

# Approximation scalaire des ondes lumineuses

## Sommaire

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Modèle des émetteurs et des récepteurs d'ondes lumineuses</b>                  | <b>2</b>  |
| I.1        | Émetteurs . . . . .   | 2         |
| I.2        | Récepteurs . . . . .  | 5         |
| <b>II</b>  | <b>La vibration lumineuse : le champ scalaire de l'optique</b>                    | <b>7</b>  |
| II.1       | Passer du champ électromagnétique dans le vide au champ scalaire de l'optique . . | 7         |
| II.2       | Principe de superposition . . . . .   | 8         |
| <b>III</b> | <b>Formes d'ondes considérées</b>   | <b>8</b>  |
| III.1      | Lumière monochromatique (= harmonique) . . . . .                                  | 8         |
| III.2      | Ondes planes et ondes sphériques . . . . .  | 8         |
| <b>IV</b>  | <b>Déphasage accumulé lors de la propagation de l'onde</b>                        | <b>11</b> |
| IV.1       | Expression du déphasage . . . . .   | 11        |
| IV.2       | Nouvelle définition des surfaces d'onde . . . . .                                 | 14        |
| IV.3       | Condition de stigmatisme rigoureux . . . . .                                      | 14        |
| IV.4       | Exemples concrets de calculs de chemins optiques . . . . .                        | 15        |
| <b>V</b>   | <b>Conditions de validité de l'optique géométrique</b>                            | <b>16</b> |
|            | <b>Exercices</b>  | <b>17</b> |

## Questions de cours

- Sources lumineuses : notion de temps de cohérence, lien avec la largeur spectrale et  $\Delta\omega$  de la longueur de cohérence temporelle pour les trois types de sources usuelles (lampe blanche, lampe spectrale, laser).
- Récepteurs lumineux :  $\Delta\omega$  des temps de réponse des détecteurs, comparaison aux temps caractéristiques des vibrations lumineuses. Conséquence sur le calcul de la puissance reçue.
- Onde plane, onde sphérique. Action d'une lentille mince convergente sur les surfaces d'onde.
- Retard de phase pour une onde monochromatique : expression en fonction du chemin optique et en fonction de la durée de propagation.
- Stigmatisme rigoureux : définition, démonstration de la conséquence en terme de chemins optiques.
- Sur un exemple au choix du colleur, avec ou sans lentille convergente, calculer une différence de chemins optiques et la simplifier en utilisant les conditions de Gauss.

*Prise de notes* : On a déjà décrit les ondes électromagnétiques, et donc la propagation de la lumière dans un milieu. Donc quelle différence avec ce qu'on va faire en optique ondulatoire ?

Notre description des OEM est très puissante, mais aussi très lourde : quand on veut calculer l'intensité lumineuse, on doit calculer  $E$ , puis  $B$  en réels, puis Poynting, puis moyenner. C'est faisable dans des cas simples (une onde), mais devient hyper lourd si on commence à étudier le cas de plusieurs ondes, se propageant dans des directions différentes...

L'optique ondulatoire consiste à SIMPLIFIER le modèle des OEM dans le cas de 4 hypothèses :



- on se limite aux ondes dans le domaine du visible ou proche du visible (-> on parlera désormais de lumière)
- sources optiques générant des ondes non polarisées
- aucun milieu avec atténuation (pas de plasma à BF et pas de conducteur ohmique)  
-> que des milieux transparents
- étude de l'onde dans les conditions de Gauss (ce qui reviendra bien souvent à considérer une étude à grande distance de la source)

Donc, on perd en généralité, mais la mise en équations sera bien plus simple dans des situations plus complexes (changement de milieu de propagation, lentilles, superposition d'ondes).

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

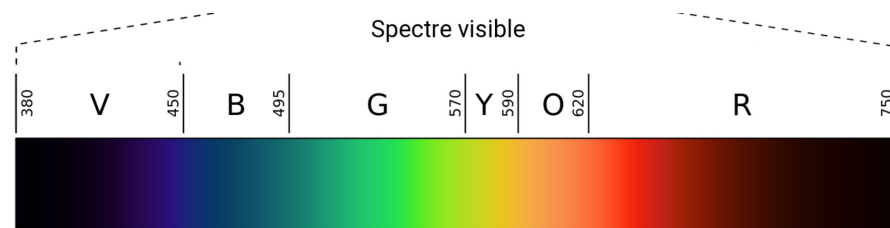
1. En partant des ondes électromagnétiques, construire le modèle scalaire de l'optique, et en particulier calculer simplement l'intensité lumineuse dans le cadre de ce modèle.
2. Déterminer le déphasage accumulé par une onde au cours de sa propagation en utilisant les outils de...  
l'optique géométrique !

Sauf indication contraire explicite, toutes les longueurs d'onde évoquées dans ce chapitre sont les longueurs d'onde qu'aurait la lumière si elle se propageait dans le vide.

## I Modèle des émetteurs et des récepteurs d'ondes lumineuses

### I.1 Émetteurs

#### a Spectre du visible



#### b Différents types de sources lumineuses

Plusieurs types de sources de lumière sont disponibles dans la vie courante ou dans les salles de travaux pratiques. Nous allons brièvement en décrire trois types. Toutes ces sources sont caractérisées par leur spectre d'émission.

On définit la densité spectrale d'intensité lumineuse,  $I_\lambda$ , telle que la contribution à l'intensité lumineuse  $I$  des composantes dont la longueur d'onde appartient à l'intervalle  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  est :  $dI = I_\lambda(\lambda)d\lambda$ .



Tracer un profil de densité spectrale d'intensité lumineuse pour une raie centrée sur  $\lambda_0$  et de largeur  $\Delta\lambda$ .

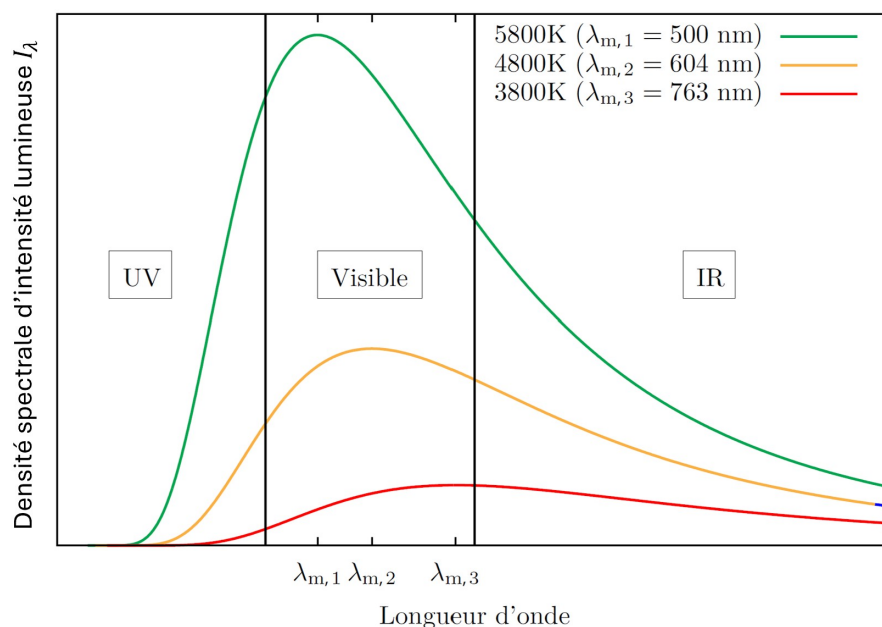
L'intensité lumineuse totale est alors  $I = \int_0^{+\infty} I_\lambda(\lambda)d\lambda$ .

## i) Les corps noirs (ampoule à filament, Soleil...)

### Définition :

Un corps noir à la température  $T$  est un système matériel thermostaté (température  $T$  uniforme et stationnaire) en équilibre thermodynamique avec le rayonnement électromagnétique.

La loi d'émission d'un corps noir est donnée par la loi de Planck (1900) :



Par exemple, le filament d'une ampoule à filament est chauffé par effet Joule à 2500 K environ. Le maximum d'émission est donné par la loi de Wien :

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{T} \quad \text{avec} \quad \alpha = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m K} \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = 1.2 \mu\text{m}$$

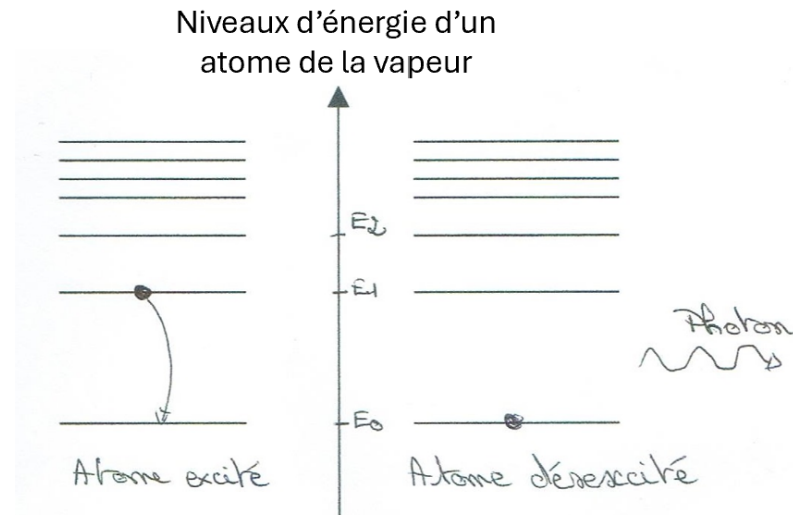
ce qui se situe dans l'infrarouge proche. Néanmoins, comme le spectre d'émission est très large, l'ampoule émet aussi dans le visible.

