

# Dispersion et absorption

## Ex. 1 (Ecrit Mines-Ponts PC 2025) Perturbation du système GPS par l'ionosphère

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page<sup>1</sup>

Il y a en permanence une trentaine de satellites GPS fonctionnels dont au moins 4 visibles au-dessus de l'horizon de n'importe quel point de la surface de la Terre. Chacun de ces quatre satellites émet en permanence un signal d'identification, sous forme d'une onde électromagnétique, qui précise en particulier l'instant d'émission du signal. La comparaison des instants de réception par un même récepteur GPS de ces quatre signaux permet de connaître les distances du récepteur aux quatre satellites puis d'accéder par le calcul aux coordonnées d'espace du récepteur : c'est le positionnement par satellite.

Ces mesures sont toutefois susceptibles d'être perturbées car les satellites GPS d'une part et les récepteurs d'autre part sont séparés par l'ionosphère, couche d'altitude comprise entre 100 et 800 km qu'on peut assimiler à un plasma, électriquement globalement neutre mais formé de molécules ionisées et d'électrons libres. Même si elle varie sensiblement dans le temps on supposera que la densité particulière moyenne des électrons  $n_e \simeq 10^{12} \text{ m}^{-3}$  est constante et on utilisera cette constante dans la modélisation.

On note  $e$  la charge élémentaire et  $m_e$  la masse d'un électron.

1. En négligeant toute force autre qu'électromagnétique, expliciter l'équation différentielle qui régit la vitesse d'un électron de l'ionosphère en fonction du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  du signal émis par le satellite GPS qui traverse ce milieu. L'intensité du signal reste faible donc le mouvement des électrons est non relativiste. On admet pour ce signal une structure d'onde plane progressive se dirigeant vers le sol, dans le cas où le satellite émetteur est à la verticale du récepteur :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + kz)}$$

de vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe  $v_g$  proches de la célérité  $c$  dans le vide. En déduire qu'on peut établir, en notation complexe, une relation linéaire entre la densité volumique de courant électronique  $\vec{j}_e$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .

2. Pour quelle raison peut-on négliger les contributions ioniques au courant total induit par le passage de l'onde dans le plasma ?

En déduire la relation de dispersion des ondes dans un tel plasma, qu'on mettra sous la forme  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$  et dans laquelle on explicitera la pulsation de plasma  $\omega_p$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $n_e$ .

Avec les données ci-dessus, on trouve numériquement  $f_p = \omega_p/2\pi = 8.9 \text{ MHz}$ .

3. Les signaux GPS sont émis aux fréquences  $f_1 = 1.2 \text{ GHz}$  et  $f_2 = 1.6 \text{ GHz}$ . Exprimer  $v_\varphi$  pour une fréquence d'émission  $f$  de l'onde.  
Exprimer l'erreur relative de l'approximation consistant à supposer que  $v_\varphi$  est égale à  $c$ . Calculer, *sans utiliser la calculatrice* (sujet Mines-Ponts...), cette erreur relative pour les 2 fréquences GPS.
4. Exprimer le décalage temporel lié à la traversée de la couche ionisée par rapport à une propagation qui se ferait entièrement dans le vide. En déduire l'imprécision sur la détermination de la distance entre le récepteur et le satellite. Donner un ordre de grandeur.
5. Quel est l'intérêt d'utiliser deux fréquences si on veut corriger l'imprécision liée à la traversée de l'ionosphère ?

**Formulaire :**  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{u})) - \Delta \vec{u}$

## Correction de l'exercice 1

**Remarque :** Le sujet ne distingue pas, dans ses notations, les grandeurs complexes et réelles. Donc ici, toutes les grandeurs

<sup>1</sup> Pour l'A.N., il faut au préalable réaliser un développement limité de l'erreur relative.   
 <sup>2</sup> On doit supposer l'onde transverse pour obtenir la relation de dispersion (hypothèse qui manquait dans le sujet original).

sont par défaut complexes.

- Système : {électron "moyen"} de masse  $m_e$
  - Référentiel terrestre supposé galiléen
  - BdF : on néglige toute force autre que la force de Lorentz :  $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Comparons les deux composantes de la force de Lorentz en odg :

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

en utilisant (en odg) l'expression de l'amplitude du champ magnétique pour une OPPH dans le vide  $B = E/c$ . Ainsi, on néglige la composante magnétique de la force de Lorentz.

PFD :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

On considère ici un RSF, on utilise alors la notation complexe  $\underline{\vec{v}} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$ . Ainsi, l'ED précédente devient

$$i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

On en déduit  $\underline{\vec{j}}_e = -en_e \underline{\vec{v}} = -i \frac{e^2 n_e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}$

- Les ions ont une masse bien plus importante que les électrons (rapport d'environ 1000 entre la masse d'un proton et d'un électron). Donc, on considère les ions fixes dans le référentiel galiléen. Ainsi,  $\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j}}_e$ . On pose alors la conductivité complexe du plasma  $\underline{\gamma} = -i \frac{e^2 n_e}{m_e \omega}$ .

Etablissement de l'équation d'onde :

Soit on suppose l'onde transverse (c'est le cadre du programme) et on a  $\text{div}(\vec{E}) = 0$  ; soit on remarque que comme  $n_e = \text{cste}$  et que les cations sont supposés fixes, la densité volumique de charges  $\rho = \text{cste}$ . Ainsi,  $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = \vec{0}$ .

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{E}})) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{B}})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) \quad (\text{Ex.1})$$

où on a utilisé le théorème de Schwarz. En utilisant le formulaire d'analyse vectorielle, on a également :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \underline{\vec{E}} - \Delta \underline{\vec{E}} = -\Delta \underline{\vec{E}} \quad (\text{Ex.2})$$

Ainsi, on aboutit à :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \quad (\text{Ex.3})$$

Relation de dispersion :

On injecte la forme d'OPPH proposée dans l'énoncé dans l'équation d'onde :

$$(ik)^2 = \frac{(i\omega)^2}{c^2} + \underbrace{\mu_0 \gamma i\omega}_{= + \frac{\mu_0 e^2 n_e}{m_e}} \Rightarrow c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{c^2 \mu_0 e^2 n_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$$

- On remarque que  $f > f_p$ , donc  $k^2 > 0$  et donc  $k$  est réel (on le prend positif ici). Ainsi,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Avec la relation de dispersion, on obtient  $k = + \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ . Donc,

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}}$$

On définit l'erreur relative sur la vitesse de propagation de l'OPPH :

$$E_R = \frac{v_\varphi - c}{c} = \frac{v_\varphi}{c} - 1$$

Avec le résultat précédent :

$$E_R = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}} - 1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2$$

en remarquant que  $f \gg f_p$  et en réalisant un DL.

