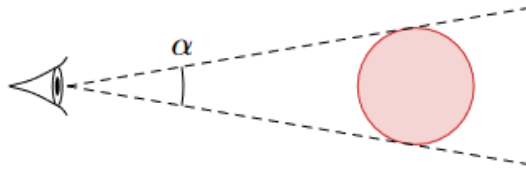


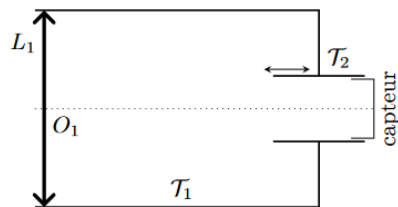
### Ex. 3 Sup' : Tripleur de focale de Barlow

Données numériques :

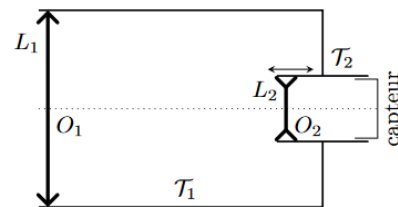
- Les orbites de la Terre et de Jupiter sont coplanaires et approximativement circulaires de centre le centre d'inertie du Soleil.
- Rayon des orbites de la Terre et de Jupiter :  $R_T = 1.5 \times 10^8$  km et  $R_J = 7.8 \times 10^8$  km.
- Diamètre de Jupiter :  $D_J = 1.4 \times 10^5$  km.



1. Calculer le diamètre angulaire maximal  $\alpha_0$  sous lequel on peut observer Jupiter depuis la Terre. Peut-on distinguer deux points à l'opposé de Jupiter à l'œil nu ?



(a) Dispositif simple



(b) Dispositif avec tripleur de focale

On souhaite photographier Jupiter à travers un télescope simple, voir figure (a), assimilé à une unique lentille mince convergente de focale  $f'_1 = 2250$  mm. L'image doit se former sur le capteur. Le tube  $\mathcal{T}_2$  peut coulisser à l'intérieur du tube  $\mathcal{T}_1$  pour régler la mise au point.

2. Déterminer la distance objectif - capteur pour obtenir une image nette. Calculer alors le diamètre maximal de Jupiter sur le capteur.

Cette image est observable sur un capteur CCD, mais est petite. Pour agrandir l'image, on intercale une lentille divergente  $L_2$  de distance focale  $f'_2$  entre la lentille  $L_1$  et le capteur, voir figure (b). La distance  $d$  entre la lentille  $L_2$  et le capteur est fixe, égale à 200 mm. On admet que le foyer image  $F'_1$  de la lentille  $L_1$  se situe entre la lentille  $L_2$  et le capteur.

3. Reproduire le dispositif et tracer la marche d'un rayon lumineux incident venant d'une des extrémités de Jupiter. On indiquera :
  - l'angle d'incidence  $\alpha_0/2$ ,
  - l'image intermédiaire  $A_1B_1$ ,
  - l'image finale réelle  $A_2B_2$ .
4. Déterminer l'expression de la distance focale  $f'_2$  et de la distance  $O_1O_2$  entre les deux lentilles pour que le dispositif produise sur le capteur une image de Jupiter trois fois plus grande que précédemment.
5. Ce dispositif est alors appelé "tripleur de focale". Expliquer.

On souhaite enfin observer Jupiter à l'œil à travers ce dispositif (b). On conserve la valeur de  $f'_2 = -100$  mm trouvée en question Q4.