### Caractéristiques de l'émetteur :

- Spectre continu
- Largeur spectrale : tout le visible ( $\Delta\lambda \sim 350 \text{ nm}$ )
- Onde non polarisée

## ii) Les lampes à décharge = lampes spectrales

Ces lampes contiennent, en régime permanent de fonctionnement, une vapeur atomique, par exemple de la vapeur de mercure ou de sodium. Des électrodes permettent d'appliquer une décharge électrique dans la vapeur, c'est-à-dire émettre un flux d'électrons traversant la vapeur. Les électrons entrent en collision avec les atomes de la vapeur, qui se retrouvent ainsi dans un état excité. La désexcitation de ces atomes entraîne l'émission de photons. On parle d'émission spontanée.



- ★ On peut relier la perte d'énergie de l'atome de vapeur à la longueur d'onde médiane  $\lambda_0$  du photon émis à l'aide de la relation de Planck-Einstein :  $E_2 - E_1 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ .  
Néanmoins, le spectre d'émission d'une lampe spectrale ne présente pas une raie infiniment fine : SPECTRE

**Origines de l'élargissement spectral de la raie :** Il existe de nombreux processus entraînant un élargissement spectral. Citons en quelques-uns :

- Les atomes de la vapeur ne sont pas immobiles dans le référentiel du laboratoire. La lumière reçue par l'opérateur subit donc de l'effet Doppler : plus l'agitation des atomes est élevée, plus l'élargissement spectral est important.
- Fondamentalement, la mécanique quantique interdit l'existence de raies d'émission spontanée infiniment fines. En effet, d'après la relation d'incertitude de Heisenberg, comme la durée de vie  $\tau$  de l'atome dans son niveau excité est finie, il est impossible de quantifier exactement l'énergie de l'atome dans le niveau excité :  $\Delta E \times \tau > h \iff \Delta \nu \times \tau > 1$ .

**Caractéristiques de l'émetteur :**

- Spectre de raies
- Largeur spectrale :  $\Delta \lambda \sim 0.1$  à  $1 \text{ nm}$
- Onde non polarisée

### iii) Les lasers

Nous étudierons la physique du laser dans un chapitre dédié. Sachez pour l'instant que le processus d'émission des photons est différent (émission stimulée) et que chaque photon est émis rigoureusement à la même longueur d'onde que le précédent.

**Origine de l'élargissement spectral de la raie :** Néanmoins, à nouveau, la raie d'émission n'est pas infiniment fine, car les photons doivent être amplifiés dans une cavité contenant des miroirs, par interférences constructives. Les vibrations mécaniques extérieures induisent un léger changement de la taille de la cavité, suffisant à élargir la raie.

**Caractéristiques de l'émetteur :**

- Une raie
- Largeur spectrale :  $\Delta \lambda \sim 10^{-4} \text{ nm}$
- Onde non polarisée

La largeur spectrale est donc très petite devant la longueur d'onde médiane d'émission : on considérera souvent l'émission laser comme monochromatique.

### c Lien entre la largeur spectrale en longueur d'onde et en fréquence

La relation de dispersion de la lumière dans le vide implique un lien entre longueur d'onde et fréquence :  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ . On peut ainsi traduire les largeurs spectrales en longueurs d'onde  $\Delta\lambda$  en largeurs spectrales en fréquences  $\Delta\nu$ .

Prenons la différentielle de la relation de dispersion :

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$$

★

En supposant que  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ , on en déduit :

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

### d Modèle des trains d'onde

Du fait de la largeur spectrale d'émission des sources, les sources réelles émettent donc toutes des paquets d'onde. La théorie de Fourier impose alors un lien entre la largeur spectrale en fréquences  $\Delta\nu$  de l'onde émise et la durée  $\tau_c$  pendant laquelle l'onde est émise :

$$\Delta\nu \times \tau_c \sim 1$$

Spectre et représentation temporelle du champ électrique (mettre en évidence la période  $T_0$  et  $\tau_c$ ).

★

Ainsi, une source lumineuse émet une succession de portions de sinusoïdes, chacune de ces portions étant émise pendant une durée finie valant en moyenne  $\tau_c$ . On appelle les portions de sinusoïdes des trains d'onde et  $\tau_c$  le temps de cohérence de la source. Deux trains d'onde successifs sont émis avec une variation brutale et aléatoire de la phase à l'origine.

Plus une source a une grande largeur spectrale, plus son temps de cohérence est faible.

#### Temps de cohérence et longueur de cohérence temporelle d'une source

Le temps de cohérence  $\tau_c$  d'une source est reliée à la largeur spectrale de la source :

$$\tau_c \sim \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda}$$

Dans le modèle des trains d'onde,  $\tau_c$  est la durée d'un train d'onde.

On définit également la longueur de cohérence temporelle  $\ell_c$  comme la distance parcourue par un train d'onde dans le vide pendant  $\tau_c$  :

$$\ell_c = c\tau_c$$

#### Ordres de grandeur :

| Source                     | $\lambda_0$ (nm) | $\Delta\lambda$ (nm) | $\Delta\nu$ (Hz)   | $\tau_c$ (s)        | $\ell_c$ (m)    |
|----------------------------|------------------|----------------------|--------------------|---------------------|-----------------|
| Lampe blanche              | 575              | 350                  | $3 \times 10^{14}$ | $3 \times 10^{-15}$ | 1 $\mu\text{m}$ |
| Lampe spectrale au mercure | 546              | 0.1                  | $10^{11}$          | $10^{-11}$          | 1 mm            |
| Laser utilisé en TP        | 632.8            | $10^{-4}$            | $10^8$             | $10^{-8}$           | 1 m             |

## I.2 Récepteurs

### a Différents types de détecteurs lumineux

Nous allons détailler trois types de détecteurs lumineux fréquemment utilisés en TP.

#### i) L'œil

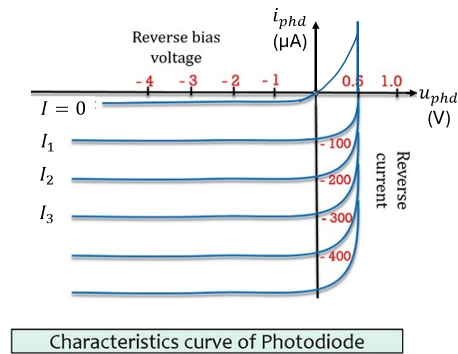
L'œil est constitué de deux types de cellules sensibles à la lumière visible : les cônes (sensibles à la couleur) et les bâtonnets (très sensibles aux faibles intensités lumineuses). Détaillons (un peu)

le fonctionnement d'un bâtonnet. Il contient un pigment, la rhodopsine, qui change de forme sous l'effet de l'énergie apportée par la lumière. Ce changement de forme induit l'apparition d'un message nerveux, transmis au cerveau. Le message nerveux fourni par l'oeil au cerveau ne se renouvelle que toutes les 0,1 secondes environ.

#### Caractéristiques du récepteur :

- Sensible à la puissance lumineuse
- Temps de réponse :  $\tau_{\text{détect}} \sim 0.1 \text{ s}$

#### ii) La photodiode



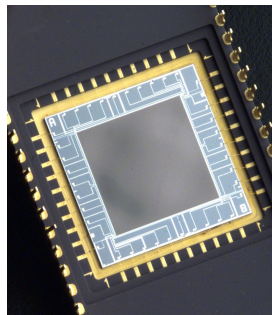
Lorsqu'une photodiode est polarisée en inverse, l'arrivée de la lumière sur le composant génère, grâce à l'énergie lumineuse, une excitation électronique. Cette excitation électronique se traduit par un courant inverse dans la photodiode. Le courant est proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. L'utilisation d'une résistance permet alors par exemple la détection d'une tension proportionnelle au courant inverse, et donc proportionnelle à l'intensité lumineuse.

La photodiode est sensible au spectre visible et à l'infrarouge proche.

#### Caractéristiques du récepteur :

- Sensible à la puissance lumineuse
- Temps de réponse :  $\tau_{\text{détect}} \sim 10^{-5} \text{ s}$

#### iii) Le capteur CCD (charge coupled device)



Le capteur CCD est composé d'une suite de petites photodiodes placées les unes contre les autres, et se présente souvent sous la forme d'une barrette ou d'une zone rectangulaire. Les électrons excités par l'arrivée d'énergie sur une photodiode sont ensuite détectés photodiode après photodiode pour reconstruire une image. On trouve des capteurs CCD dans les caméras ou les appareils photos numériques.

#### Caractéristiques du récepteur :

- Sensible à la puissance lumineuse
- Temps de réponse :  $\tau_{\text{détect}} \sim 10^{-2} \text{ s}$

On remarque que quelque soit le type de récepteur, celui-ci est sensible à une puissance lumineuse reçue.

### b Comparaison des ordres de grandeurs temporels associés aux émetteurs et aux récepteurs

Les longueurs d'onde dans le visible varient entre 400 nm (violet) et 750 nm (rouge), ce qui correspond à une fréquence de l'ordre de  $10^{14}$  à  $10^{15} \text{ Hz}$ .