A.N. :  $E_R(f_1) = 2.8 \times 10^{-5}$  et  $E_R(f_2) = 1.5 \times 10^{-5}$

4. Le satellite étant supposé à la verticale du récepteur, l'onde traverse une couche d'épaisseur  $L = 700$  km de plasma. Cette épaisseur  $L$  est fixée.

Supposons que l'émission ait lieu à  $t = 0$ . L'onde est reçue à  $t = \frac{L}{v_\varphi}$ . L'erreur commise en supposant que  $v_\varphi \simeq c$  peut être déterminée avec une différentielle logarithmique :

$$\frac{dt}{t} = \frac{dv_\varphi}{v_\varphi} \Rightarrow dt = \frac{L}{v_\varphi} \frac{v_\varphi - c}{c} \simeq \frac{LE_R(f)}{c}$$

**Remarque :** La méthode de la différentielle logarithmique fait gagner beaucoup de temps par rapport à un calcul complet de  $L \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_\varphi} \right)$ .

On en déduit que l'imprécision commise sur la mesure de  $L$  sera de  $dL = cdt = LE_R(f)$ . A.N. :  $dL \sim 10$  m, ce qui peut être gênant pour du positionnement précis par GPS...

5. En comparant les instants de réception des signaux aux deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , on peut déterminer la valeur réelle de  $f_p$  (l'énoncé ne donne qu'un odg car  $n_e$  varie sur deux odg entre le jour et la nuit...), puis en déduire la vraie valeur de la vitesse de phase à chacune des deux fréquences d'émission. On n'a plus la nécessité de supposer que  $v_\varphi = c$ .

## Ex. 2 (Ecrit E3A-Polytech PC 2023) Ondes EM dans l'eau de mer

On s'intéresse dans cette partie à quelques aspects de la transmission des ondes électromagnétiques dans l'eau de mer. La particularité de ce milieu est qu'il n'est ni un bon conducteur, ni un bon isolant. Ainsi, les ondes radio habituelles (stations radio, téléphones portables...) sont inutiles dans le cas des transmissions avec un sous-marin en plongée. On va supposer que l'eau de mer est un milieu linéaire, homogène et isotrope, de conductivité  $\gamma = 4 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ , la loi d'Ohm locale peut s'appliquer.

On admet que pour tenir compte des propriétés spécifiques de l'eau de mer, on est conduit à remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$  par la permittivité absolue  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  dans les équations de Maxwell. La permittivité relative sera prise constante :  $\epsilon_r = 81$ . On prendra aussi pour toute la suite la perméabilité magnétique comme étant celle du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Q13.** Donner les quatre équations de Maxwell (ainsi que leur nom) pour l'eau de mer. En déduire l'équation locale de conservation de la charge électrique. À l'aide de cette dernière, montrer que l'eau de mer est effectivement un milieu localement neutre. On fera intervenir pour cette réponse un temps de relaxation  $\tau_R$  à exprimer en fonction de  $\epsilon$  et  $\gamma$  et dont on calculera la valeur numérique.

On suppose par la suite que l'eau de mer est effectivement localement neutre. On cherche dans l'eau de mer des solutions en onde plane progressive harmonique (OPPH) de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \text{ et } \vec{B}(M,t) = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

avec un vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire réel.

**Q14.** À partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles dont  $\vec{E}(M,t)$  est solution.

**Q15.** Établir la relation de dispersion de l'OPPH dans l'eau de mer. Montrer que l'on retrouve la relation de dispersion dans le vide si la conductivité est nulle et si  $\epsilon = \epsilon_0$ .

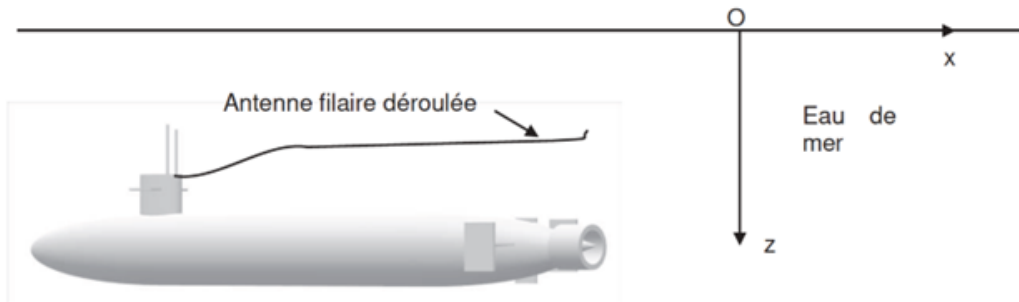


Figure 9- Sous-marin en immersion

On s'intéresse à la propagation d'une OPPH polarisée rectilignement suivant  $\vec{u}_x$ , vecteur unitaire porté par l'axe (Ox) (voir la **figure 9**). L'onde se propage dans l'eau suivant l'axe (Oz) perpendiculairement à la surface de l'eau (plan (Oxy)).

On pose  $\vec{k} = k\vec{u}_z = (k_r - jk_i)\vec{u}_z$  avec  $k_r$  et  $k_i$  réels positifs.

**Q16.** Après avoir déterminé le champ  $\vec{B}(M,t)$ , donner l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  en fonction de  $\mu_0, \omega, k_r, k_i, |\vec{E}_0|$  et de  $z$ .

L'intensité énergétique  $I = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\|$  peut se mettre sous la forme  $I(z) = I(0)e^{-\alpha z}$ . On définit alors une atténuation  $A_{dB} = 10 \log \left( \frac{I(0)}{I(z)} \right)$  exprimée en décibel.

**Q17.** Identifier le coefficient  $\alpha$ . Montrer que l'atténuation par unité de longueur,  $\frac{A_{dB}}{z}$ , est proportionnelle à  $k_i$ .