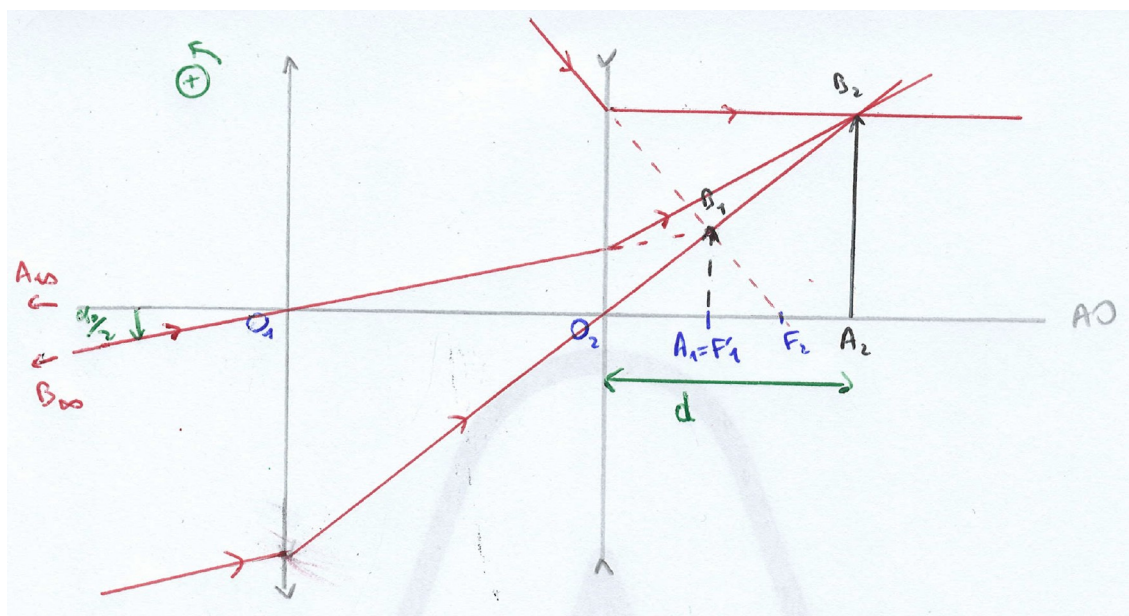
6. Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'œil emmétrope, où doit être située l'image finale  $A_2B_2$  en sortie de  $L_2$  ? Calculer alors la distance  $O_1O_2$  à imposer.
7. Calculer la valeur du diamètre angulaire  $\alpha'_0$  sous lequel l'œil perçoit Jupiter à l'issue de la lunette astronomique. Peut-on désormais distinguer deux points à l'opposé de Jupiter ?

### Correction de l'exercice 3

1. La distance minimale entre la Terre et Jupiter est atteinte lorsqu'elles sont alignées avec le Soleil dans l'ordre Soleil - Terre - Jupiter. Cette distance vaut  $L = R_J - R_T \gg D$ . L'angle  $\alpha_0$  vérifie alors  $\alpha_0 \ll 1$  et on a donc

:  $\alpha_0 = \frac{D}{R_J - R_T}$ . A.N. :  $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.76' < 1'$ . Ce diamètre angulaire est inférieur à la limite de résolution angulaire de l'œil : on ne peut pas distinguer deux points à l'opposé de Jupiter (Jupiter est perçu à l'œil nu comme un point).

- On a  $L \gg f'_1$  : tout se passe comme si les rayons lumineux étaient émis depuis l'infini. L'image se forme alors dans le plan focal image de  $L_1$ , on impose donc une distance  $L_1$  - capteur de  $f'_1 = 2250 \text{ mm}$ . Le diamètre de Jupiter sur le capteur est alors  $D' = \alpha_0 f'_1 = 0.50 \text{ mm}$ .
- Au brouillon, on se rend compte que le seul moyen que l'image finale soit réelle est que  $F'_1 \in [O_2 F_2]$ . On réalise alors le schéma des rayons lumineux :



- On souhaite obtenir une image 3 fois plus grande qu'avec le dispositif (a), donc :  $\overline{A_2 B_2} = 3 \overline{A_1 B_1}$ . On peut utiliser la relation de grandissement de Descartes pour la lentille  $L_2$  (que l'on retrouve de manière évidente avec un théorème de Thalès sur le schéma précédent) :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} = 3 = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{d}{f'_1 - \overline{O_1 O_2}}$$

Donc,  $\overline{O_1 O_2} = f'_1 - \frac{d}{3}$ , ce qui semble cohérent avec le schéma.