On distingue donc trois échelles de temps différentes :

- la période de l'onde  $T \sim 10^{-15} \text{ s}$
- le temps de cohérence, i.e. la durée d'un train d'onde  $10^{-8} \text{ s} < \tau_c < 10^{-15} \text{ s}$
- ★ le temps de réponse d'un détecteur  $\tau_{\text{détect}} > 10^{-5} \text{ s}$

Ainsi, on a toujours  $\tau_{\text{détect}} \gg T, \tau_c$  : **les détecteurs optiques ne sont sensibles qu'à une puissance moyenne reçue durant  $\tau_{\text{détect}}$ .**

Un détecteur optique n'est donc sensible qu'à l'intensité lumineuse de l'onde électromagnétique  $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ . Pour cette raison, dans tout le thème d'optique, l'objectif sera de calculer l'intensité lumineuse.

## II La vibration lumineuse : le champ scalaire de l'optique

### II.1 Passer du champ électromagnétique dans le vide au champ scalaire de l'optique

Nous avons vu, au chapitre O2, que, pour une OPPH polarisée rectilignement et se propageant dans le vide selon  $+\vec{e}_z$ , on peut exprimer le vecteur de Poynting simplement :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

On en déduit que l'intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne temporelle de la norme du champ électrique au carré :

$$I \propto \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$$

On admet que ce résultat se généralise à tous les types d'ondes (seul le facteur de proportionnalité change).

On peut simplifier encore davantage le calcul de l'intensité lumineuse sous certaines hypothèses.

Hypothèse : les systèmes optiques seront utilisés dans les conditions de Gauss, i.e. les rayons lumineux seront peu inclinés et proches de l'axe optique.

Schéma avec une propagation selon un vecteur  $\vec{k}$  légèrement incliné par rapport à l'axe optique, mis selon  $z$ .

Dans le vide, l'onde est transverse : la composante du champ électrique selon  $z$  est donc négligeable devant celles selon  $x$  et  $y$ . On en déduit l'intensité lumineuse :

★

$$I \propto \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle$$

Hypothèse : les sources optiques ne sont pas polarisées.

Dans ce cas, le champ électrique a une direction variant aléatoirement dans le plan  $(Mxy)$  : les directions  $x$  et  $y$  sont équivalentes. Donc  $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle$  et

$$I \propto \langle E_x^2 \rangle$$

#### Vibration lumineuse

En optique ondulatoire, contrairement aux ondes électromagnétiques, on raisonnera sur un champ **scalaire**  $s(M,t)$  correspondant à l'une des composantes transverses du champ électrique. On appelle le champ  $s(M,t)$  la **vibration lumineuse**.

#### Calcul de l'intensité lumineuse

L'intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne temporelle de la vibration lumineuse au carré :

$$I \propto \langle s(M,t)^2 \rangle$$

Comme ce qui nous intéressera sera la variation spatiale de l'intensité lumineuse, et non sa valeur numérique, on se contentera donc de calculer  $\langle s(M,t)^2 \rangle$ .

Il est courant, de ce fait, d'employer un abus de langage en optique ondulatoire et d'appeler intensité lumineuse la valeur  $\langle s(M,t)^2 \rangle$ . (Attention aux unités...)

| Électromagnétisme   | Optique ondulatoire   |
|---|---|
| Champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$                 | Vibration lumineuse $s$   |
| Calcul de l'intensité lumineuse $I = \langle \ \vec{\Pi}\  \rangle$ | Calcul de l'intensité lumineuse $I \propto \langle s^2 \rangle$ |



On ne peut pas interpréter d'expériences de polarisation avec la vibration lumineuse. En passant à un champ scalaire, on a fait disparaître la notion même de polarisation de l'onde.

## II.2 Principe de superposition

Les équations de Maxwell étant linéaires, le principe de superposition s'applique toujours. Si plusieurs sources ponctuelles émettent une vibration lumineuse  $s_i(M, t)$ , la vibration lumineuse totale sera  $\sum_i s_i(M, t)$ .

## III Formes d'ondes considérées

### III.1 Lumière monochromatique (= harmonique)

Dans toute la suite, on considèrera une lumière monochromatique.

**Remarque :** En pratique, du fait de la largeur spectrale des sources, il faut sommer plusieurs vibrations monochromatiques pour décrire complètement la source.

**Définition :** Une vibration lumineuse sera monochromatique si elle peut s'écrire :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'onde,  $A(M)$  l'amplitude de l'onde en  $M$  et  $\varphi(M)$  la phase en  $M$ .

L'intérêt de considérer une lumière monochromatique est de pouvoir utiliser la notation complexe :

$$\underline{s}(M, t) = A(M) e^{j(\omega t - \varphi(M))} \quad \text{avec} \quad s(M, t) = \text{Re}(\underline{s}(M, t))$$

On définit alors couramment l'amplitude complexe de l'onde  $\underline{a}(M, t) = A(M) e^{-j\varphi(M)}$ . On retrouve les propriétés de calcul usuelles :  $A(M) = |\underline{a}(M, t)| = |\underline{s}(M, t)|$  et  $-\varphi(M) = \arg(\underline{a}(M, t))$ .

Pour calculer l'intensité lumineuse, on doit rester en réels :

$$I \propto \langle s(M, t)^2 \rangle = A(M)^2 \times \frac{1}{2}$$



On remarque une propriété de calcul pratique :  $I \propto |\underline{s}|^2$ . Même si physiquement, il n'y a aucun sens à calculer un produit avec des grandeurs complexes, on utilisera ce raccourci de calcul pratique dans le cas de l'intensité lumineuse en optique.

### III.2 Ondes planes et ondes sphériques

#### a Fonctions d'onde

On qualifie une onde de plane ou sphérique par rapport à la forme de ses surfaces d'onde.

**Définition (rappel) :** Surface d'onde

Ensemble des points de l'espace présentant le même état vibratoire, c'est-à-dire tels que la fonction d'onde possède la même valeur à un instant  $t$  fixé

Une onde est plane si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles entre eux. Une onde est sphérique si ses surfaces d'onde sont des sphères de même centre.

#### i) Onde plane

On a déjà vu la forme de la fonction d'onde d'une onde plane progressive harmonique :

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$



avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  le vecteur d'onde de l'onde plane pour une onde se propageant dans la direction  $\vec{u}$ .

★ Représentation plans d'onde = même valeur de  $s(M,t)$  à  $t$  fixé avec  $\vec{u}$

Dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope (DLHI) transparent, la relation de dispersion est

$$k = n \frac{\omega}{c} = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

avec  $n$  l'indice optique (réel) du milieu.

En notation complexe, on a simplement :

$$\underline{s}(M,t) = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)}$$

## ii) Onde sphérique

Représentation des surfaces d'onde à partir d'un point source  $S$  (appelé foyer de l'onde)

On se place en coordonnées sphériques  $(S, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

Une onde sphérique divergente se propage selon  $+\vec{e}_r$ . La fonction d'onde s'écrit alors :

$$s(M,t) = \frac{B}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

★ (Dire oralement que le terme  $B/r$  est lié à la conservation de la puissance de l'onde au cours de sa propagation. Mais je ne vais pas jusqu'à calculer cette puissance, car reviendrait à calculer un vecteur de Poynting, et ce n'est pas l'idée en optique : on le fera lors des ondes acoustiques seulement.)

Pour une onde sphérique convergente, la fonction d'onde s'écrit :

$$s(M,t) = \frac{B}{r} \cos(\omega t + kr - \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

Or, l'une des hypothèses de l'approximation scalaire de l'optique est de se placer dans les conditions de Gauss. On peut se placer dans ces conditions en observant la lumière à grande distance de la source  $S$ . Dans ce cas, le terme  $\frac{B}{r}$  varie beaucoup plus lentement que le terme en cosinus :

on supposera donc que, dans les conditions d'observation de l'optique,  $\frac{B}{r} \simeq \text{cste} = A$ . Ainsi, les fonctions d'onde simplifiées seront :

$$s(M,t) = A \cos(\omega t \mp kr - \varphi_0)$$

En notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = A e^{j(\omega t \mp kr - \varphi_0)}$$

## b Théorème de Malus

L'objectif du théorème de Malus est de relier l'aspect ondulatoire de la lumière aux rayons lumineux de l'optique géométrique. On supposera donc être, dans la suite, dans les conditions de validité de l'optique géométrique.

**Définition :** Rayons lumineux

Lignes de champ du vecteur de Poynting moyen. Dans un DLHI transparent, cela correspond aux lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{k}$  de l'onde.

### Théorème de Malus (admis)

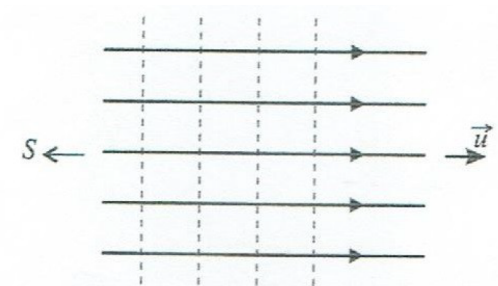
★ Dans le cadre de validité de l'optique géométrique, les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde.

★ Ainsi, on pourra utiliser les outils de l'optique géométrique pour tracer les rayons lumineux. En utilisant le théorème de Malus, on conclura alors sur la forme des surfaces d'onde et donc sur le type d'onde existant dans le milieu. Théorème puissant !