18. Montrer que pour  $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon}$ , on a  $\vec{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ . Exprimer la grandeur  $\delta$ . Choisir le signe + ou - à conserver dans l'expression de  $\vec{k}$  du point de vue du sens physique.

Comment varie l'atténuation par unité de longueur dans ce cas ? Calculer numériquement  $\delta$  pour des ondes dites VLF (Very Low Frequency) comprises entre 3 kHz et 30 kHz utilisées pour communiquer avec un sous-marin en plongée. Faire le calcul pour les deux valeurs extrêmes de fréquences. Commenter en rapport avec la figure 9.

## Formulaire

- La valeur moyenne temporelle du produit de deux fonctions sinusoïdales  $f$  et  $g$  de même période peut être calculée à partir de leurs représentations complexes à l'aide de la formule :

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*) \quad \text{où } \underline{g}^* \text{ est le conjugué de } \underline{g}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$$

# E3A - POLYTECH PC 2023 - Ondes EM dans l'eau de mer

13) Maxwell-Gauss:  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$  (176)

Maxwell-Faraday:  $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (MF)

Maxwell-Thomson:  $\text{div } \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère:  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$   
 $= \mu_0 \delta \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (17A)

avec  $\rho$ , la densité volumique de charge

$\vec{j} = \delta \vec{E}$  la vecteur densité de courant électrique

• En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, et en utilisant le formulaire:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{B}) &= 0 \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \mu_0 \text{div}(\vec{j}) + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}) \\ &= \mu_0 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) \right) \end{aligned}$$

On obtient l'équation de conservation de la charge:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0} \quad (1)$$

• Milieu localement neutre: On cherche à montrer que  $\rho = 0$ .

Avec la loi d'Ohm locale et (1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho = 0 \quad (MG)$$

On introduit le temps de relaxation  $\tau_R = \frac{\epsilon}{\gamma} = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

Ainsi, tant qu'on s'intéresse à des ondes électromagnétiques de fréquence  $f \ll \frac{1}{\tau_R} \sim 10^{10} \text{ Hz}$  (i.e.  $\lambda \gg 0,05 \text{ m}$ ), on pourra



considères que  $\rho$  a atteint sa valeur permanente:  $\rho = 0$ .  
(Cela revient à s'intéresser aux ondes radio.)

14)  $\Delta$  Cette  $\underline{Q}$  n'est pas identique à celle du cours, car on précise que l'eau de mer n'est pas un bon conducteur, i.e. on ne peut pas dire que  $\|\underline{\vec{J}}\| \gg \epsilon_0 \|\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\|$ .

Avec la formule:

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\vec{E}}) = \underbrace{\text{grad}(\text{div } \underline{\vec{E}})}_{=0} - \Delta \underline{\vec{E}}$$

$\hat{Q} \cdot 13 + (116)$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\underline{\vec{B}}))}_{\substack{\uparrow \\ (PF)+ \\ \text{Schwarz}}} = -\Delta \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\mu_0 \delta \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}}_{\substack{\uparrow \\ (MA)}} = -\Delta \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{\vec{E}} = \mu_0 \left( \delta \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \right)}$$

15) On injecte la solution sous forme d'OPPH:

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 (j\omega \delta \underline{\vec{E}} - \epsilon \omega^2 \underline{\vec{E}})$$

$$\text{Or, } \underline{\vec{E}} \neq \underline{\vec{0}} \Rightarrow \boxed{k^2 = \mu_0 (\epsilon \omega^2 - j\omega \delta)} \quad (12)$$

Si on avait  $\delta = 0$  et  $\epsilon = \epsilon_0$ , on obtiendrait:  $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

avec  $c$  la célérité de la lumière dans le vide. On reconnaît bien la relation de dispersion du vide.

16) On utilise la relation de structure valable pour les OPPH:

$$\underline{\vec{B}}(r,t) = \frac{\underline{\vec{k}}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}(r,t) \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}(r,t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{\vec{u}_x}$$

$$\underline{\vec{B}}(r,t) = \frac{\underline{k}}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{\vec{u}_y}$$

$\vec{B}$  et  $\vec{E}$  étant deux OPPH de même fréquence, on peut utiliser la relation du formulaire:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$$

$$\text{On a: } \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k_i z} e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{\vec{u}_x}$$

$$\underline{\vec{B}}^* = \frac{\underline{k}^*}{\omega} E_0^* e^{-k_i z} e^{-j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{\vec{u}_y}$$

$$\text{Donc: } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |E_0|^2 e^{-2k_i z} \text{Re}(\underline{k}^*) \underline{\vec{u}_z}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k_r}{2\mu_0 \omega} |E_0|^2 e^{-2k_i z} \underline{\vec{u}_z}$$

17) On identifie  $\alpha = 2k_i$ .

$$\text{On a: } \frac{I(0)}{I(z)} = e^{2k_i z}$$

$$\text{Donc: } \text{AdB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{I(0)}{I(z)}\right)$$

$$= \frac{10}{\lg(10)} \ln\left(\frac{I(0)}{I(z)}\right)$$

$$= \frac{10}{\lg(10)} \times 2k_i z$$

$$\Rightarrow \frac{\text{AdB}}{z} = \frac{20}{\lg(10)} k_i \approx k_i$$



18) On cherche  $k$ , on reprend donc la relation de dispersion (2):

$$k^2 = \mu_0 \omega (\epsilon \omega - j\delta)$$

Si  $\omega \ll \frac{\delta}{\epsilon}$ , alors on néglige le terme en  $\mu_0 \epsilon \omega^2$ . Donc:

$$\underline{k^2 = -j\mu_0 \delta \omega}$$

(On reconnaît la relation de dispersion usuelle dans un conducteur ohmique!)  
Bon

La solution donne:  $k = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \delta \omega}$

$$= \pm \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \delta \omega}}}$$

• L'onde étudiée ici se propage selon  $+\vec{e}_z$ . Donc,  $k_r \geq 0$ . On a alors  $k_i \geq 0$ , cohérent avec le phénomène d'atténuation par effet Joule. Donc:  $\boxed{k = +\frac{1-j}{\delta}}$ .  $\Rightarrow k_i = \frac{1}{\delta}$ .

