre qu'il est indispensable de considérer \underline{k} complexe. En effet, pour $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2 < 0$, signe que \underline{k} est dans ce cas imaginaire pur !

I.2 Propagation dans un conducteur ohmique

a Conductivité d'un conducteur ohmique

De même que pour le plasma dilué, on cherche à exprimer le lien entre \vec{j} et \vec{E} .

Modèle adopté pour la conductivité du milieu :

1. La masse des cations étant beaucoup plus grande que celle des électrons, on suppose les cations fixes dans le référentiel d'étude. Donc, la densité volumique de cations n_c est constante : $n_c = \text{cste}$. On supposera que la densité volumique d'électrons $n = \text{cste}$.
2. Les électrons sont indépendants : pas d'interaction électron / électron.
3. Les électrons sont libres : pas d'interaction électrostatique électron / cation.
4. À nouveau, on néglige la force magnétique de Lorentz agissant sur un électron devant la force électrique de Lorentz, tant que les électrons ne sont pas relativistes.
5. On considère que, au cours de son mouvement, un électron voit un champ électrique uniforme, tant que les électrons ne sont pas relativistes.
6. On considère des interactions électron / cation via des collisions (la densité électronique dans le cuivre $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$). Drüde modélise ces interactions comme une force mésoscopique équivalente de freinage de type $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec m la masse d'un électron, \vec{v} sa vitesse et $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ le temps caractéristique entre deux collisions dans un métal.
7. Du fait des collisions, le vecteur vitesse microscopique des électrons a une forte composante aléatoire. Pour se placer dans le cadre de la mécanique des milieux continus, on choisit alors de se placer à une échelle mésoscopique vérifiant $dt \gg \tau$ et $dx \gg l.p.m.$. Mais donc, sur ce système mésoscopique, il faut que le champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ puisse être considéré comme uniforme et stationnaire. Le champ \vec{E} doit vérifier :

$$T \gg \tau \iff f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \lambda \gg l.p.m. \sim 10^{-8} \text{ m}$$

★ Champ \vec{E} avant le domaine optique (IR, micro-ondes, ondes radio)

Application du PFD :

On applique alors le PFD à un "électron moyen" dans le référentiel des cations fixes du réseau, supposé galiléen. On se place en régime sinusoïdal forcé de sorte que : $\vec{v} = \underline{\vec{v}}_0 e^{j\omega t}$.

$$j\omega m \underline{\vec{v}} = -e \underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}} \iff \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m} \frac{1}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}} \iff \underline{\vec{j}} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

★ avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Pour une onde EM de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz}$, on considèrera que $\gamma = \gamma_0 \in \mathbb{R}$.

Donc, en réels, on a $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.

b Modélisation du conducteur ohmique

Modélisation de la densité volumique de charges

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, ce qui impose la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div } \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{I.9})$$

★ En un point M fixé, l'intégration permet d'écrire $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\tau' = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} \simeq 10^{-18} \text{ s}$. L'échelle temporelle qui nous intéresse lors de l'étude des ondes est la période T de l'onde. Or, $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la relaxation de la densité volumique de charge est toujours plus rapide que ce qui lui pourrait être imposée par le champ électrique.

Donc, en présence d'une onde électromagnétique de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz}$, la densité volumique de charge est uniformément et constamment nulle :

$$\rho(M, t) = 0 \quad (\text{I.10})$$

conduisant à la simplification de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$.

Cela permet aussi de valider a posteriori que la densité volumique d'électrons n est bien constante.

Modélisation du vecteur densité de courant

Dans le but de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère, on peut comparer le vecteur densité de courant électrique $\|\vec{j}\|$ et le terme $\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$:

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega \tau'} = \frac{1}{2\pi f \tau'} \gg 1 \quad (\text{I.11})$$

Donc l'équation de Maxwell-Ampère devient $\vec{\text{rot}} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$.

c Équation de propagation

Exercice : À partir des approximations précédentes, déterminer l'EDP vérifiée par \vec{E} dans un conducteur ohmique.

Renoter toutes les équations de Maxwell avant de démarrer. On part de l'équation de Maxwell-Faraday, où on lui applique comme d'habitude l'opérateur rotationnel :

★
$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \iff 0 - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (\text{I.12})$$

On reconnaît là une équation de diffusion !

d Relation de dispersion

On cherche une solution sous la forme d'une OPPH : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. On injecte dans l'équation de propagation :

★
$$(-j\underline{k})^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 (j\omega) \underline{\vec{E}} \iff \boxed{\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega} \quad (\text{I.13})$$

À nouveau, la relation de dispersion n'est plus celle liée à l'équation de d'Alembert et montre que \underline{k} est complexe. Dans la suite, nous allons nous demander quel sens donner à un vecteur d'onde complexe.