On détermine  $f'_2$  avec la relation de conjugaison de Descartes par exemple :

$$\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow f'_2 = -\frac{d}{2}$$

- Avec le télescope simple (a), pour obtenir une image trois fois plus grande, il faut multiplier par 3 la distance focale de  $L_1$ . Grâce à la lentille divergente  $L_2$ , on obtient cette image 3 fois plus grande, d'où le nom de "tripleur de focale", tout en évitant de devoir multiplier par 3 l'encombrement du système.
- Pour un œil emmétrope, une observation sans fatigue nécessite une image finale  $A_2 B_2$  située à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire  $A_1 B_1$  soit située dans le plan focal objet de  $L_2$ , soit que  $F'_1 = F_2 = A_1$ . On lit donc géométriquement :

$$\overline{O_1 O_2} = f'_1 + f'_2$$

A.N. :  $\overline{O_1 O_2} = 2150 \text{ mm}$ .

- Avec un schéma des rayons lumineux et une formule de trigonométrie :

$$\frac{\alpha'_0}{2} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}} = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} \quad \text{et} \quad \overline{A_1 B_1} = \frac{\alpha_0}{2} f'_1$$

Ainsi  $\alpha'_0 = -\alpha_0 \frac{f'_1}{f'_2}$ . A.N. :  $\alpha'_0 = 17'$ . On peut distinguer nettement à l'œil deux points situés à l'opposé de Jupiter avec cette lunette astronomique.

## Ex. 4 Sup' : Profondeur de champ d'un appareil photographique

On étudie un appareil photographique, modélisé comme l'association d'une lentille mince convergente de distance focale  $f' = 50 \text{ mm}$  (centre optique nommé  $O$ ) et d'un capteur.

1. On souhaite photographier un bâtiment de  $h = 100 \text{ m}$  de haut situé à une distance de  $D = 140 \text{ m}$  du photographe. Déterminer la taille minimale du capteur pour pouvoir photographier le bâtiment dans son intégralité.

Initialement, l'appareil photo est réglé sur l'infini, c'est-à-dire que la distance entre le plan de l'objectif et celui du capteur est égale à la distance focale  $f'$ . Pour mettre au point (i.e. obtenir une image nette) d'un objet à une distance finie, on écarte l'objectif de sa position initiale d'une distance  $t$ , appelée distance de tirage. On appelle alors  $D$  la distance entre l'objet et le point  $O$ .

2. Déterminer l'expression de  $t$  en fonction de  $D$  et  $f'$ . Simplifier cette expression dans le cas où  $D \gg f'$ .

Dans toute la suite, on suppose que la mise au point est réalisée pour une distance  $D = 18 \text{ m}$ .

On constate en pratique que l'image formée reste nette de part et d'autre de la mise au point théorique (c'est la profondeur de champ), car on peut qualifier d'image nette d'un point, toute tache de dimension inférieure au diamètre  $\delta$  des cellules photosensibles du capteur.

3. L'objectif de l'appareil photographique a un diamètre d'ouverture  $d = \frac{f'}{N}$  avec  $N$  le nombre d'ouverture. Si  $N = 5.6$ , on constate que l'image est nette si l'objet est situé entre l'infini et une distance de  $9 \text{ m}$  de l'objectif. Déterminer numériquement  $\delta$ .
4. Déterminer la profondeur de champ pour des nombres d'ouverture  $N = 2.8$  et  $N = 16$ . Commenter. Quel autre facteur influence le choix de  $N$  par un photographe ?

### Correction de l'exercice 4

1. On a  $D \gg f'$ , on peut donc considérer que tout se passe comme si le bâtiment était presque situé à l'infini. Donc, l'image se forme presque dans le plan focal image de la lentille :  $\overline{OA'} \simeq f'$ . Un schéma des rayons lumineux ou l'application de la relation de grandissement de Descartes donne alors :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{f'}{-D} = -\frac{f'h}{D}$$

A.N. :  $\overline{A'B'} = 36 \text{ mm}$  (ordre de grandeur cohérent avec les dispositifs pratiques).

2. Je vous conseille de faire un schéma et d'y indiquer les différentes distances introduites par l'énoncé :  $\overline{OA'} = f' + t$  et  $\overline{AO} = D$ .