• Avec le 2.14, on a  $\boxed{\frac{AdB}{\delta} = \frac{20}{\ln(10)} \times \frac{1}{\delta}}$ : l'atténuation par unité de longueur augmente si  $\delta$  diminue, i.e. si  $\omega$  augmente.

• A.N:  $\delta = 4,6 \text{ m} \hat{=} 3 \text{ kHz}$

$\delta = 1,5 \text{ m} \hat{=} 30 \text{ kHz}$

Cette épaisseur de peau de l'ordre du mètre implique que l'onde électromagnétique s'atténue sur une distance de quelques mètres à une vingtaine de mètres. Pour que le sous-marin réceptionne un signal pas trop atténué, il doit avoir une antenne filaire allant à proximité de la surface avec l'air: cela réduit la distance à parcourir par l'onde.

### Ex. 3 (Inspiré de Ecrit Mines-Ponts MPI 2023) La mesure de la distance Terre-Lune

La mesure actuelle de la distance Terre-Lune se fait à l'aide de la télémétrie laser. Depuis la surface de la Terre, on envoie une impulsion laser vers des miroirs déposés à la surface de la Lune par différentes missions, dont celui le plus utilisé, déposé par la mission Apollo 15 en 1971.

Pour produire le laser nécessaire à cette expérience, on réalise une cavité optique constituée de deux miroirs en vis-à-vis séparés par de l'air dans lequel on place un amplificateur optique. La cavité optique est paramétrée sur la figure 1. Le repère orthonormé  $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$  est direct.

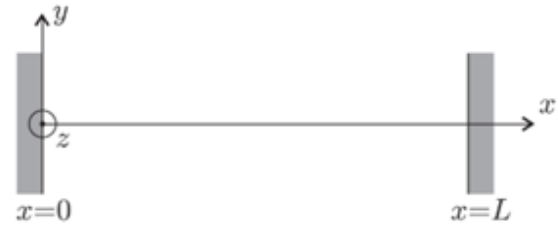


FIGURE 1 – Cavité optique.

On considère que les miroirs sont constitués de métal idéal, c'est-à-dire qu'un champ électrique ne peut pas se propager à l'intérieur. Le champ électrique  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  est introduit dans la cavité optique. Enfin, l'amplificateur optique ne sera pas pris en compte pour la propagation de l'onde dans la cavité remplie d'air qui sera supposé avoir les mêmes propriétés que le vide pour le champ électromagnétique.

1. Quelles sont les caractéristiques du champ électrique  $\vec{E}_i$  introduit dans la cavité optique ? On précisera le nom et l'unité des grandeurs  $E_0$ ,  $\omega$  et  $k$ .
2. En utilisant vos connaissances sur l'effet de peau dans un métal, justifier l'hypothèse d'un champ électromagnétique nul dans les miroirs.
3. En utilisant la relation de continuité du champ électromagnétique (appelée aussi relation de passage) donnée en annexe, déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}_r(x, t)$  réfléchi par le miroir situé en  $x = L$ .
4. En déduire l'expression du champ électrique résultant  $\vec{E}$  dans la cavité. Comment nomme-t-on ce type d'onde ?
5. Déterminer l'expression du champ magnétique résultant  $\vec{B}$  dans la cavité.
6. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  de l'onde électromagnétique résultante, ainsi que sa valeur moyenne au cours d'une période  $\tau = 2\pi/\omega$ . L'un des deux miroirs n'est pas parfaitement réfléchissant, quel en est l'intérêt ? Expliquer le rôle de l'amplificateur optique.
7. Justifier que la forme du champ électromagnétique ne permet pas d'utiliser la cavité pour obtenir n'importe quelle fréquence laser. Déterminer l'expression des fréquences possibles en fonction notamment de la longueur  $L$  de la cavité.
8. Le laser utilisé pour la télémétrie Terre-Lune est un laser YAG-Nd de longueur d'onde  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  auquel on a adjoint un doubleur de fréquence. Quelle est la longueur d'onde utilisée pour cette mesure et quel est le domaine électromagnétique correspondant ?
9. La durée moyenne de l'aller-retour pour un très grand nombre d'impulsions laser entre la Terre et la Lune est  $\Delta t = 2.56 \text{ s}$ . Déterminer la distance Terre-Lune obtenue par la télémétrie laser.

#### Relation de continuité des champs électromagnétiques

En présence de charges surfaciques  $\sigma$ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques  $\vec{j}_s$ , la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

Le vecteur  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est un vecteur unitaire normal au dioptré et dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

### Correction de l'exercice 3

1.  $\vec{E}_i$  caractérise une OPPH polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_y$ . L'onde se propage selon  $\vec{e}_x$ .
  - $E_0$  : amplitude du champ (en  $\text{V m}^{-1}$ )

- $\omega$  : pulsation de l'onde (en  $\text{rad s}^{-1}$ )
  - $k$  : vecteur d'onde (en  $\text{m}^{-1}$ )
2. Le champ électromagnétique n'est non nul dans un métal que sur une zone à proximité de l'interface air/métal de l'ordre de quelques épaisseurs de peau  $\delta$ . Or,  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  avec  $\gamma$  la conductivité électrique du métal. Si le métal est idéal,  $\gamma \rightarrow +\infty$  et donc  $\delta \rightarrow 0$ . On peut alors considérer que le champ EM est nul partout dans le métal. Donc, en appelant 2 le milieu métallique,  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ .
3. Commençons par donner l'expression générale du champ  $\vec{E}_r$ . Par linéarité et comme l'onde réfléchie sera aussi polarisée selon  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_y$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$  d'après la relation de dispersion dans le vide. Ainsi, le champ électrique dans le milieu 1 (air dans la cavité) est  $\vec{E}_1 = \vec{E}_i(x,t) + \vec{E}_r(x,t)$  selon  $\vec{e}_y$ . Ce champ est donc tangentiel à l'interface. Par continuité du champ électrique tangentiel, on a  $\vec{E}_1(x=L,t) = \vec{0}$ . Ainsi, avec cette CL en  $x = L$ , on obtient :

$$E_0 e^{j(\omega t - kL)} + \underline{E}_{r0} e^{j(\omega t + kL)} = 0 \Rightarrow E_0 e^{-jkL} + \underline{E}_{r0} e^{jkL} = 0 \Rightarrow \underline{E}_{r0} = -E_0 e^{-2jkL}$$