I.3 Synthèse sur le traitement des milieux conducteurs

	Plasma dilué	Conducteur ohmique
Simplification des équations de Maxwell	<p>★ $\text{div } \vec{E} = 0$</p> <p>★ $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$</p> <p>★ $\text{div } \vec{B} = 0$</p> <p>★ $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$</p>	<p>★ $\text{div } \vec{E} = 0$</p> <p>★ $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$</p> <p>★ $\text{div } \vec{B} = 0$</p> <p>★ $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$</p>
Conductivité (cf. modèle type Drüde)	★ $\underline{\gamma} \in i\mathbb{R}$	★ $\gamma = \gamma_0 \in \mathbb{R}$

II Généralités sur la dispersion et l'absorption

II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe

a Pseudo-OPPH

Considérons une OPPH se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$, mais avec un vecteur d'onde complexe :

$$\underline{k} = k_r(\omega) + jk_i(\omega) \quad (\text{II.1})$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_r x - jk_i x)} = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)} \quad (\text{II.2})$$

★ soit encore en notations réelles :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i(\omega)x} \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi_0) \quad (\text{II.3})$$

(Entourer la partie "atténuation" et "dispersion")

On parle parfois de pseudo-OPPH car l'amplitude dépend de la position (le champ n'évolue pas de manière sinusoïdale).

Vocabulaire : Quelle est la différence entre le terme "atténuation" et le terme "absorption" ?

★ On dit qu'il y a atténuation de l'onde lorsque l'amplitude du champ décroît de manière exponentielle avec la propagation. On dit qu'il y a absorption de l'onde lorsque cette atténuation est liée à un échange d'énergie entre l'onde et le milieu.
Par exemple, dans un plasma dilué, il pourra y avoir de l'atténuation, mais pas de l'absorption (conductivité imaginaire pure).

b Partie réelle et vitesse de phase

Sur l'expression du champ électrique précédent, le terme en cosinus traduit le caractère progressif de l'onde, identique à celui d'une véritable OPPH se propageant selon $+\vec{e}_x$ si $k_r > 0$, et selon $-\vec{e}_x$ si $k_r < 0$, à la vitesse de phase

$$\star \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})} \quad (\text{II.4})$$

Remarque : Cette vitesse est celle de propagation d'un plan équiphase d'équation $\omega t - k_r x + \varphi_0 = \text{cste}$.

Par rapport au cas d'une onde vérifiant une équation de d'Alembert, cette vitesse peut dépendre de ω : on dit dans ce cas que le milieu est **dispersif**.

c Partie imaginaire

Le terme en $e^{k_i x}$ traduit suivant le signe de k_i soit une atténuation, soit plus rarement une amplification de l'amplitude de l'onde dans l'espace. La situation la plus courante est celle d'une atténuation où $k_i < 0$. On introduit couramment une distance caractéristique d'atténuation (ou d'amplification) :

$$\delta = \frac{1}{|k_i|} \quad (\text{II.5})$$

Au final, on obtient une forme d'onde dans le cas d'une atténuation :

★
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi_0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi_0\right) \quad (\text{II.6})$$

Remarque : Notons que bien souvent, dans les milieux amplifiés, l'amplitude ne diverge pas car rapidement la modélisation linéaire n'est plus correcte pour de fortes amplitudes. Cela rend inopérant la recherche de solutions en pseudo-OPPH, car cette technique est réservée aux EDP linéaires.

d Indice optique complexe

Dans le cas d'un vecteur d'onde \vec{k} complexe, on généralise la notion d'indice optique.

On introduit l'indice optique complexe du milieu par $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$. En décomposant $\underline{n} = n' + jn''$, il vient que

$$n' = \frac{k_r c}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} \quad (\text{II.7})$$

caractérise la vitesse de propagation. Si $n' = f(\omega)$, il y a dispersion, d'où l'appellation d'**indice de dispersion** pour n' .

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - n' \frac{\omega}{c} x - jn'' \frac{\omega}{c} x + \varphi_0)} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{n'' \frac{\omega}{c} x} \cos(\omega t - n' \frac{\omega}{c} x + \varphi_0)$$

n'' traduit alors l'atténuation d'une onde au passage dans le milieu, d'où l'appellation d'**indice d'extinction**.

Pour étudier un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope (DLHI) *non transparent*, il faut considérer $n'' \neq 0$ (et de signe négatif). Cela nous amènera à généraliser l'étude des coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre deux DLHI en prenant en compte des indices optiques complexes (cf. plus loin).

II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant

Afin de dégager le sens physique de la dispersion, on envisage (dans cette sous-partie II-2 uniquement) la propagation de plusieurs pseudo-OPPH dans un milieu non absorbant mais dispersif, conduisant à $\underline{k} = k_r(\omega)$.

★ **Pourquoi faut-il forcément s'intéresser à une superposition d'OPPH à des pulsations différentes pour décrire une situation réelle ?** Le cas d'une seule OPPH n'est pas un modèle physique réel car toute onde réellement émise est d'extension limitée en temps et en espace.

a Préambule : superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines

Une première approche consiste à regarder la superposition de deux OPPH de fréquences voisines et de même amplitude, et d'observer l'effet de la dispersion :

$$s_1(x,t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_r(\omega_1)x) \quad \text{et} \quad s_2(x,t) = s_0 \cos(\omega_2 t - k_r(\omega_2)x) \quad (\text{II.8})$$

On introduit $\Delta\omega_{1/2} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$, $\Delta k_{r,1/2} = \frac{|k_r(\omega_2) - k_r(\omega_1)|}{2}$, et les pulsations centrales $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $k_{r,0} = \frac{k_r(\omega_1) + k_r(\omega_2)}{2}$. On s'intéresse particulièrement au cas où $\omega_1, \omega_2 \gg \Delta\omega_{1/2}$ et $k_r(\omega_1), k_r(\omega_2) \gg \Delta k_{r,1/2}$.