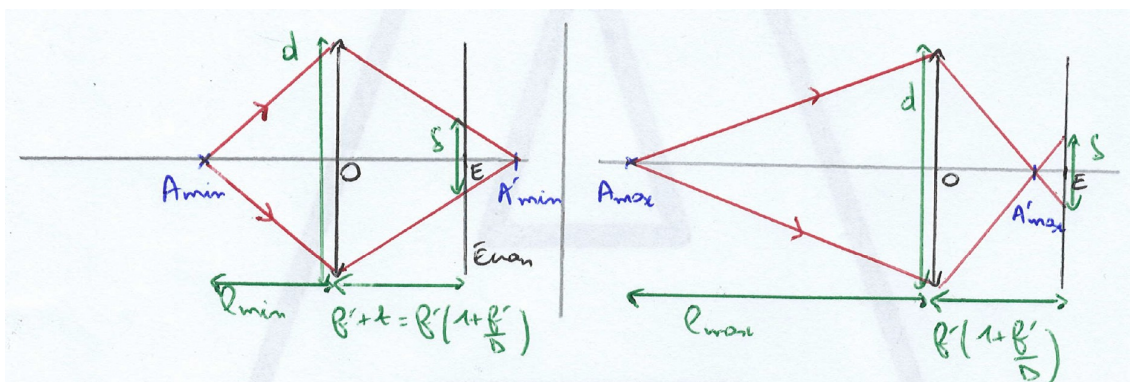
On utilise la relation de conjugaison de Descartes (par exemple) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow t = f' \left( \frac{1}{1 - \frac{f'}{D}} - 1 \right)$$

Si  $D \gg f'$ , un développement limité à l'ordre 1 en  $f'/D$  donne :  $t = \frac{f'^2}{D}$ .

**Remarque :** La Q.1 revenait à faire un DL à l'ordre 0 en  $f'/D$ , car on ne gardait que le terme dominant. Ici, il faut pousser à l'ordre 1 en  $f'/D$ .

3. Vu la profondeur de champ donnée, c'est le cas limite de l'objet au plus proche de l'objectif qui fixe la taille de  $\delta$ . Dans cette question, on considère donc cette seule situation d'un objet situé en  $A_{\min}$ .



D'après le théorème de Thalès,

$$\delta = d \times \frac{\overline{EA'_{min}}}{\overline{OA'_{min}}} = d \left( 1 - \frac{f'(1 + \frac{f'}{D})}{\overline{OA'_{min}}} \right)$$

On détermine  $\overline{OA'_{min}}$  avec la relation de conjugaison de Descartes par exemple :

$$\frac{1}{\overline{OA'_{min}}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'_{min}}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell_{min}}$$

Ainsi,

$$\delta = d \left( 1 - \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) + \frac{f'}{\ell_{min}} \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) \right) = d \left( -\frac{f'}{D} + \frac{f'}{\ell_{min}} \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) \right)$$

Or, on a  $\ell_{min} \gg f'$ . Donc, le terme  $\frac{f'}{\ell_{min}} \times \frac{f'}{D}$  est un terme infiniment petit d'ordre 2 : on le néglige devant les termes infiniment petits d'ordre 1 en  $f'/D$  et  $f'/\ell_{min}$ . Ainsi, en ne gardant que les termes dominants :

$$\delta = df' \left( \frac{1}{\ell_{min}} - \frac{1}{D} \right)$$

A.N. :  $\delta = 25 \mu\text{m}$ .

**Remarque :** Dans le cas précis proposé par l'énoncé, il se trouve qu'on obtient exactement le même résultat numérique en étudiant  $A_{max}$  situé à l'infini. Mais c'est un "coup de chance" lié aux valeurs numériques choisies...

4. Le raisonnement fait précédemment reste vrai et on a donc :  $\ell_{min} = \frac{f'}{\frac{f'}{D} + \frac{f'}{\delta}}$ .

Concernant  $\ell_{max}$ , on peut déjà remarquer que si  $N > 5.6$ , alors  $d$  diminue par rapport à la Q.3, permettant de faire reculer encore davantage  $A_{max}$ . Or, comme pour  $N = 5.6$ ,  $A_{max}$  est à l'infini, on peut tout de suite conclure que pour  $N = 16$ ,  $\ell_{max} = +\infty$ . Ainsi, le seul cas restant à traiter est la détermination de  $\ell_{max}$  pour  $N = 2.8$ .