### i) Onde plane

Représentons les rayons lumineux associés à une onde plane, en se plaçant dans un plan orthogonal aux plans d'onde :

★

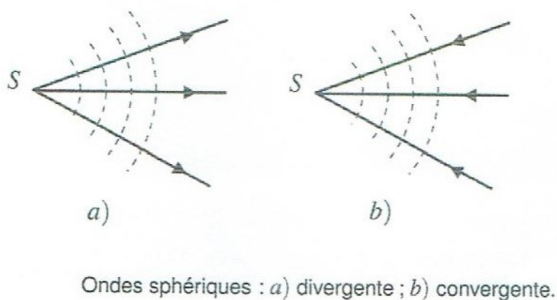


Les rayons lumineux d'une onde plane sont parallèles entre eux. On peut ainsi former une onde plane de deux manières :

- avec une source ponctuelle située à l'infini
- en plaçant une source ponctuelle dans le plan foyer objet d'une lentille mince

### ii) Onde sphérique

Représentons, dans un plan, les rayons lumineux associés à une onde sphérique :

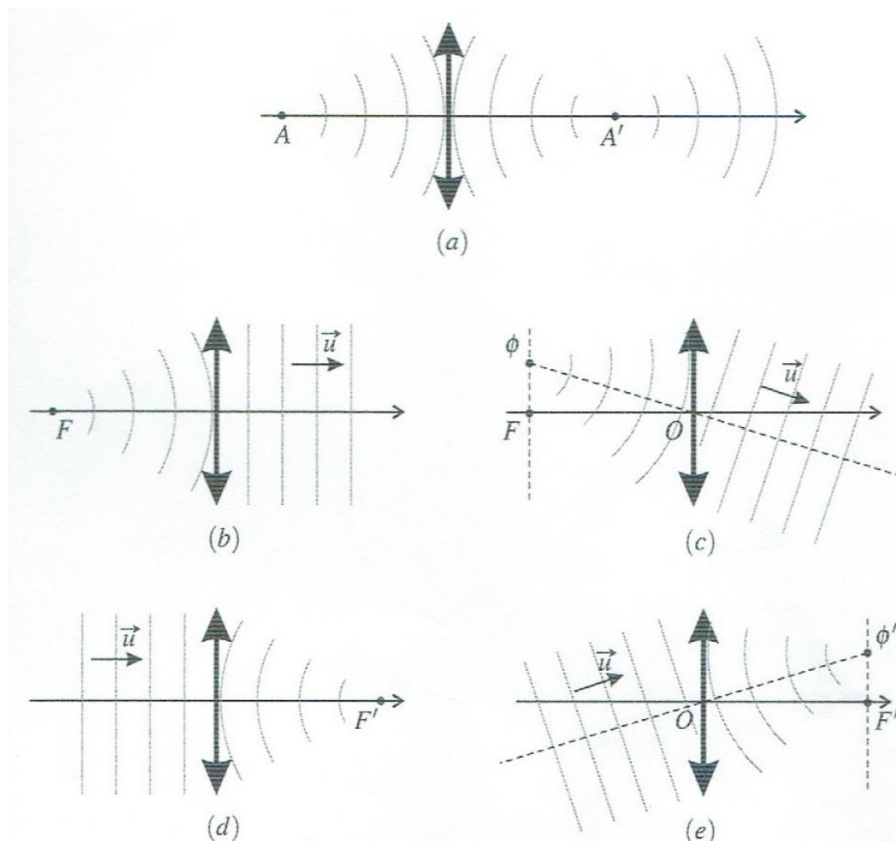


Les rayons lumineux d'une onde sphérique sont des droites concourantes en un point  $S$ , appelé le foyer de l'onde. On peut ainsi former une onde sphérique en observant la lumière émise par une source ponctuelle.

On remarque qu'une onde sphérique observée à grande distance de la source ponctuelle peut être localement approximée comme une onde plane.

### c Application du théorème de Malus : effet d'une lentille mince

Prenons l'exemple d'une lentille mince convergente, étudiée dans les conditions de Gauss. On est dans le cadre de validité de l'optique géométrique, le théorème de Malus s'applique donc bien.



- Cas (a) : A est à distance finie et n'est pas sur le foyer objet : l'onde sphérique issue de A après traversée de la lentille devient une onde sphérique de centre A'.
- Cas (b) et (c) : la source est placée au foyer objet ou dans le plan focal objet de la lentille : l'onde sphérique est transformée en onde plane après traversée de la lentille.
- Cas (d) et (e) : la lentille est éclairée par une onde plane (cas (d) : source à l'infini sur l'axe optique, cas (e) : source à l'infini en dehors de l'axe optique) : après traversée de la lentille l'onde devient une onde sphérique de centre F' (cas (d)) ou de centre  $\Phi'$  foyer image secondaire (cas (e)).

## IV Déphasage accumulé lors de la propagation de l'onde

### IV.1 Expression du déphasage

Reprenons la forme générale d'une vibration lumineuse harmonique :  $s(M,t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$ . Dans la suite des chapitres d'optique ondulatoire, on s'intéressera à l'intensité lumineuse résultant d'un système optique où plusieurs vibrations lumineuses se somment. Un des points cruciaux sera alors d'exprimer la phase  $\varphi(M)$  de chacune des vibrations lumineuses. Comment relier  $\varphi(M)$  au trajet suivi par le rayon lumineux ?

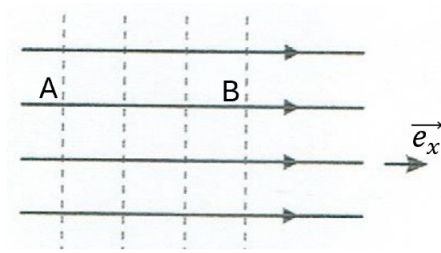
#### a Exemples simples pour une onde plane et une onde sphérique

##### i) Onde plane

Considérons une onde plane se propageant selon  $+\vec{e}_x$  dans un milieu DLHI transparent d'indice optique  $n$ . Le fonction d'onde s'écrit donc :

$$s(M,t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0) = A_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nx - \varphi_0)$$

avec  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{e}_x$ .



La vibration lumineuse aux points  $A$  et  $B$  s'écrit :

$$s(A,t) = A_0 \cos(\omega t - \underbrace{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n x_A + \varphi_0\right)}_{=\varphi(A)})$$

et

$$s(B,t) = A_0 \cos(\omega t - \underbrace{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n x_B + \varphi_0\right)}_{=\varphi(B)})$$

Le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  est donc :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (x_B - x_A)$$



Si les points  $A$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux, alors

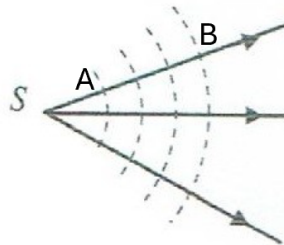
$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \overline{AB}$$

Ce retard est lié à la propagation de l'onde. Il est positif si le rayon lumineux passe par  $A$  avant de passer par  $B$ .

## ii) Onde sphérique

Considérons désormais une onde sphérique divergente dans un milieu DLHI transparent d'indice optique  $n$ . La fonction d'onde s'écrit donc :

$$s(M,t) = A_0 \cos(\omega t - kr - \varphi_0) = A_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nr - \varphi_0)$$



Le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  est :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (r_B - r_A)$$

Si les points  $A$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \overline{AB}$$

## b Cas général de la propagation dans un milieu diélectrique linéaire isotrope et transparent

Dans les deux exemples précédents, la direction de propagation de l'onde n'est pas la même. Mais, dans les deux cas, si les points  $A$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux, le déphasage accumulé au cours de la propagation est proportionnel à la distance parcourue par le rayon lumineux  $\overline{AB}$ . On définit alors le chemin optique ( $AB$ ) :

### Expression du déphasage dû à la propagation avec le chemin optique

Le retard de phase au point  $B$  par rapport à  $A$  du fait de la propagation de l'onde s'exprime :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$$

avec  $\lambda_0$  la longueur d'onde de la lumière dans le vide et  $(AB)$  le chemin optique pour aller de  $A$  à  $B$ .

Le retard de phase dû à la propagation est proportionnel au chemin optique parcouru.

**Propriété ("relation de Chasles") :** Pour 3 points quelconques  $A$ ,  $B$  et  $H$ ,  $(AB) = (AH) + (HB)$ .

### i) Cas d'un seul milieu DLHI transparent

Dans le cas où les points  $A$  et  $B$  sont sur le même rayon lumineux, l'optique géométrique nous permet de calculer le chemin optique.

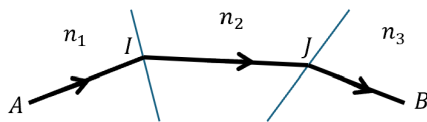
#### Définition : chemin optique

Dans un milieu diélectrique linéaire **homogène** isotrope et transparent d'indice optique  $n$ , on considère deux points  $A$  et  $B$  situés sur le même rayon lumineux. Le chemin optique pour aller du point  $A$  au point  $B$  est défini comme :

$$(AB) = n\overline{AB}$$

★ Unité

### ii) Cas de plusieurs milieux DLHI transparents



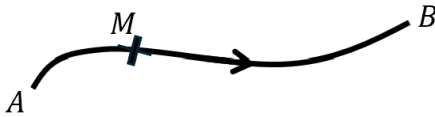
★  $A$ ,  $I$ ,  $J$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux :

$$(AB) = (AI) + (IJ) + (JB) = n_1 \overline{AI} + n_2 \overline{IJ} + n_3 \overline{JB}$$

Le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  est toujours :  $\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$

### iii) Cas d'un milieu inhomogène

On considère enfin le cas le plus général d'un milieu diélectrique linéaire isotrope transparent, mais inhomogène. La trajectoire du rayon lumineux n'est alors plus rectiligne.



On généralise la définition de l'indice optique en introduisant l'abscisse curviligne  $\ell(M)$  : elle donne la distance entre le point  $M$  et une origine  $A$  en suivant la trajectoire du rayon lumineux.