On en déduit donc le champ électrique réfléchi dans la cavité :

$$\vec{E}_r(x,t) = -E_0 e^{j(\omega t + kx - 2kL)} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx - 2kL) \vec{e}_y$$

4. Par théorème de superposition, on a :  $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0 \sin(\omega t - kL) \sin(kx - kL) \vec{e}_y$ . Il s'agit d'une onde stationnaire harmonique.
5. On détermine  $\vec{B}$  avec le théorème de superposition :  $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$ .  
L'onde incidente étant une OPPH dans le vide, la relation de structure donne :

$$\vec{B}_i = \frac{k \vec{e}_x \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

De même pour l'onde réfléchi :

$$\vec{B}_r = \frac{-k \vec{e}_x \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx - 2kL) \vec{e}_z$$

Ainsi, on obtient :

$$\vec{B}(x,t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kL) \cos(kx - kL) \vec{e}_z$$

6. Le vecteur de Poynting s'exprime :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t - 2kL) \sin(2kx - 2kL) \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Il est nécessaire que l'un des deux miroirs ne soit pas parfaitement réfléchissant pour permettre d'avoir  $\langle \vec{\Pi} \rangle \neq \vec{0}$  : une partie de l'énergie EM est alors transmise à l'extérieur de la cavité, ce qui permet de créer le faisceau laser.

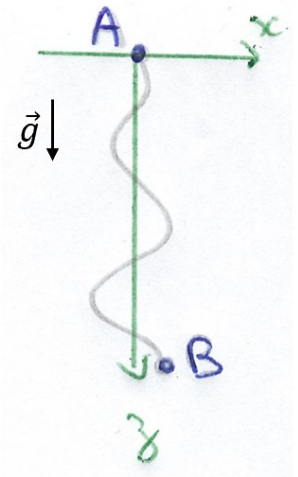
Cependant, sans amplificateur optique, comme l'énergie EM de la cavité diminue du fait de l'onde transmise, le faisceau laser devrait rapidement diminuer en intensité. L'amplificateur optique permet alors de maintenir cette émission laser.

7. CL en  $x = 0$  :  $\vec{E}(x=0,t) = \vec{0}$ , ce qui implique  $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (on élimine  $k = 0$ , qui ne caractériserait pas une onde et on se limite à  $k > 0$  car l'onde incidente se propage dans le sens des  $x$  croissants). Ainsi,  $f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$ . Il s'agit classiquement des modes propres de la cavité de longueur  $L$ .
8. Si la fréquence est multipliée par 2, la longueur d'onde est divisée par 2 :  $\lambda_{\text{émission}} = 532 \text{ nm}$ . Emission dans le visible (dans le vert).
9. Soit  $d$  la distance Terre-Lune. Le laser parcourt  $2d$  en  $\Delta t$ . Donc,  $2d = c\Delta t \Rightarrow d = \frac{c\Delta t}{2}$ . A.N. :  $d = 384 \times 10^6 \text{ m}$ .

## Ex. 4 Corde vibrante verticale

Une corde vibrante verticale de masse linéique  $\mu$  et de longueur  $\ell \simeq 10\text{ m}$  est suspendue par une de ses extrémités  $A$ , l'autre extrémité  $B$  étant libre. Au repos,  $A$  est fixe et la corde est verticale. On définit alors l'axe  $(Oz)$  vertical, orienté vers le bas, dont l'origine est en  $A$ . On considère la corde quasi-inextensible et infiniment souple.

Lorsqu'on impose à l'extrémité  $A$  un déplacement  $x_A = a_M \cos(\omega t)$ , on constate que la corde se déforme avec une onde de déplacement  $x(z, t)$  de pulsation  $\omega$ , qui se propage et dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de  $A$ . Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est supposé uniforme. On s'intéresse uniquement aux petites déformations de la corde par rapport au repos.



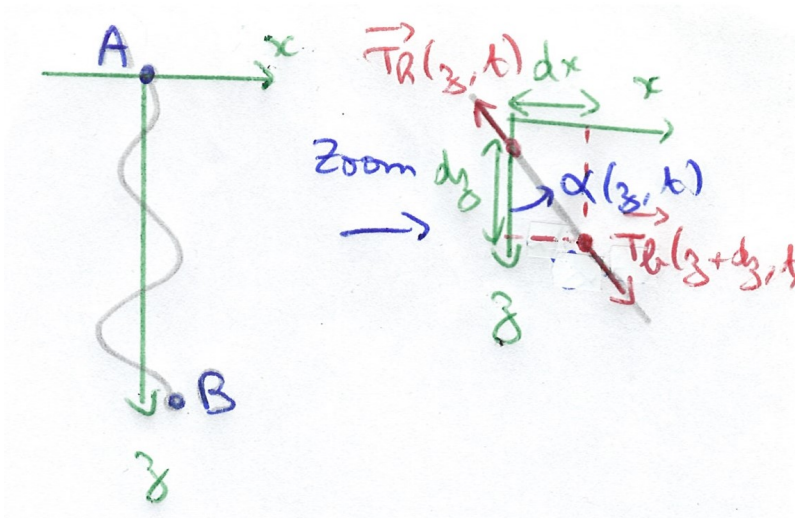
1. Montrer que la norme  $T(z, t)$  de la tension dans la corde s'exprime par :  $T(z, t) = \mu g(\ell - z)$ .
2. En déduire que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (\text{Ex.4})$$

Cette équation aux dérivées partielles est-elle linéaire ? A-t-on alors le droit de chercher la relation de dispersion en injectant une OPH complexe dans l'équation ?

3. On se place "au début" de la corde, ce qui permet de remplacer  $\ell - z$  par  $\ell$  dans le coefficient variable de l'équation précédente. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

### Correction de l'exercice 4



1. Comme d'habitude quand on étudie une corde vibrante, on commence par présenter les hypothèses de modélisation :
  - On suppose que la corde est infiniment souple (aucune résistance à sa déformation) et qu'elle est quasi-inextensible (un point  $M$  se déplace à  $z$  fixé et la masse linéique reste constante).
  - On réalise une modélisation pour les petites déformations :  $|\alpha(z, t)| \ll 1$ . Tous les développements seront faits à l'ordre 1 en  $\alpha$ .