La superposition de ces deux ondes conduit à :

★

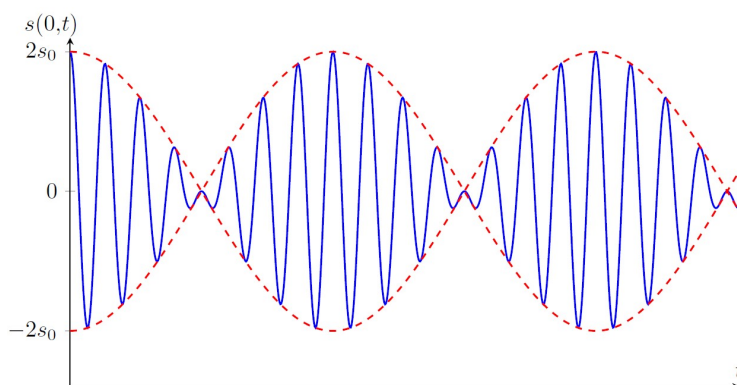
$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = 2s_0 \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x) \times \cos(\Delta\omega_{1/2}t - \Delta k_{r,1/2}x) \quad (\text{II.9})$$

On en déduit l'allure du spectre et de la représentation temporelle du signal résultant :

Ecrire le signal $s(x,t) = 2s_0 \cos(\Delta\omega_{1/2}t - \Delta k_{r,1/2}x) \times \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x)$ et entourer "enveloppe (BF)" et "porteuse (HF)". Tracer la représentation temporelle pas à pas. Placer le $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et le $\frac{2\pi}{\Delta\omega_{1/2}}$

★

Spectre



On observe ici un phénomène de **battements** à la fois temporellement et spatialement. Le signal est formé :

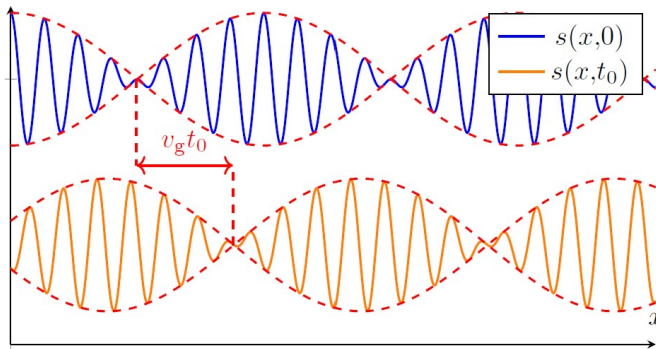
- d'une onde moyenne, appelée **porteuse**, associée à la pulsation ω_0 et de module du vecteur d'onde $k_{r,0}$;
- "enveloppée" (ou modulée) par une **enveloppe** de pulsation $\Delta\omega_{1/2}$ et de vecteur d'onde $\Delta k_{r,1/2}$

★

Si besoin, c'est très bien fait : simulation : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/vitgroupe.html> Demander la vitesse du point bleu et du point jaune juste après avoir traité le paragraphe suivant.

Si on regarde l'évolution spatiale à deux instants, on observe bien une propagation de l'onde. Mais deux vitesses distinctes semblent en jeu :

- la porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_{r,0}}$;
- ★ l'enveloppe se propage à une vitesse différente appelée **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\Delta\omega_{1/2}}{\Delta k_{r,1/2}}$.



★ *Prise de notes : En général $v_g \neq v_\varphi$, et la simulation montre bien un déplacement relatif de la porteuse et de l'enveloppe.*

b Notion de paquet d'onde

L'illustration précédente permet de définir les deux vitesses fondamentales à l'étude des ondes, mais la superposition de deux OPPH n'a toujours pas une vraie réalité physique car le signal résultant est toujours d'extension infinie dans l'espace et dans le temps...

On introduit alors le **paquet d'onde**, onde plane de **durée finie** constituée d'une superposition continue d'OPPH de pulsations voisines comprises dans l'intervalle $[\omega_0 - \Delta\omega_{1/2}; \omega_0 + \Delta\omega_{1/2}]$ avec $\Delta\omega_{1/2} \ll \omega_0$. Il prend la forme mathématique suivante :

$$\star \quad \underline{s}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega t - \underline{k}x)} d\omega \quad (\text{II.10})$$

avec $\underline{a}(\omega)$ l'amplitude spectrale de l'OPPH de pulsation ω . Le graphique de $|\underline{a}(\omega)|$ en fonction de ω est alors le spectre en amplitude du signal.

Concrètement, ce paquet d'onde se présente comme une OPPH de pulsation ω_0 (et vecteur d'onde k_0) modulée par une enveloppe de **durée et d'extension spatiale limitées**.