Sur chaque portion de longueur infinitésimale  $d\ell$ , on peut considérer que l'indice optique varie peu : le milieu peut être approximé comme homogène sur une longueur  $d\ell$ . Ainsi, le chemin optique entre deux points  $M$  et  $N$  infiniment proches est  $(MN) = n(M)d\ell$ .

En intégrant sur toute la trajectoire entre  $A$  et  $B$ , situés sur le même rayon lumineux :

$$(AB) = \int_{A \rightarrow B} n(M) d\ell$$

Le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  est toujours :  $\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$

### c Lien avec la durée de propagation dans le milieu

En négligeant toute atténuation de la vibration lumineuse au cours de la propagation, l'onde est alors progressive. On peut de ce fait ré-exprimer le déphasage dû à la propagation au point  $B$  par rapport au point  $A$  en faisant intervenir la durée de propagation  $t_{AB}$  de  $A$  vers  $B$  :

$$\forall t, s(B, t) = s(A, t - t_{AB}) \Rightarrow \forall t, \cos(\omega t - \varphi(B)) = \cos(\omega t - \omega t_{AB} - \varphi(A))$$

Ainsi, le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  est :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \omega t_{AB}$$

### Expression du déphasage dû à la propagation avec la durée de propagation

Le retard de phase au point  $B$  par rapport à  $A$  du fait de la propagation de l'onde s'exprime :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \omega t_{AB}$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'onde et  $t_{AB}$  la durée de propagation pour aller de  $A$  à  $B$ .

Le retard de phase dû à la propagation est proportionnel à la durée de propagation.

En égalisant les deux expressions trouvées pour le retard de phase, on aboutit à

$$\omega t_{AB} = \frac{\omega}{c}(AB) \Rightarrow t_{AB} = \frac{\overline{AB}}{c/n} = \frac{\overline{AB}}{v_\varphi}$$

si  $A$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux, dans le même milieu DLHI transparent. Cela est bien cohérent avec la définition de l'indice optique d'un milieu !

### d Différences de phase supplémentaires

En plus du déphasage dû à la propagation, la lumière subit un déphasage supplémentaire de  $\pi$  dans les cas suivants :

- lorsque le rayon subit une réflexion sur un milieu DLHI plus réfringent que son milieu incident, i.e. que les indices optiques vérifient  $n_2 > n_1$ .
- lorsque le rayon subit une réflexion sur une surface métallique.
- au passage d'un point de convergence (foyer)

Dans ces cas, le retard de phase en  $B$  par rapport à  $A$  s'écrit :

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( (AB) + \frac{\lambda_0}{2} \right)$$

## IV.2 Nouvelle définition des surfaces d'onde

Considérons toujours une vibration lumineuse harmonique :

$$s(M,t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Une surface d'onde est l'ensemble des points de l'espace tels que, à  $t$  fixé,  $s(M,t) = \text{cste}$ . En négligeant toute atténuation spatiale de l'onde, cela est équivalent à  $\varphi(M) = \text{cste}$ .

Considérons un faisceau de rayons lumineux issus d'un même point source  $S$ . Pour un point  $M$ , du fait de la propagation,  $\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)$ . Ainsi, les points  $M$  d'une surface d'onde sont les points tels que  $(SM) = \text{cste}$ .

### Définition équivalente d'une surface d'onde

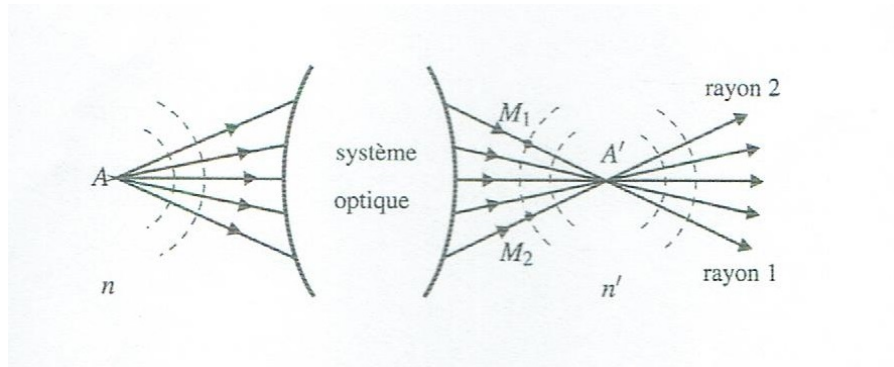
Soit  $S$  le point source de l'onde. Une surface d'onde est l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $(SM) = \text{cste}$ .

## IV.3 Condition de stigmatisme rigoureux

**Définition (rappel) : Stigmatisme rigoureux**

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points  $(A,A')$  si tout rayon incident passant par  $A$  passe par  $A'$  après avoir traversé le système. Autrement dit, l'image d'un point est un point.

Cherchons à traduire cette propriété de stigmatisme rigoureux en terme de chemins optiques.



**Remarque :** On suppose que l'optique géométrique est partout valide dans le système optique (pas de diffraction).

Avant le système optique, les rayons sont des droites passant par A. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont des sphères de centre A.

De même, après le système optique les surfaces d'onde sont des sphères de centre A'.

On considère deux rayons issus de A et convergeant en A'. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points situés sur ces rayons et situés sur la même surface d'onde (relative à A).

Par définition des surfaces d'onde, comme les deux rayons sont issus de la même source A :  $(AM_1) = (AM_2)$ .

★ De plus,  $M_1$  et  $M_2$  étant situés sur la même sphère de centre A' :  $\overline{M_1A'} = \overline{M_2A'} \Rightarrow (M_1A') = (M_2A')$ .

Ainsi,

$$(AA')_1 = (AM_1) + (M_1A') = (AM_2) + (M_2A') = (AA')_2$$

#### Condition de stigmatisme rigoureux

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A,A') si le chemin optique  $(AA')$  est indépendant du rayon lumineux suivi pour aller de A à A', i.e.  $(AA') = \text{cste}$ .

★ Schématiser à nouveau LCV + A + A'. Mettre en évidence deux RL (sur l'AO et un hors AO). Géométriquement, les longueurs  $AA'$  sont différentes entre les rayons 1 et 2. MAIS, les chemins optiques sont identiques.

! En effet, une lentille convergente est taillée dans du verre, d'indice optique supérieur à celui de l'air. La différence d'épaisseur du verre entre le centre et le bord de la lentille suffit alors à permettre cette égalité des chemins optiques.

★ On retiendra qu'en présence d'une lentille mince, il ne faut JAMAIS calculer un chemin optique via les longueurs des rayons lumineux.

## IV.4 Exemples concrets de calculs de chemins optiques

On considère un point source S. Dans la suite des chapitres d'optique, on sera très souvent amené à calculer une différence de chemins optiques  $(SB) - (SA)$ . Entraînons nous donc à réaliser ce calcul sur deux exemples simples.

### Exemple 1 : Avec une lentille mince convergente

★ Cf. ma feuille de préparation du chapitre.

### Exemple 2 : Sans lentille

★ Cf. ma feuille de préparation

## V Conditions de validité de l'optique géométrique

Ce chapitre a permis d'expliquer comment nous allons nous servir des outils de l'optique géométrique pour calculer le déphasage des ondes lumineuses entre deux points. Finissons ce chapitre en rappelant le cadre de validité de l'optique géométrique.

### Approximation de l'optique géométrique et cadre de validité

L'approximation de l'optique géométrique consiste à négliger tout phénomène ondulatoire de la lumière.

Ceci n'est valable qu'à la condition que tous les obstacles rencontrés par la lumière soit de taille caractéristique  $a$  bien bien plus grande que la longueur d'onde :  $a > 1000\lambda$ .

★ En odg,  $a > 0.5 \text{ mm}$

Dans le cas où  $a < 1000\lambda$ , on fait apparaître le phénomène de diffraction : après l'obstacle, la lumière se propage principalement dans un cône appelé cône de diffraction.

★ Schéma, en plaçant le demi-angle au sommet du cône  $\theta$ ,  $D$  et la tache centrale de diffraction  $L$

On peut relier  $\theta$  à la dimension de l'obstacle :  $\sin(\theta) \simeq \frac{\lambda}{a}$

Dans la plupart des expériences d'optique, on choisit  $D \gg L$ , ce qui implique que  $\theta \ll 1$ . On a alors :  $\tan(\theta) \simeq \theta = \frac{L/2}{D}$ . Donc :

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D} \iff L = \frac{2D\lambda}{a}$$

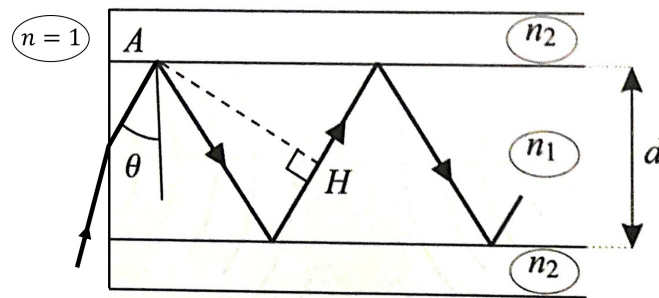


## Exercices

### Ex. 1 Modes de propagation dans une fibre optique à saut d'indices

Exercice issu du Dunod, Physique, PC/PC\*, 6ème édition

Une fibre optique à saut d'indices est modélisée par une lame de verre d'épaisseur  $d = 50 \mu\text{m}$  et d'indice optique  $n_1 = 1.5$  placée entre deux couches de verre d'indice  $n_2 = 1.4$ . La fibre est entourée d'air d'indice optique équivalent à celui du vide. Les rayons lumineux suivent des trajets compris dans un plan, comme schématisé ci-après.