En refaisant un théorème de Thalès + une relation de conjugaison de Descartes, on trouve tous calculs faits :

$$\ell_{max} = \frac{f'}{\frac{f'}{D} - \frac{f'}{\delta}}$$

A.N. : Pour  $N = 2.8$  :  $\ell_{max} = 36 \text{ m}$  et  $\ell_{min} = 12 \text{ m}$ .

A.N. : Pour  $N = 16$  :  $\ell_{max} = +\infty$  et  $\ell_{min} = 4.6 \text{ m}$ .

Ainsi, si  $N$  augmente, la profondeur de champ augmente. Néanmoins, si  $N$  augmente, l'intensité lumineuse reçue diminue, et donc on doit augmenter la durée d'exposition pour obtenir une photo lumineuse. Ceci peut être gênant dans le cas d'un sujet mouvant car la photo pourrait devenir floue. Il faut donc faire un compromis entre profondeur de champ et durée d'exposition.

## Ex. 5 Largeur naturelle d'une lampe spectrale

On considère une lampe spectrale basse pression émettant une raie à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$ .

1. Quelle est la fréquence centrale  $\nu_0$  de cette raie ? Quelle est sa couleur ?
2. La longueur de cohérence temporelle d'une telle raie liée à la seule largeur naturelle (i.e. atome sans agitation thermique, isolé du reste de l'univers) serait de  $L_c = 3 \text{ m}$ . Définir la notion de "longueur de cohérence" et en expliquer l'origine. En déduire la valeur numérique de la durée  $\tau_c$  des trains d'onde émis.
3. Calculer le nombre moyen d'oscillations par train d'onde.
4. Donner un ordre de grandeur de la largeur spectrale naturelle en fréquence  $\Delta\nu$  et en longueur d'onde  $\Delta\lambda$ .
5. En TP, les lampes spectrales utilisées ont une longueur de cohérence temporelle bien plus faible. En donner un ordre de grandeur pour les lampes spectrales de TP. Proposer une origine physique de la diminution de cette longueur de cohérence dans les lampes réelles.

---

### Correction de l'exercice 5

1. Dans le vide, la relation de dispersion donne :  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Au vu de la longueur d'onde dans le vide, la raie est verte.

2. La longueur de cohérence temporelle est la distance parcourue par un train d'onde durant son temps de cohérence  $\tau_c$ , c'est donc aussi la longueur spatiale du train d'onde dans le vide. L'émission de train d'onde de durée finie s'explique par la **largeur spectrale non nulle** de la raie. Dans le cas de la largeur naturelle, cet élargissement spectral est lié uniquement à des effets quantiques : la relation d'incertitude de Heisenberg interdit en effet la connaissance de l'énergie du niveau excité de manière infiniment précise.

Ainsi :  $\tau_c = \frac{L_c}{c} = 1 \times 10^{-8} \text{ s}$

3. Deux façons de procéder :

- *Vision temporelle* : on calcule la période de l'onde  $T = \frac{1}{\nu_0}$  et on en déduit le nombre d'oscillations par train d'onde  $\frac{\tau_c}{T}$ .
- *Vision spatiale* : on connaît la période spatiale  $\lambda_0$  de l'onde émise et la longueur totale du train d'onde  $L_c$ . Le nombre d'oscillations est  $\frac{L_c}{\lambda_0}$ .

On trouve  $6 \times 10^6$  oscillations par train d'onde. (Un grand nombre d'oscillations arrive donc au détecteur par rapport à son temps de réponse.)

4. D'après la théorie de Fourier, en ordre de grandeur :

$$\Delta\nu \times \tau_c \sim 1 \iff \Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c} = 10^8 \text{ Hz} \ll \nu_0$$

Pour déterminer la largeur spectrale en longueur d'onde, on différentie la relation de dispersion :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu_0^2} d\nu \Rightarrow \Delta\lambda \sim \frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} \sim 10^{-13} \text{ m} = 0.1 \text{ pm}$$

5. En TP, les lampes spectrales basse pression ont une longueur de cohérence temporelle  $L_c \sim 0.1$  à  $1 \text{ mm}$ , soit largement inférieure à la largeur naturelle. Ceci est relié à un élargissement spectral important. On peut citer plusieurs origines de cet élargissement spectral : effet Doppler lié à l'agitation thermique, collisions entre les atomes et les parois.