Voici quelques exemples de spectres et de signaux temporels associés, qui ont été démontrés par des mathématiciens :

Tracer le spectre et l'allure temporelle de :

- ★ • Sinusoïde
- ★ • Pic de Dirac temporel
- Spectre gaussien, en explicitant les largeurs caractéristiques $\Delta\omega$ et $\Delta t = \frac{4}{\Delta\omega}$

Propriété de la transformée de Fourier

La théorie de Fourier permet d'établir, pour un paquet d'onde, le lien entre la largeur spectrale $\Delta\omega$ et la largeur temporelle Δt est donné par la relation :

$$\star \quad \Delta\omega \Delta t \sim 1 \quad (\text{II.11})$$

Il en résulte que la largeur spectre est d'autant plus grande que le signal est bref, et inversement.

c Effet de la dispersion

i) Modélisation numérique de la propagation d'un paquet d'onde

On se propose de modéliser numériquement la propagation d'un paquet d'onde gaussien dans le plasma dilué, qui est un milieu avec la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On se place dans le cas d'un milieu dispersif, sans atténuation pour l'onde : on souhaite donc que $\underline{k} = k_r \in \mathbb{R}$. Cela revient à imposer que toutes les valeurs de ω du paquet d'onde vérifient $\omega > \omega_p$. On a sous ces

hypotheses : $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Reprenons alors la forme précédente du paquet d'onde, en réels, dans le cas où l'amplitude de chaque composante suit une loi gaussienne :

$$s(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega \quad \text{avec} \quad a(\omega) = \tilde{a}_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Remarque : Pour cette loi gaussienne, ω_0 est appelée pulsation centrale et σ écart-type de la gaussienne.

Simuler la propagation du paquet d'ondes revient seulement à représenter $s(x, t_k)$ en fonction de l'espace x pour différents instants t_k .

Problème : numériquement, on ne peut pas calculer l'intégrale précédente : on doit la transformer en une somme discrète finie.

Etape 1 : limiter les bornes de l'intégrale

Représenter $a(\omega)$. On se limite aux pulsations ω pour lesquelles $a(\omega)$ n'est pas négligeable devant \tilde{a}_0 : $s(x,t) = \int_{\omega_0-2\sigma}^{\omega_0+2\sigma} a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$

★

Etape 2 : discrétiser l'intégrale : méthode des rectangles

On discrétise l'intervalle $[\omega_0 - 2\sigma; \omega_0 + 2\sigma]$ en N valeurs notées ω_i . On applique alors la méthode des rectangles :

$$s(x,t) = \sum_{\omega_i} a(\omega_i) \cos(\omega_i t - k_i x) d\omega = \sum_{\omega_i} s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}} \cos(\omega_i t - k_i x)$$

avec $s_0 = \tilde{a}_0 d\omega = \text{cste.}$

ii) Implémentation en Python

Calculons cette somme à l'aide de Python. La première étape est de définir les paramètres du problème.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 """ Parametres du plasma dilue """
5
6 omegap=6e7 # pulsation plasma (en rad/s)
7 c=3e8 # celerite OEM dans le vide (m/s)
8 omega0=8e7 # pulsation centrale du paquet d'onde (en rad/s)
9 sigma=5e6 # ecart-type du paquet d'onde gaussien (en rad/s)
10 N=100 # nombre de composantes dans le paquet d'onde
11 s0=1 # amplitude centrale du paquet d'onde gaussien (u.a.)
```

Ensuite, comme nous allons calculer la somme pour de nombreuses valeurs de x et de t , on se

propose de stocker les N valeurs de ω_i et les N valeurs de $s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$ dans un tableau numpy.

Exercice : Ecrire un code Python permettant de calculer un tableau numpy A de N lignes et 2 colonnes, tel que la première colonne contienne toutes les valeurs ω_i et la seconde contienne toutes les valeurs $s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$. On rappelle que la fonction `np.zeros((n,p))` retourne un tableau numpy de n lignes et p colonnes rempli avec des 0 partout.

```

    """ Construction du paquet d'onde """
    """ A est un tableau contenant en colonne 1 les pulsations (rad/s) et en colonne 2
    les amplitudes (ua)
★ A=np.zeros((N,2))
    omeg=np.linspace(omega0-2*sigma,omega0+2*sigma,N)
    A[:,0]=omeg
    A[:,1]=s0*np.exp(-(omeg-omega0)**2/(2*sigma**2))

```

On peut désormais calculer la somme $s(x,t)$.