1. A quelle condition portant sur l'angle  $\theta$  le rayon est-il confiné dans la lame d'indice  $n_1$  ? L'ensemble des rayons incidents à l'interface air/fibre pouvant se propager dans la fibre optique forment le cône d'acceptance de la fibre. Déterminer l'expression du demi-angle au sommet du cône d'acceptance en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ . A.N. ?
2. Pour qu'il y ait propagation de l'énergie, l'onde doit être en phase aux points A et H de la figure. En déduire une seconde condition sur l'angle  $\theta$ .
3. Chaque valeur de  $\theta$  correspond à un mode de propagation. Calculer le nombre de modes possibles pour une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$ .

#### Correction de l'exercice 1

1. Pour que le rayon soit confiné dans la lame d'indice  $n_1$ , il faut qu'il y ait réflexion totale en A : aucun rayon réfracté ne peut exister dans le milieu d'indice  $n_2$ . Avec la loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$n_1 \sin(\theta) > n_2 \iff \sin(\theta) > \frac{n_2}{n_1}$$

On peut réaliser une A.N., et comme  $\theta < \frac{\pi}{2}$  :  $69^\circ < \theta < 90^\circ$ .

On en déduit l'angle d'incidence  $i$  à l'interface air/fibre en utilisant à nouveau la loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$1 \times \sin(i) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = n_1 \cos(\theta)$$

On en déduit la valeur maximale de l'angle d'incidence pour que le rayon lumineux se propage dans la fibre, en utilisant  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$  :

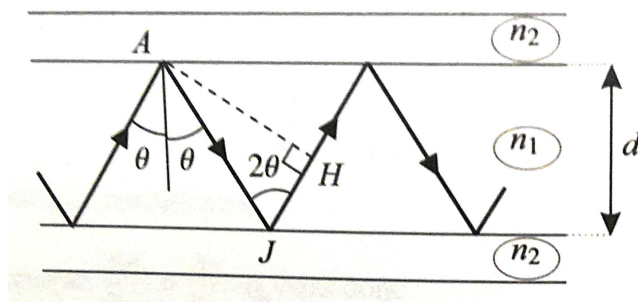
$$i_{max} = \arcsin(n_1 \cos(\theta_{min})) = \arcsin(n_1 \cos(\arcsin(n_2/n_1))) = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

A.N. :  $i_{max} = 33^\circ$ .

2. Le déphasage entre les points H et A est :

$$\varphi(H) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AH)$$

Ici, on souhaite donc que  $\varphi(H) - \varphi(A) = 2n\pi \iff (AH) = n\lambda_0$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .



Géométriquement, comme  $A$  et  $H$  sont sur le même rayon lumineux :  $(AH) = n_1((AJ) + (JH))$ . A ce stade, il reste à raisonner avec des relations trigonométriques. Introduire tous les angles connus sur la figure.

On obtient :  $AJ = \frac{d}{\cos(\theta)}$  et  $JH = AJ \cos(2\theta)$ . Donc :

$$(AH) = n_1 AJ(1 + \cos(2\theta)) = 2n_1 AJ \cos^2(\theta) = 2n_1 d \cos(\theta)$$

Ainsi, la condition de propagation devient :

$$2n_1 d \cos(\theta) = n \lambda_0$$

3. Les deux conditions précédentes doivent être respectées. On en déduit donc la valeur maximale de  $n$  :

$$n_{\max} = \frac{2n_1 d \cos(\theta_{\min})}{\lambda_0} = 107. \quad n \text{ varie donc de } 0 \text{ à } 107 \text{ inclus : il y a } 108 \text{ modes de propagation possibles.}$$

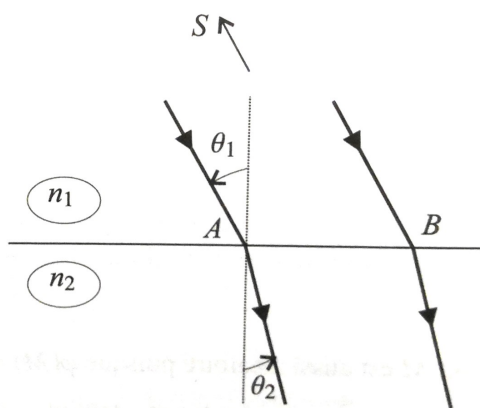
**Remarque :** Important : Chacun des modes se propageant parcourt une longueur différente dans la fibre optique et n'arrive donc pas en même temps que les autres à l'extrémité de la fibre optique. On parle de vitesse effective de propagation différente. On dit alors qu'il y a présence de **dispersion intermodale** dans la fibre optique.

## Ex. 2 Démonstration de la loi de Snell-Descartes de la réfraction

Dans cet exercice, on se propose de démontrer la loi de Snell-Descartes de la réfraction en utilisant la notion de chemin optique.

1. Rappeler la loi de Snell-Descartes de la réfraction.

Une onde plane monochromatique émise par une source ponctuelle  $S$  arrive sur un dioptré plan séparant deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$ . On appelle  $\theta_1$  l'angle d'incidence et  $\theta_2$  l'angle de réfraction.



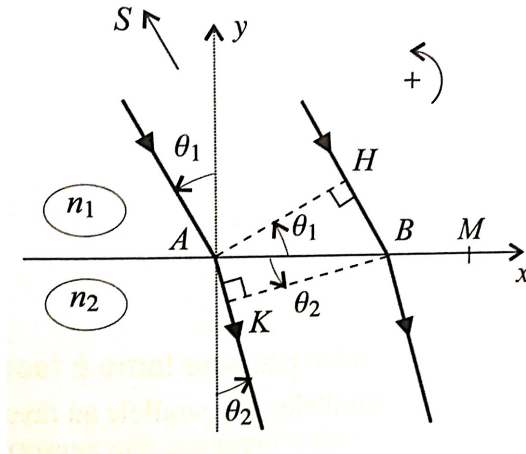
- En faisant apparaître un point  $H$  situé sur le rayon passant par  $B$  et tel que  $(SA) = (SH)$ , déterminer une expression de  $(SB) - (SA)$  en fonction de  $AB$  et de  $\theta_1$ .
- Déterminer une nouvelle expression de  $(SB) - (SA)$  en fonction de  $AB$  et de  $\theta_2$ .
- Montrer que l'on retrouve la loi de la réfraction reliant  $\theta_1$  à  $\theta_2$ .

### Correction de l'exercice 2

- Loi de Snell-Descartes de la réfraction (attention à ne pas oublier la 1ère partie de la loi !) :

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, i.e. le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre. (C'est cette propriété qui permet de se contenter de schémas 2D en optique géométrique.)
- $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$  avec  $n_1$  et  $n_2$  les indices optiques des deux milieux séparés par le dioptre,  $\theta_1$  l'angle d'incidence et  $\theta_2$  l'angle de réfraction.

Dans cet exercice, on admet la première partie de la loi, et on va démontrer la seconde.



2. Tous les rayons lumineux sont initialement émis par une même source ponctuelle  $S$ . Ainsi, la propriété  $(SA) = (SH)$  signifie que les points  $A$  et  $H$  appartiennent à la même surface d'onde. D'après le théorème de Malus,  $H$  est donc le projeté orthogonal de  $A$  sur le rayon incident passant par  $B$ . Ainsi,

$$(SB) - (SA) = (SB) - (SH) = (HB) = n_1 \overline{HB}$$

car  $H$  et  $B$  appartiennent au même rayon lumineux. Géométriquement, on aboutit à :

$$(SB) - (SA) = n_1 AB \sin(\theta_1)$$

3. En procédant de manière similaire, on introduit le point  $K$ , projeté orthogonal de  $B$  sur le rayon émergent passant par  $A$ . Sachant que tous les rayons sont émis par un même point source  $S$  et d'après le théorème de Malus,  $(SK) = (SB)$ . Donc :

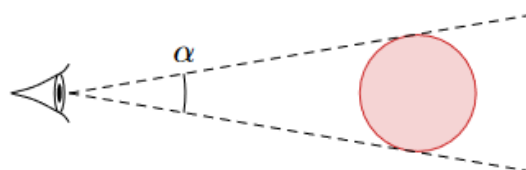
$$(SB) - (SA) = (AK) = n_2 AB \sin(\theta_2)$$

4. En égalisant les deux expressions précédentes, on aboutit à  $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$ .

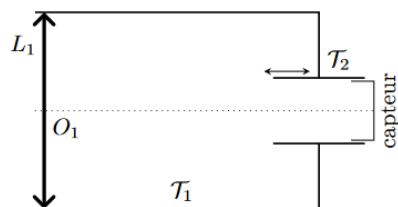
### Ex. 3 Sup' : Tripleur de focale de Barlow

Données numériques :

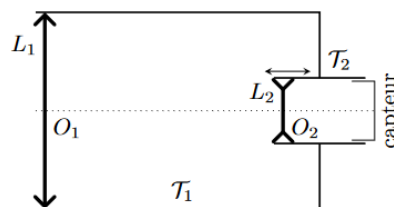
- Les orbites de la Terre et de Jupiter sont coplanaires et approximativement circulaires de centre le centre d'inertie du Soleil.
- Rayon des orbites de la Terre et de Jupiter :  $R_T = 1.5 \times 10^8$  km et  $R_J = 7.8 \times 10^8$  km.
- Diamètre de Jupiter :  $D_J = 1.4 \times 10^5$  km.