Géométriquement, on établit que :

$$\tan(\alpha(z, t)) \simeq \alpha(z, t) = \frac{\partial x}{\partial z}$$

On étudie désormais une portion infinitésimale de corde, entre  $z$  et  $z + dz$ , dans le référentiel du labo galiléen. BdF :

- $\vec{T}_b(z + dz, t) = \vec{T}(z + dz, t)$
- $\vec{T}_h(z, t) = -\vec{T}_b(z, t) = -\vec{T}(z, t)$  avec le principe des actions réciproques

$$\bullet \vec{P} = \mu dz g \vec{e}_z$$

Soit  $T(z,t)$  la norme de  $\vec{T}(z,t)$ . On applique alors un PFD au système précédent :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \vec{T}(z+dz,t) - \vec{T}(z,t) + \mu dz g \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} dz + \mu dz g \vec{e}_z \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} + \mu g \vec{e}_z$$

On projette cette équation sur  $\vec{e}_z$  :

$$0 = \frac{\partial \vec{T} \cdot \vec{e}_z}{\partial z} + \mu g = \frac{\partial}{\partial z} (T(z,t) \cos(\alpha(z,t))) + \mu g \simeq \frac{\partial T}{\partial z} + \mu g$$

On en déduit :

$$T(z,t) = -\mu g z + f(t)$$

où la constante est a priori une fonction dépendant du temps. On détermine cette constante à l'aide d'une CL. La plus simple est en  $z = \ell$  :

$$T(z = \ell, t) = 0, \forall t \Rightarrow T(z, t) = T(z) = \mu g(\ell - z)$$

2. On reprend l'EDP précédente, que l'on projette cette fois suivant  $\vec{e}_x$  :

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T} \cdot \vec{e}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\mu g(\ell - z) \sin(\alpha(z,t))) \simeq \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu g(\ell - z) \frac{\partial x}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

Cette EDP est linéaire, mais comme elle n'est pas à coefficients constants, on ne peut pas chercher une solution sous la forme d'une OPH complexe...

3. On a alors :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g\ell \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

Cette fois, on a une EDP linéaire à coefficients constants : on cherche une solution sous forme d'OPH complexe :  $\underline{x} = A e^{j(\omega - \underline{k}z)}$ . On injecte :

$$-\omega^2 = +jg\underline{k} - g\ell \underline{k}^2 \iff \underline{k}^2 - j\frac{1}{\ell}\underline{k} - \frac{\omega^2}{g\ell} = 0$$

c'est une équation complexe, on peut calculer le discriminant  $\Delta = -\frac{1}{\ell^2} + 4\frac{\omega^2}{g\ell}$ . Ainsi si  $\Delta > 0$ ,  $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$ , on a une solution complexe, sinon imaginaire pure (et donc une onde stationnaire : pas de propagation). En l'occurrence, on s'intéresse à une onde progressive et non stationnaire (l'observation ne décrit pas des nœuds).

Donc, on suppose que  $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$  :

$$\underline{k} = \frac{1}{2} \left( j\frac{1}{\ell} \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (\text{Ex.5})$$

soit une propagation avec amplification ( $k_i > 0$ ) sur une distance caractéristique  $\delta = 2\ell$ , ce qui permet d'expliquer l'observation.



## Ex. 5 (Ecrit CCINP MP 2023) Chaîne 1D infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_o$ . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $m$  cette masse des masselottes entre les ressorts,  $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$  le vecteur position de la  $n^{\text{ième}}$  masse et  $u_n(t)$  son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à  $t = 0$ , la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre **(figure 1)** est égale à la longueur à vide,  $\ell_o = a$ .

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par  $n = 0$  à  $t = 0$ .

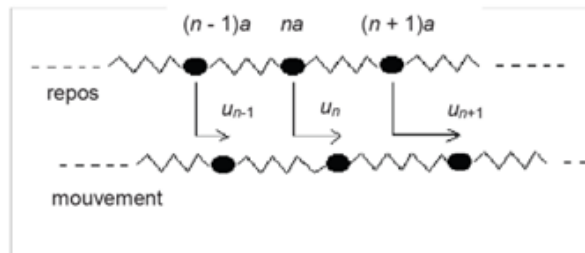


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

**Q5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrire la position initiale de la  $n^{\text{ième}}$  masse ( $x_n(0)$ ) en fonction de  $n$  et de  $a$ . En déduire son écart  $u_n(t)$  par rapport à sa position d'équilibre en fonction de  $x_n(t)$ ,  $n$  et de  $a$ .

**Q6.** Établir que l'équation du mouvement de la  $n^{\text{ième}}$  masse, se met sous la forme :  $\ddot{u}_n = \omega_o^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$  avec  $\alpha$ , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel  $q$  strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$u_n(t) = U_o \exp(i(\omega t - qna)) \text{ avec } i^2 = -1, \omega \text{ et } U_o \text{ strictement positifs.}$$

**Q7.** Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent  $U_o$  et  $\omega$  ?

La question Q8 est supprimée dans le cadre de l'exercice.

**Q9.** Montrer que la relation de dispersion, reliant  $\omega$  et  $q$ , est  $\omega^2 = 4\omega_o^2 \left( \sin \frac{qa}{2} \right)^2$ .

Représenter graphiquement la fonction :  $[q \mapsto \omega(q)]$  en se restreignant à l'intervalle  $\left[ 0, \frac{2\pi}{a} \right]$ .

**Q10.** Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe  $v_g$  et de la vitesse de phase  $v_\phi$ . Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question Q9 ?

**Q11.** La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire  $\omega$  pour que  $q$  existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.

**Q12.** Déterminer  $v_g$  et  $v_\phi$  pour  $q \ll \frac{\pi}{a}$  et pour  $q = \frac{\pi}{a}$ . On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

13. Pour  $q = \frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{\pi}{a}$ , i.e. pour  $\lambda \gg a$ , on peut passer à une description continue du problème. On introduit alors une fonction d'onde  $u(x,t)$  continue de l'espace telle que  $u(x = na, t) = u_n(t)$ . L'équation d'onde s'écrit alors  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .



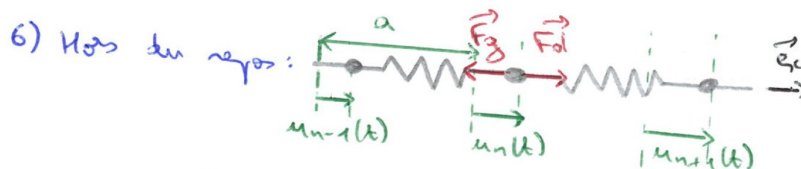
Expliquer succinctement comment on pourrait procéder pour démontrer cette équation aux dérivées partielles (EDP) à partir de l'équation différentielle de la Q.6. Retrouver alors le résultat de la Q.12 en utilisant l'EDP fournie.

### Correction de l'exercice 5

5) À  $t=0$ , la laine est au repos:  $x_n(0) = na$ .

Donc:  $u_n(t) = x_n(t) - x_n(0)$

$$u_n(t) = x_n(t) - na$$



• Système: {masse  $n$ }

• Référentiel galiléen

• Principe fondamental de la dynamique:

$$m \ddot{u}_n \vec{e}_x = -k (\cancel{a} + u_n(t) - u_{n-1}(t) - \cancel{a}) \vec{e}_x + k (\cancel{a} + u_{n+1}(t) - u_n(t) - \cancel{a}) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \ddot{u}_n = \omega_0^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On a donc  $\alpha = 2$ .

7) On reconnaît, pour  $n$  fixé, une forme du type

$$u_n(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

L'onde est harmonique, de pulsation (temporelle)  $\omega$  et d'amplitude  $U_0$ .

3) on injecte l'expression de  $\underline{u}_n(t)$  dans l'équation du mouvement (2.6):

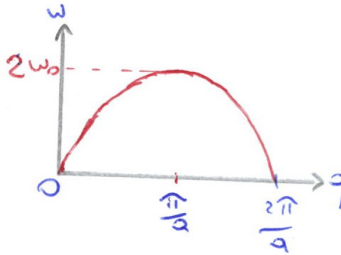
$$-\omega^2 \underline{u}_n = \omega_0^2 \left( e^{-iqa} + e^{iqa} - 2 \right) \underline{u}_n$$

$$= 2\omega_0^2 (\cos(qa) - 1) \underline{u}_n$$

$$\underline{u}_n \neq 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(qa))$$

$$\boxed{\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}$$

Pour  $q \in [0, \frac{2\pi}{a}]$ ,  $\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{qa}{2}\right)$



10) Vitesse de phase  $v_\phi$ : Vitesse de propagation d'une onde harmonique progressive  $\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{q}}$

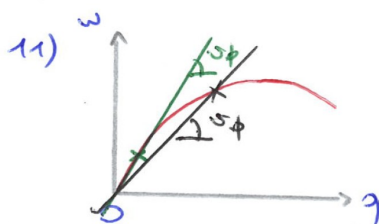
Vitesse de groupe  $v_g$ : Vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe d'un paquet d'onde:

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dq}}$$

lecture sur le graphe:

$v_g$  est la pente de la tangente à la courbe.

$v_\phi$  est la pente de la droite passant par l'origine et le point considéré.



On remarque graphiquement que  $v_\phi(\omega)$ : la chaîne est dispersive.  
 $q$  existe à condition que  $\omega < 2\omega_0$  (l'onde ne se propage pas sinon).

Les ondes de pulsations élevées ne se propagent pas : le plasma constitue un filtre passe-bas de pulsation de coupure  $2\omega_0$ .

12). Si  $q \ll \frac{\pi}{2}$ , alors un développement limité à l'ordre 1 donne :  $\omega = \omega_0 \frac{q}{\pi}$ . Donc :  $v_\phi = \frac{\omega}{q} = \omega_0 a$

$$v_g = \frac{d\omega}{dq} = \omega_0 a = v_\phi$$

Le milieu devient alors non dispersif et l'onde progressive se propage sans déformation.

• Si  $q = \frac{\pi}{2}$ , alors  $v_g = 0$  et  $v_\phi = \frac{2\omega_0}{\pi} = \frac{2\omega_0 a}{\pi}$ .

Pour une onde réelle, le maximum de l'enveloppe du paquet d'onde ne se déplace pas : l'onde est stationnaire.

13. Il faut commencer par exprimer  $u_{n+1}(t)$  et  $u_{n-1}(t)$  via un DL de la fonction  $u(x,t)$ . On injecte alors dans l'ED de la Q.6 et on obtient l'équation de d'Alembert demandée.

On obtient la relation de dispersion en injectant une OPH dans l'équation de d'Alembert :  $\underline{u}(x,t) = U_0 e^{i(\omega t - qx)}$ . On trouve alors le classique

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{ka^2}{m}$$

Ainsi,

$$v_g = v_\phi = c = a \sqrt{\frac{k}{m}} = a\omega_0$$

ce qui est bien identique au résultat de la Q.12.

## Ex. 6 Réflexion et transmission sur un plasma

Un plasma dilué avec des particules non relativistes occupe le demi-espace  $x > 0$ . Le reste du milieu est du vide ( $x < 0$ ). Une onde plane progressive monochromatique incidente, de pulsation  $\omega$ , polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_z$ , se propage dans le sens des  $x$  croissants avec le vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_x$ . Elle arrive en incidence normale sur le plasma. Une onde réfléchie et une onde transmise sont alors créées. On donne les formes des champs électriques :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z \\ \vec{E}_r &= E_{r0} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z = E_r \vec{e}_z \\ \vec{E}_t &= E_{t0} e^{j(\omega t - k_p x)} \vec{e}_z = E_t \vec{e}_z \end{aligned}$$

1. Commenter ces écritures des champs. On donnera en particulier le lien entre  $\omega$  et  $k$ .

On rappelle la relation de dispersion dans un plasma dilué avec une OPH transverse :

$$k_p^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec  $\omega_p$  la pulsation plasma, ne dépendant que des caractéristiques du plasma.