```

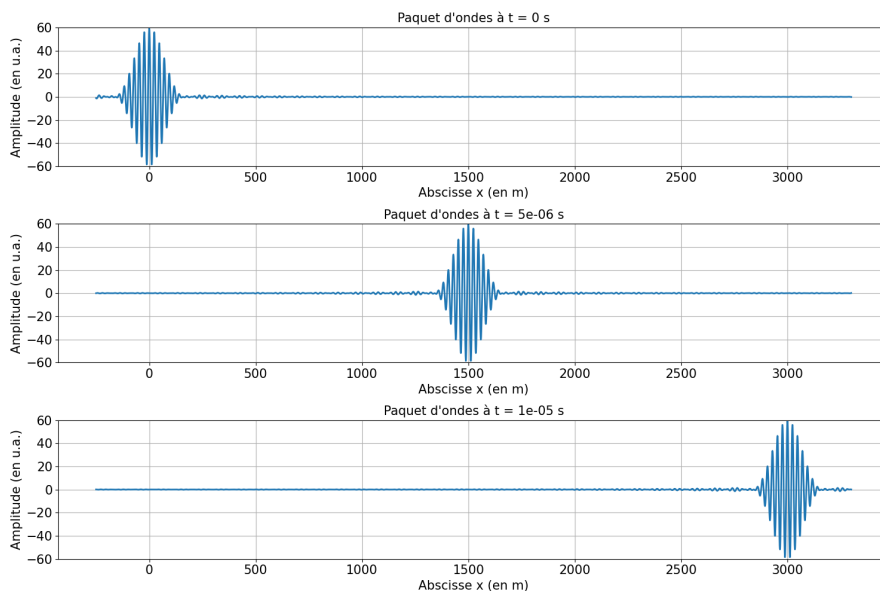
1 """ Propagation du paquet d'onde """
2
3 def disp(omega):
4     # Input : omega (rad/s)
5     # Output : k (/m)
6
7     return np.sqrt(omega**2-omegap**2)/c
8
9 def signal(x,t):
10    # Output [float ou array] : s(x,t) pour tous les x donnees
11
12    s=0
13    for i in range(0,N):
14        omega=A[i,0]
15        k=disp(omega)
16        s+=A[i,1]*np.cos(omega*t-k*x)
17    return s

```

En définissant la liste des abscisses x et des temps t_k souhaités, on peut finalement tracer $s(x,t_k)$.

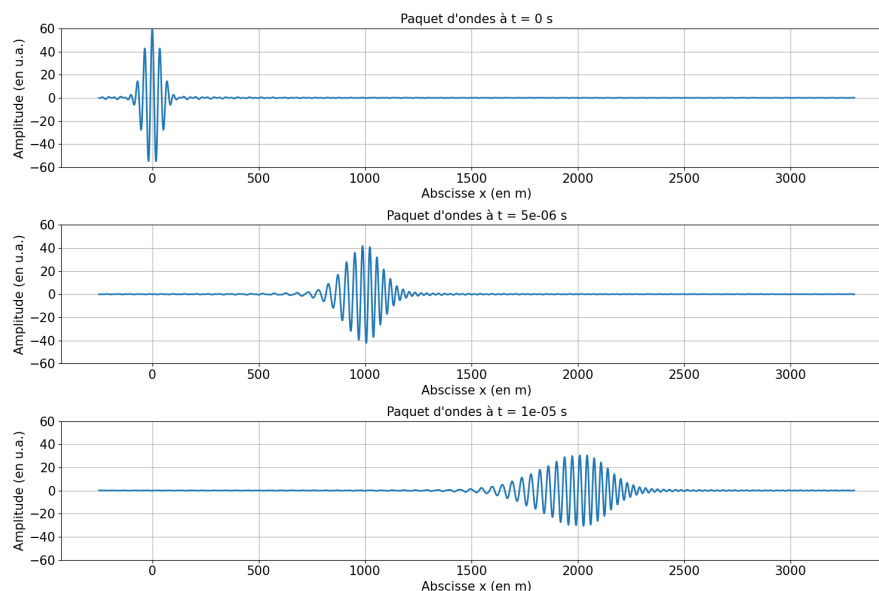
iii) Interprétations de la simulation

Cas d'un milieu non dispersif



Dans un milieu non dispersif, on observe une propagation en bloc du paquet d'onde, sans aucune déformation. En effet, comme la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, toutes les composantes d'OPPH qui composent le paquet d'onde se propagent à la même vitesse et se déplacent à la vitesse de groupe qui vaut la vitesse de phase.

Cas d'un milieu dispersif



★

Dans un milieu dispersif, comme chaque composante ne se déplace pas à la même vitesse, on observe une déformation du paquet d'onde au cours de sa propagation : en général on observe un étalement. Graphiquement, on observe ici que les ondes de petite longueur d'onde (i.e. grande pulsation) se propagent plus vite que les ondes de grande longueur d'onde (i.e. petite pulsation). Donc, ici, $v_\varphi(\omega)$ augmente avec ω . L'enveloppe possède une vitesse de groupe a priori différente des vitesses de phase de chacune des OPPH du paquet d'onde.

Par analogie avec le raisonnement fait dans le cas de la superposition de 2 OPPH, on définit la vitesse de groupe du paquet d'onde par :

★

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0}$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe.

Remarque : Démontrons ce résultat à partir d'un développement mathématique au premier ordre autour de la pulsation centrale ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) \quad \text{et} \quad k_r(\omega) \simeq k_r(\omega_0) + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k_0 + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

On peut alors réécrire le paquet d'onde sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{s}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times e^{j\left((\omega - \omega_0)t - \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x\right)} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right)} d\omega = e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \text{Env}\left(t - \frac{x}{\left(\frac{d\omega}{dk_r}\right)_{\omega_0}}\right) \end{aligned}$$

III Application aux ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

III.1 Préambule : relation de structure avec un vecteur d'onde complexe

Dans le chapitre O2, nous avons démontré la relation de structure valable pour une OPPH dans le vide ou pour une OPPH dans un DLHI transparent. Dans ce chapitre O3, comme le vecteur d'onde peut être complexe, la relation de structure est modifiée.

On considère une (pseudo-)OPPH en notation complexe se propageant selon $+\vec{e}_x$ ($\vec{k} = k\vec{e}_x$) : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ (on a choisi l'origine des phases pour que la phase à l'origine des temps et de l'espace soit nulle). Appliquons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}\end{aligned}$$

Relation de structure d'une OPPH avec un vecteur d'onde complexe

Pour une onde électromagnétique **plane progressive et harmonique**, les champs électrique et magnétique **complexes** vérifient

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

appelée la relation de structure.



Cette relation n'est a priori pas valide pour les champs réels.

III.2 Application au plasma dilué

Dans un plasma, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (\text{III.1})$$

Selon la valeur de ω , k est soit réel, soit imaginaire pur.

a Onde électromagnétique de haute fréquence : domaine de transparence

Étudions dans un premier temps le cas où $\omega > \omega_p$, i.e. $f > f_p \sim 1 \text{ MHz}$. On suppose que l'onde se propage selon $+\vec{e}_x$.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

$$k^2 > 0, \text{ donc } k \text{ est réel : } k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (+ \text{ car propagation selon } +\vec{e}_x)$$

On en déduit :

- Comme $k \in \mathbb{R}$, il n'y a pas d'atténuation dans le plasma. On dit que le domaine $\omega > \omega_p$ est le **domaine de transparence** du plasma.
- La vitesse de phase vaut :