1. Calculer le diamètre angulaire maximal  $\alpha_0$  sous lequel on peut observer Jupiter depuis la Terre. Peut-on distinguer deux points à l'opposé de Jupiter à l'œil nu ?



(a) Dispositif simple



(b) Dispositif avec tripleur de focale

On souhaite photographier Jupiter à travers un télescope simple, voir figure (a), assimilé à une unique lentille mince convergente de focale  $f'_1 = 2250$  mm. L'image doit se former sur le capteur. Le tube  $T_2$  peut coulisser à l'intérieur du tube  $T_1$  pour régler la mise au point.

- Déterminer la distance objectif - capteur pour obtenir une image nette. Calculer alors le diamètre maximal de Jupiter sur le capteur.

Cette image est observable sur un capteur CCD, mais est petite. Pour agrandir l'image, on intercale une lentille divergente  $L_2$  de distance focale  $f'_2$  entre la lentille  $L_1$  et le capteur, voir figure (b). La distance  $d$  entre la lentille  $L_2$  et le capteur est fixe, égale à 200 mm. On admet que le foyer image  $F'_1$  de la lentille  $L_1$  se situe entre la lentille  $L_2$  et le capteur.

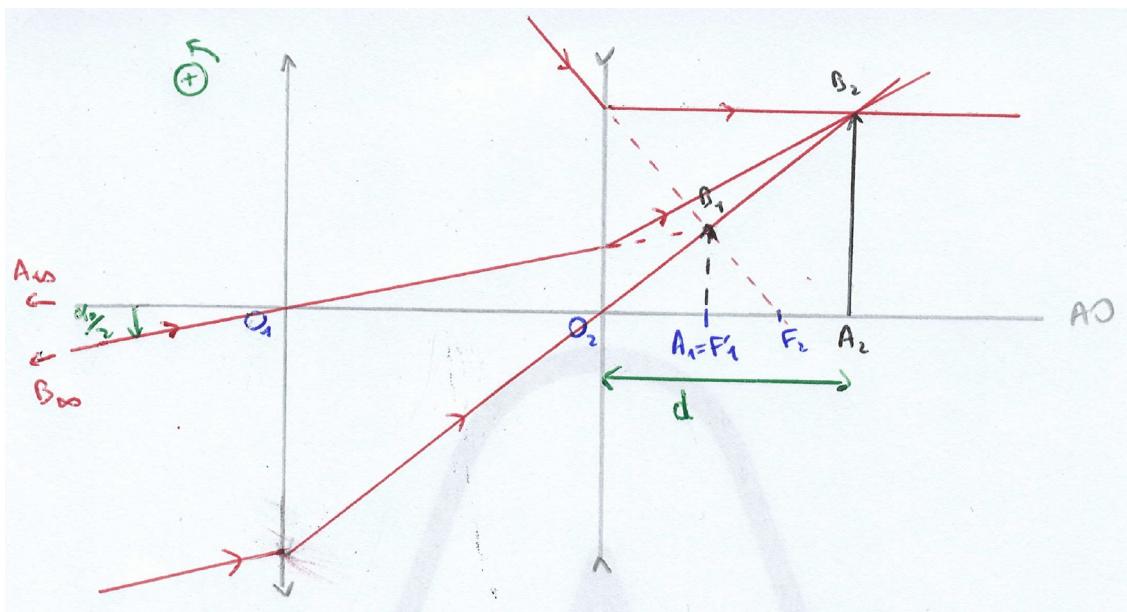
- Reproduire le dispositif et tracer la marche d'un rayon lumineux incident venant d'une des extrémités de Jupiter. On indiquera :
  - l'angle d'incidence  $\alpha_0/2$ ,
  - l'image intermédiaire  $A_1B_1$ ,
  - l'image finale réelle  $A_2B_2$ .
- Déterminer l'expression de la distance focale  $f'_2$  et de la distance  $O_1O_2$  entre les deux lentilles pour que le dispositif produise sur le capteur une image de Jupiter trois fois plus grande que précédemment.
- Ce dispositif est alors appelé "tripleur de focale". Expliquer.

On souhaite enfin observer Jupiter à l'œil à travers ce dispositif (b). On conserve la valeur de  $f'_2 = -100$  mm trouvée en question Q4.

- Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'œil emmétrope, où doit être située l'image finale  $A_2B_2$  en sortie de  $L_2$  ? Calculer alors la distance  $O_1O_2$  à imposer.
- Calculer la valeur du diamètre angulaire  $\alpha'_0$  sous lequel l'œil perçoit Jupiter à l'issue de la lunette astronomique. Peut-on désormais distinguer deux points à l'opposé de Jupiter ?

### Correction de l'exercice 3

- La distance minimale entre la Terre et Jupiter est atteinte lorsqu'elles sont alignées avec le Soleil dans l'ordre Soleil - Terre - Jupiter. Cette distance vaut  $L = R_J - R_T \gg D$ . L'angle  $\alpha_0$  vérifie alors  $\alpha_0 \ll 1$  et on a donc :  $\alpha_0 = \frac{D}{R_J - R_T}$ . A.N. :  $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-4}$  rad =  $0.76' < 1'$ . Ce diamètre angulaire est inférieur à la limite de résolution angulaire de l'œil : on ne peut pas distinguer deux points à l'opposé de Jupiter (Jupiter est perçu à l'œil nu comme un point).
- On a  $L \gg f'_1$  : tout se passe comme si les rayons lumineux étaient émis depuis l'infini. L'image se forme alors dans le plan focal image de  $L_1$ , on impose donc une distance  $L_1$  - capteur de  $f'_1 = 2250$  mm. Le diamètre de Jupiter sur le capteur est alors  $D' = \alpha_0 f'_1 = 0.50$  mm.
- Au brouillon, on se rend compte que le seul moyen que l'image finale soit réelle est que  $F'_1 \in [O_2F_2]$ . On réalise alors le schéma des rayons lumineux :



4. On souhaite obtenir une image 3 fois plus grande qu'avec le dispositif (a), donc :  $\overline{A_2B_2} = 3\overline{A_1B_1}$ . On peut utiliser la relation de grandissement de Descartes pour la lentille  $L_2$  (que l'on retrouve de manière évidente avec un théorème de Thalès sur le schéma précédent) :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 3 = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{d}{f'_1 - \overline{O_1O_2}}$$

Donc,  $\overline{O_1O_2} = f'_1 - \frac{d}{3}$ , ce qui semble cohérent avec le schéma.

On détermine  $f'_2$  avec la relation de conjugaison de Descartes par exemple :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow f'_2 = -\frac{d}{2}$$

5. Avec le télescope simple (a), pour obtenir une image trois fois plus grande, il faut multiplier par 3 la distance focale de  $L_1$ . Grâce à la lentille divergente  $L_2$ , on obtient cette image 3 fois plus grande, d'où le nom de "tripleur de focale", tout en évitant de devoir multiplier par 3 l'encombrement du système.
6. Pour un œil emmétrope, une observation sans fatigue nécessite une image finale  $A_2B_2$  située à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire  $A_1B_1$  soit située dans le plan focal objet de  $L_2$ , soit que  $F'_1 = F_2 = A_1$ . On lit donc géométriquement :

$$\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2$$

A.N. :  $\overline{O_1O_2} = 2150 \text{ mm}$ .

7. Avec un schéma des rayons lumineux et une formule de trigonométrie :

$$\frac{\alpha'_0}{2} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2} \quad \text{et} \quad \overline{A_1B_1} = \frac{\alpha_0}{2} f'_1$$

Ainsi  $\alpha'_0 = -\alpha_0 \frac{f'_1}{f'_2}$ . A.N. :  $\alpha'_0 = 17'$ . On peut distinguer nettement à l'œil deux points situés à l'opposé de Jupiter avec cette lunette astronomique.

## Ex. 4 Sup' : Profondeur de champ d'un appareil photographique

On étudie un appareil photographique, modélisé comme l'association d'une lentille mince convergente de distance focale  $f' = 50 \text{ mm}$  (centre optique nommé  $O$ ) et d'un capteur.

1. On souhaite photographier un bâtiment de  $h = 100 \text{ m}$  de haut situé à une distance de  $D = 140 \text{ m}$  du photographe. Déterminer la taille minimale du capteur pour pouvoir photographier le bâtiment dans son intégralité.

Initialement, l'appareil photo est réglé sur l'infini, c'est-à-dire que la distance entre le plan de l'objectif et celui du capteur est égale à la distance focale  $f'$ . Pour mettre au point (i.e. obtenir une image nette) d'un objet à une distance finie, on écarte l'objectif de sa position initiale d'une distance  $t$ , appelée distance de tirage. On appelle alors  $D$  la distance entre l'objet et le point  $O$ .

2. Déterminer l'expression de  $t$  en fonction de  $D$  et  $f'$ . Simplifier cette expression dans le cas où  $D \gg f'$ .

Dans toute la suite, on suppose que la mise au point est réalisée pour une distance  $D = 18$  m.

On constate en pratique que l'image formée reste nette de part et d'autre de la mise au point théorique (c'est la profondeur de champ), car on peut qualifier d'image nette d'un point, toute tache de dimension inférieure au diamètre  $\delta$  des cellules photosensibles du capteur.

3. L'objectif de l'appareil photographique a un diamètre d'ouverture  $d = \frac{f'}{N}$  avec  $N$  le nombre d'ouverture. Si  $N = 5.6$ , on constate que l'image est nette si l'objet est situé entre l'infini et une distance de 9 m de l'objectif. Déterminer numériquement  $\delta$ .
4. Déterminer la profondeur de champ pour des nombres d'ouverture  $N = 2.8$  et  $N = 16$ . Commenter. Quel autre facteur influence le choix de  $N$  par un photographe ?