2. On définit l'indice optique  $\underline{n}$  du plasma par  $\underline{n} = \frac{ck_p}{\omega}$ . Expliciter le sens physique associé à la partie réelle et la partie imaginaire de l'indice optique.

- On admet que le champ électromagnétique est continu à l'interface. Exprimer  $\underline{E}_{r0}$  et  $\underline{E}_{t0}$  en fonction de  $E_0$  et  $\underline{n}$ .
- Établir les expressions réelles des trois champs électriques et des trois champs magnétiques dans le cas  $\omega > \omega_p$ . Les amplitudes seront exprimées en fonction de  $E_0$ ,  $\underline{n}$  et  $c$ .
- Définir et exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance  $R$  et  $T$  dans le cas  $\omega > \omega_p$ . Que vaut leur somme ?
- Dans le cas  $\omega < \omega_p$ , que vaut le module de  $\frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$  ? On notera  $\varphi_n$  l'argument de ce complexe.
- Dans le cas  $\omega < \omega_p$ , établir les expressions réelles des champs électriques et magnétiques incidents et réfléchis.
- Calculer  $R$  dans le cas  $\omega < \omega_p$ . En déduire  $T$ . Commenter.

### Correction de l'exercice 6

- Comme d'habitude :
  - $\vec{E}_i$  et  $\vec{E}_t$  se propagent dans le sens des  $x$  croissants, d'où le  $-kx$  dans les écritures des champs. C'est l'opposé pour  $\vec{E}_r$ .
  - Polarisation selon  $\vec{e}_z$ , mais propagation selon  $\vec{e}_x$ .
  - Même pulsation temporelle, car équations de Maxwell linéaires.
  - Dans le vide (donc pour  $\vec{E}_i$  et  $\vec{E}_r$ ),  $k$  et  $\omega$  sont reliés par la relation de dispersion de d'Alembert :  $k = \frac{\omega}{c}$ .
- En sup', l'indice optique a été défini comme le rapport de la vitesse de propagation dans le vide  $c$  sur la vitesse de propagation dans le milieu, pour la pulsation  $\omega$ , c'est-à-dire sur la vitesse de phase  $v_\varphi$ . Donc :

$$\underline{n} = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{ck_p}{\omega}$$

si  $k_p$  est réel. Ici, la définition de l'indice optique généralise cette définition de sup', en permettant à l'indice optique d'être imaginaire pur si  $k_p$  est imaginaire pur.

- La continuité des champs donne les deux CL en  $x = 0$ .

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(x=0,t) + \vec{E}_r(x=0,t) &= \vec{E}_t(x=0,t) \iff E_0 + \underline{E}_{r0} = \underline{E}_{t0} \\ \vec{B}_i(x=0,t) + \vec{B}_r(x=0,t) &= \vec{B}_t(x=0,t)\end{aligned}$$

Il faut, comme d'habitude, traduire la seconde CL sur  $\vec{E}$  : on utilise la relation de structure **en complexes**, car on a bien des OPPH. Cela donne :

$$\frac{k\vec{e}_x \wedge \vec{E}_i(x=0,t)}{\omega} + \frac{-k\vec{e}_x \wedge \vec{E}_r(x=0,t)}{\omega} = \frac{k_p\vec{e}_x \wedge \vec{E}_t(x=0,t)}{\omega} \iff \frac{E_0}{c} - \frac{\underline{E}_{r0}}{c} = \frac{k_p}{\omega} \underline{E}_{t0}$$

D'où :

$$E_0 - \underline{E}_{r0} = \underline{n} \underline{E}_{t0}$$

On en déduit, après calculs que :

$$\underline{E}_{r0} = E_0 \times \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}} \quad \text{et} \quad \underline{E}_{t0} = E_0 \times \frac{2}{1+\underline{n}}$$

- En utilisant les relations de structure, avec  $k_p = k_p \in \mathbb{R}$  et donc  $\underline{n} = n \in \mathbb{R}$  (car  $\omega > \omega_p$ ) :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_i &= -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_r &= \frac{1-n}{1+n} E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_r &= \frac{1-n}{1+n} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_t &= \frac{2}{1+n} E_0 \cos(\omega t - k_p x) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_t &= -\frac{2n}{1+n} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_p x) \vec{e}_y\end{aligned}$$

- On peut donner directement les définitions des coefficients de réflexion et de transmission en terme de rapport des normes des vecteurs de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  :

$$\begin{aligned}R &= \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0,t) \right\| \right\rangle} = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2 \\ T &= \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(x=0,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0,t) \right\| \right\rangle} = \frac{4n}{(1+n)^2}\end{aligned}$$

On trouve naturellement que  $R + T = 1$  (conservation de la puissance totale).

**Remarque :** Ces résultats sont exactement ceux qu'on obtient en optique à l'interface entre deux diélectriques d'indices optiques 1 et  $n$ .

6. Si  $\omega < \omega_p$ , alors  $\underline{k_p}$  est imaginaire pur, et donc  $\underline{n}$  aussi. Par conséquent  $1 - \underline{n}$  est le complexe conjugué de  $1 + \underline{n}$  :  $\left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right| = 1$ . On note alors :  $\frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} = e^{j\varphi_n}$ .
7. On reprend les résultats de la Q.3, en ajoutant le calcul du champ magnétique via la relation de structure dans le vide (car on cherche uniquement  $\vec{B}_i$  et  $\vec{B}_r$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_i &= -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_r &= E_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_n) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_r &= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \varphi_n) \vec{e}_y \end{aligned}$$

8. Enfin, on recalcule le rapport  $R$  :

$$R = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0, t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0, t) \right\| \right\rangle} = \frac{E_0^2/c \langle \cos^2(\omega t) \rangle}{E_0^2/c \langle \cos^2(\omega t + \varphi_n) \rangle} = 1$$

On en déduit  $T = 1 - R = 0$ . On vient de démontrer que dans le cas basse fréquence, un plasma se comporte comme un miroir parfait et réfléchit toute l'énergie incidente. Ceci est cohérent avec le fait qu'une onde évanescente existe pour  $x > 0$ , et qu'une onde évanescente ne transporte aucune énergie. On peut alors citer l'application de la 1ère communication transatlantique avec des ondes radio se réfléchissant sur l'ionosphère, par exemple.