$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

Donc, $v_\varphi(\omega)$: le plasma est dispersif.

- L'indice optique du plasma vaut $n = \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

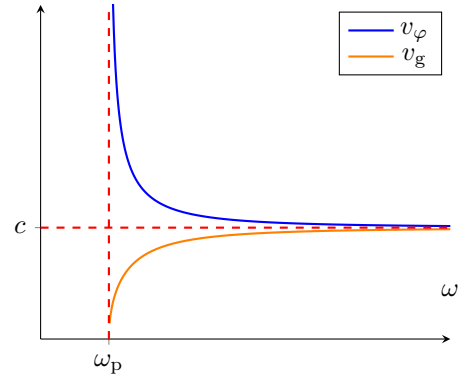
On observe que la vitesse de phase est toujours supérieure à la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c . Cela ne pose aucun problème physique, étant donné qu'une OPPH est partout, à tout instant : ce n'est pas un modèle physique pertinent pour décrire la réalité et une OPPH ne peut pas transmettre d'information.

Le plus rapide pour obtenir la vitesse de groupe est de différencier la relation de dispersion :

★

$$2kdk = 2\omega \frac{d\omega}{c^2} \iff v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas du plasma dilué, la vitesse de propagation de l'enveloppe est la vitesse de propagation de l'énergie (on l'admet à notre niveau). Elle doit donc rester inférieure à c : c'est bien le cas.



Structure de l'onde

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, on peut écrire l'expression du champ électrique et du champ magnétique. On suppose que la propagation se fait selon $+\vec{e}_x$ et que le champ \vec{E} est polarisé rectilignement selon \vec{e}_y . On choisit l'origine des phases telle que la phase à l'origine du champ électrique soit nulle.

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

★

L'onde étant une OPPH, la relation de structure complexe donne : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Ici : $k \in \mathbb{R}$, donc en réels :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega \mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_x \implies \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{e}_x \neq \vec{0}$$

L'onde électromagnétique transporte bien de l'énergie si $f > f_p$.

b Onde électromagnétique de basse fréquence : domaine réactif

Étudions désormais le cas où $\omega < \omega_p$, i.e. $f < f_p \sim 1 \text{ MHz}$.

Structure de l'onde

$k^2 < 0$, donc $k_i = \pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ et $k_r = 0$.

On en déduit l'écriture du champ électrique (polarisé selon \vec{e}_y) :

$$\vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \times e^{k_i x} \vec{e}_y$$

On ne garde alors que la solution physiquement acceptable $k_i < 0$. En réels :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \delta = -\frac{1}{k_i} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

★

On obtient une onde stationnaire, spatialement amortie sur une distance caractéristique δ . Le domaine $\omega < \omega_p$ est appelé **domaine réactif** du plasma.

Comme on a une pseudo-OPPH, on détermine le champ magnétique avec la relation de structure complexe :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(-\frac{j}{\delta} E_0 e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{\delta}} \right) \vec{e}_z$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Il vient alors que le vecteur de Poynting s'exprime :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\omega \delta \mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Cette onde ne se propage pas !!! Elle ne transporte, ni ne dissipe, aucune énergie (en moyenne).
On parle d'onde évanescente.

Onde évanescente

Une onde évanescente est une onde stationnaire avec une atténuation spatiale exponentielle.
Elle ne transporte aucune énergie en moyenne : on dit que l'onde ne se propage pas.

Remarque : On peut retrouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$ en utilisant le raccourci de calcul en notation complexe (champs \vec{E} et \vec{B} synchrones) :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\omega t} \vec{e}_y \wedge j \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\omega t} \vec{e}_z \right) = \vec{0}$$

Dans le domaine réactif, l'indice optique complexe du plasma est :

$$\underline{n} = \frac{kc}{\omega} = -j \frac{c}{\omega \delta} = -j \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 - 1}$$

c Application aux télécommunications

Exercice : On envoie une onde électromagnétique plane progressive et harmonique depuis la Terre vers l'ionosphère. On suppose que l'onde arrive en incidence normale sur l'ionosphère. Déterminer l'expression du coefficient de transmission en puissance à l'interface avec l'ionosphère, en fonction du domaine de pulsation de l'onde. On rappelle la valeur du coefficient de transmission en puissance dans le cas d'une interface entre deux milieux d'indices optiques réels (cf. chapitre O2) :

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Pour l'air, $n_1 \simeq 1$.