### Correction de l'exercice 4

1. On a  $D \gg f'$ , on peut donc considérer que tout se passe comme si le bâtiment était presque situé à l'infini. Donc, l'image se forme presque dans le plan focal image de la lentille :  $OA' \simeq f'$ . Un schéma des rayons lumineux ou l'application de la relation de grandissement de Descartes donne alors :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{f'}{-D} = -\frac{f'h}{D}$$

A.N. :  $\overline{A'B'} = 36$  mm (ordre de grandeur cohérent avec les dispositifs pratiques).

2. Je vous conseille de faire un schéma et d'y indiquer les différentes distances introduites par l'énoncé :  $\overline{OA'} = f' + t$  et  $\overline{AO} = D$ .

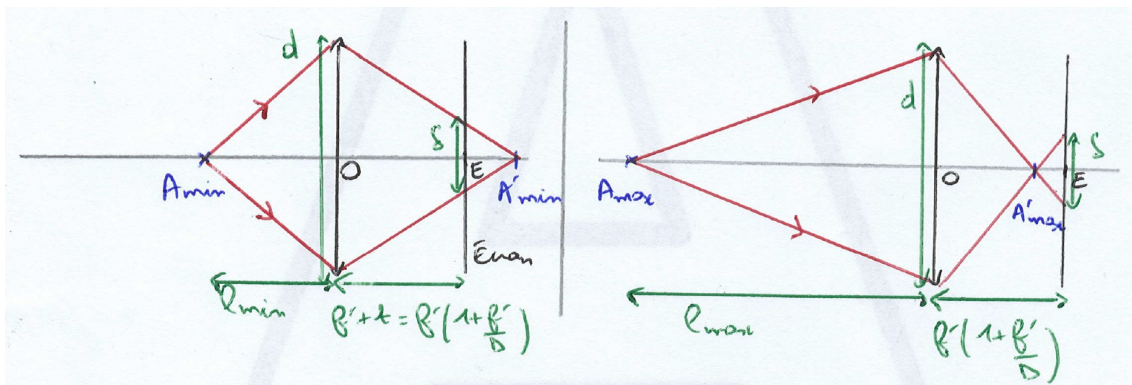
On utilise la relation de conjugaison de Descartes (par exemple) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow t = f' \left( \frac{1}{1 - \frac{f'}{D}} - 1 \right)$$

Si  $D \gg f'$ , un développement limité à l'ordre 1 en  $f'/D$  donne :  $t = \frac{f'^2}{D}$ .

**Remarque :** La Q.1 revenait à faire un DL à l'ordre 0 en  $f'/D$ , car on ne gardait que le terme dominant. Ici, il faut pousser à l'ordre 1 en  $f'/D$ .

3. Vu la profondeur de champ donnée, c'est le cas limite de l'objet au plus proche de l'objectif qui fixe la taille de  $\delta$ . Dans cette question, on considère donc cette seule situation d'un objet situé en  $A_{min}$ .



D'après le théorème de Thalès,

$$\delta = d \times \frac{\overline{EA'_{min}}}{\overline{OA'_{min}}} = d \left( 1 - \frac{f'(1 + \frac{f'}{D})}{\overline{OA'_{min}}} \right)$$

On détermine  $\overline{OA'_{min}}$  avec la relation de conjugaison de Descartes par exemple :

$$\frac{1}{\overline{OA'_{min}}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'_{min}}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell_{min}}$$



Ainsi,

$$\delta = d \left( 1 - \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) + \frac{f'}{\ell_{min}} \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) \right) = d \left( -\frac{f'}{D} + \frac{f'}{\ell_{min}} \left( 1 + \frac{f'}{D} \right) \right)$$

Or, on a  $\ell_{min} \gg f'$ . Donc, le terme  $\frac{f'}{\ell_{min}} \times \frac{f'}{D}$  est un terme infiniment petit d'ordre 2 : on le néglige devant les termes infiniment petits d'ordre 1 en  $f'/D$  et  $f'/\ell_{min}$ . Ainsi, en ne gardant que les termes dominants :

$$\delta = df' \left( \frac{1}{\ell_{min}} - \frac{1}{D} \right)$$

A.N. :  $\delta = 25 \mu\text{m}$ .

**Remarque :** Dans le cas précis proposé par l'énoncé, il se trouve qu'on obtient exactement le même résultat numérique en étudiant  $A_{max}$  situé à l'infini. Mais c'est un "coup de chance" lié aux valeurs numériques choisies...

4. Le raisonnement fait précédemment reste vrai et on a donc :  $\ell_{min} = \frac{f'}{\frac{\delta}{d} + \frac{f'}{D}}$ .

Concernant  $\ell_{max}$ , on peut déjà remarquer que si  $N > 5.6$ , alors  $d$  diminue par rapport à la Q.3, permettant de faire reculer encore davantage  $A_{max}$ . Or, comme pour  $N = 5.6$ ,  $A_{max}$  est à l'infini, on peut tout de suite conclure que pour  $N = 16$ ,  $\ell_{max} = +\infty$ . Ainsi, le seul cas restant à traiter est la détermination de  $\ell_{max}$  pour  $N = 2.8$ .

En refaisant un théorème de Thalès + une relation de conjugaison de Descartes, on trouve tous calculs faits :

$$\ell_{max} = \frac{f'}{\frac{f'}{D} - \frac{\delta}{d}}$$

A.N. : Pour  $N = 2.8$  :  $\ell_{max} = 36 \text{ m}$  et  $\ell_{min} = 12 \text{ m}$ .

A.N. : Pour  $N = 16$  :  $\ell_{max} = +\infty$  et  $\ell_{min} = 4.6 \text{ m}$ .

Ainsi, si  $N$  augmente, la profondeur de champ augmente. Néanmoins, si  $N$  augmente, l'intensité lumineuse reçue diminue, et donc on doit augmenter la durée d'exposition pour obtenir une photo lumineuse. Ceci peut être gênant dans le cas d'un sujet mouvant car la photo pourrait devenir floue. Il faut donc faire un compromis entre profondeur de champ et durée d'exposition.

## Ex. 5 Largeur naturelle d'une lampe spectrale

On considère une lampe spectrale basse pression émettant une raie à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$ .

1. Quelle est la fréquence centrale  $\nu_0$  de cette raie ? Quelle est sa couleur ?
2. La longueur de cohérence temporelle d'une telle raie liée à la seule largeur naturelle (i.e. atome sans agitation thermique, isolé du reste de l'univers) serait de  $L_c = 3 \text{ m}$ . Définir la notion de "longueur de cohérence" et en expliquer l'origine. En déduire la valeur numérique de la durée  $\tau_c$  des trains d'onde émis.
3. Calculer le nombre moyen d'oscillations par train d'onde.
4. Donner un ordre de grandeur de la largeur spectrale naturelle en fréquence  $\Delta\nu$  et en longueur d'onde  $\Delta\lambda$ .
5. En TP, les lampes spectrales utilisées ont une longueur de cohérence temporelle bien plus faible. En donner un ordre de grandeur pour les lampes spectrales de TP. Proposer une origine physique de la diminution de cette longueur de cohérence dans les lampes réelles.

---

### Correction de l'exercice 5

1. Dans le vide, la relation de dispersion donne :  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Au vu de la longueur d'onde dans le vide, la raie est verte.
2. La longueur de cohérence temporelle est la distance parcourue par un train d'onde durant son temps de cohérence  $\tau_c$ , c'est donc aussi la longueur spatiale du train d'onde dans le vide. L'émission de train d'onde de durée finie s'explique par la **largeur spectrale non nulle** de la raie. Dans le cas de la largeur naturelle, cet élargissement spectral est lié uniquement à des effets quantiques : la relation d'incertitude de Heisenberg interdit en effet la connaissance de l'énergie du niveau excité de manière infiniment précise.

Ainsi :  $\tau_c = \frac{L_c}{c} = 1 \times 10^{-8} \text{ s}$

3. Deux façons de procéder :

- *Vision temporelle* : on calcule la période de l'onde  $T = \frac{1}{\nu_0}$  et on en déduit le nombre d'oscillations par train d'onde  $\frac{\tau_c}{T}$ .

- *Vision spatiale* : on connaît la période spatiale  $\lambda_0$  de l'onde émise et la longueur totale du train d'onde  $L_c$ . Le nombre d'oscillations est  $\frac{L_c}{\lambda_0}$ .

On trouve  $6 \times 10^6$  oscillations par train d'onde. (Un grand nombre d'oscillations arrive donc au détecteur par rapport à son temps de réponse.)

4. D'après la théorie de Fourier, en ordre de grandeur :

$$\Delta\nu \times \tau_c \sim 1 \iff \Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c} = 10^8 \text{ Hz} \ll \nu_0$$

Pour déterminer la largeur spectrale en longueur d'onde, on différentie la relation de dispersion :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu_0^2} d\nu \Rightarrow \Delta\lambda \sim \frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} \sim 10^{-13} \text{ m} = 0.1 \text{ pm}$$

5. En TP, les lampes spectrales basse pression ont une longueur de cohérence temporelle  $L_c \sim 0.1$  à  $1 \text{ mm}$ , soit largement inférieure à la largeur naturelle. Ceci est relié à un élargissement spectral important. On peut citer plusieurs origines de cet élargissement spectral : effet Doppler lié à l'agitation thermique, collisions entre les atomes et les parois.