- Dans le domaine de transparence, l'indice optique du plasma n_2 est **réel**, donc

$$T = \frac{4n_2}{(1+n_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}\right)^2}$$

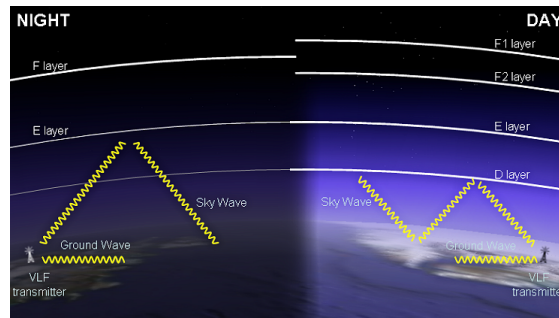
★

Il est intéressant de remarquer que $T \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \omega_p$ et si on fait un DL, remarquer que le dénominateur vaudra environ 1 et au numérateur, on aura du $\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \simeq \frac{\sqrt{2\omega_p}}{\omega_p} \sqrt{\omega - \omega_p}$, donc croît comme une racine carrée.

- Dans le domaine réactif, l'indice optique est **imaginaire pur**, ce qui implique que \vec{B} et \vec{E} sont en quadrature et donc que $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \vec{0} : T = 0$. Représenter graphiquement T en fonction de ω .

L'ionosphère se comporte alors comme un filtre passe-haut avec comme fréquence de coupure la fréquence plasma $f_p \sim 1$ MHz pour les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.

Il faut en tenir compte lors des procédés de télécommunications avec les satellites ou engins spatiaux (à haute fréquence), mais cela permet également à basse fréquence d'émettre à grande distance en utilisant la réflexion parfaite des OPPH sur l'ionosphère.



III.3 Application au conducteur ohmique

Dans un conducteur ohmique, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$$

a Champ électrique dans le conducteur ohmique

Commençons par déterminer les valeurs possibles de la partie réelle k_r et de la partie imaginaire k_i de \underline{k} .

Deux moyens de procéder :

- $\underline{k}^2 = e^{-j\pi/2}\mu_0\gamma_0\omega \iff \underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$. Donc : $k_r = \pm \frac{1}{\delta}$ et

★

$$k_i = \mp \frac{1}{\delta}$$

- $k_r^2 - k_i^2 = 0 \iff |k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0\gamma_0\omega$. Donc : $k_i = -k_r$ et on obtient le même résultat.

Exercice : On considère que la propagation a lieu selon $+\vec{e}_x$ et que la polarisation est rectiligne selon \vec{e}_y . Dédurre de ce qui précède :

- si le milieu est dispersif.
- l'expression du champ électrique réel \vec{E} dans le conducteur (on pourra considérer une phase à l'origine nulle). Donner une interprétation physique de δ .

- l'expression de l'indice optique complexe du conducteur.

On ne garde donc que la solution $k_r > 0$ et $k_i < 0$.

- La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \quad (\text{III.3})$$

$v_\varphi(\omega)$: le milieu est dispersif.

- Le champ en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - k_r x)} e^{k_i x} \vec{e}_y$$

★

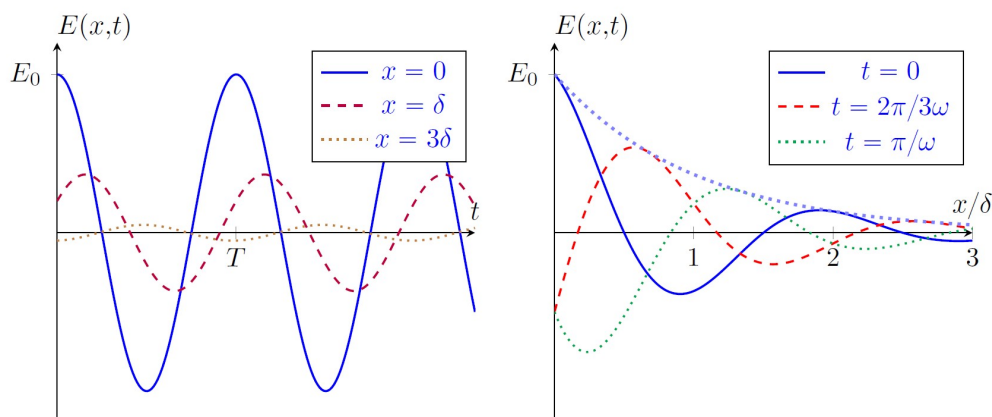
Donc :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{e}_y$$

La longueur caractéristique d'atténuation $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ est appelée l'épaisseur de peau. Le champ électrique est non nul sur une couche de taille de quelques δ , à proximité de l'interface avec l'air ou le vide. Il en va de même pour \vec{B} (cf. relation de structure) et pour \vec{j} (cf. loi d'Ohm locale).

$$\underline{n} = \frac{kc}{\omega} = (1-j) \frac{c}{\delta \omega} = (1-j) \sqrt{\frac{c^2 \mu_0 \gamma_0}{2\omega}} = (1-j) \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega}}$$

Il y a donc à la fois de l'atténuation et de la dispersion.



L'atténuation de l'onde est d'autant plus visible à haute fréquence, car l'épaisseur de peau décroît avec ω . Cela a quelques conséquences :

- pour le transport électrique à $f = 50$ Hz, des câbles en cuivre ont une épaisseur de peau de $\delta \sim 1$ cm : les champs électriques et magnétiques dans le câble vont se concentrer sur la périphérie du câble, d'où l'usage de câbles creux pour les lignes à hautes tensions ;
- pour l'émission d'ondes radio pour des fréquences allant jusqu'au GHz, on obtient $\delta \sim 5 \mu\text{m}$: une antenne creuse fera parfaitement l'affaire.

Remarque : Lors de l'étude électromagnétique des conducteurs ohmiques, on réalise souvent une modélisation simplifiée : celle du conducteur parfait. Dans cette modélisation $\gamma_0 \rightarrow +\infty$, donc $\delta \rightarrow 0$: les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur du conducteur parfait.

b Vecteur de Poynting associé

Calculons le champ magnétique. Comme l'onde est une pseudo-OPPH, on utilise la relation de structure complexe :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{1-j}{\delta \omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \quad (\text{III.4})$$

Calculons la moyenne du vecteur de Poynting (\underline{E} et \underline{B} synchrones) :

★

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y \wedge \frac{E_0(1+j)}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_z \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}$$

Remarque : On peut aussi retrouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$ en calculant d'abord \vec{B} en réels : $\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right)$
Avec l'expression de \vec{E} en réels, il vient alors :

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\delta\omega\mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}} \left(\cos[2]\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right) \vec{e}_x$$

dont le calcul de la moyenne permet de retrouver le résultat précédent.

L'onde transporte donc de moins en moins d'énergie au fur et à mesure que l'on progresse dans le métal : on parle d'absorption. Cette absorption est due au fait que l'onde cède de l'énergie à la matière, dissipée ensuite par effet Joule. On peut par exemple prouver ce transfert d'énergie à la matière en calculant la puissance volumique moyenne cédée par le champ à la matière :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} > 0$$

IV Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux d'indices optiques complexes

On reprend le cadre du chapitre O2 : une (pseudo-)OPPH incidente, polarisée rectilignement selon \vec{e}_x et se propageant selon \vec{e}_z , arrive en incidence normale sur une interface située en $z = 0$ et séparant deux milieux d'indices optiques **complexes** \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

Exercice : Donner la forme sous laquelle on recherche les champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis. On exprimera directement la forme de ces champs en fonction des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude \underline{r} et \underline{t} .

Il faut exprimer les champs sous formes complexes, car c'est le seul moyen de faire intervenir les coefficients \underline{r} et \underline{t} et de facilement prendre en compte des déphasages potentiels entre toutes les ondes. Faire un schéma pour s'aider !

★

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_i &= E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x & \text{et} & & \underline{\vec{B}}_i &= \frac{\underline{k}_1 \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega} = \frac{\underline{n}_1}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \\ \underline{\vec{E}}_r &= \underline{r} E_0 e^{j(\omega t + \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x & \text{et} & & \underline{\vec{B}}_r &= \frac{-\underline{k}_1 \wedge \underline{\vec{E}}_r}{\omega} = -\frac{\underline{n}_1 \underline{r}}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \\ \underline{\vec{E}}_t &= \underline{t} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_x & \text{et} & & \underline{\vec{B}}_t &= \frac{\underline{k}_2 \wedge \underline{\vec{E}}_t}{\omega} = \frac{\underline{n}_2 \underline{t}}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

avec $\underline{k}_1 = \underline{n}_1 \frac{\omega}{c}$ et $\underline{k}_2 = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$ (définition des indices optiques complexes).

On admet que les champs électromagnétiques sont continus à l'interface $z = 0$. Cela donne les deux conditions aux limites qui permettent de déterminer \underline{r} et \underline{t} :

$$\begin{aligned} \forall t, \underline{\vec{E}}_i(z=0, t) + \underline{\vec{E}}_r(z=0, t) &= \underline{\vec{E}}_t(z=0, t) & \Rightarrow & & 1 + \underline{r} &= \underline{t} \\ \forall t, \underline{\vec{B}}_i(z=0, t) + \underline{\vec{B}}_r(z=0, t) &= \underline{\vec{B}}_t(z=0, t) & \Rightarrow & & \underline{n}_1(1 - \underline{r}) &= \underline{n}_2 \underline{t} \end{aligned}$$

La résolution du système conduit à :

$$\underline{r} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$$

Interprétations :

- On retrouve (comme toujours) le fait que $\underline{r} = 0$ si et seulement si $\underline{n}_1 = \underline{n}_2$. Dès que les milieux de propagation ont des propriétés optiques différentes, il y aura réflexion partielle de l'onde. On peut d'ailleurs vérifier que si $\underline{n}_1 = \underline{n}_2$, alors $\underline{t} = 1$.
- Comme les indices optiques sont complexes, les coefficients \underline{r} et \underline{t} sont aussi a priori complexes non réels : les ondes réfléchies et transmises ont des amplitudes ET des déphasages différents de l'onde incidente.