

# Superposition de deux ondes lumineuses

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Comment calculer l'intensité lumineuse résultant de la superposition de deux ondes ?</b>	<b>2</b>
I.1	Calcul dans le cas général . . . . .	2
I.2	Conditions d'obtention d'interférences . . . . .	2
I.3	Synthèse des résultats . . . . .	4
I.4	Deux ondes sont-elles cohérentes entre elles ? Deux visions différentes de l'émission d'une source . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Analyse de la figure d'interférences</b>	<b>6</b>
II.1	Champ d'interférences . . . . .	6
II.2	Franges d'interférences et ordre d'interférences . . . . .	6
II.3	Contraste (= visibilité) de la figure d'interférences . . . . .	7
II.4	Forme géométrique des franges d'interférences . . . . .	8
<b>III</b>	<b>Autre démonstration de la formule de Fresnel en supposant que les deux ondes sont cohérentes entre elles</b>	<b>9</b>
III.1	Préambule : utiliser la notation complexe pour calculer l'intensité lumineuse . . . . .	9
III.2	Démonstration de la formule de Fresnel avec la notation complexe . . . . .	9
	<b>Exercices</b>	<b>11</b>

## Questions de cours

- En s'appuyant sur un calcul d'intensité lumineuse, justifier la nécessité d'ondes synchrones pour observer des interférences.
- Après avoir présenté le modèle des trains d'onde, définir la notion de cohérence entre deux ondes quasi-monochromatiques. Citer un exemple d'ondes cohérentes et un exemple d'ondes incohérentes.
- Après avoir cité les conditions d'obtention d'interférences, établir, par la méthode de votre choix, la formule de Fresnel pour deux ondes cohérentes entre elles.
- En s'appuyant sur la formule de Fresnel, définir et expliquer l'intérêt de l'ordre d'interférences et du contraste d'une figure d'interférences.

*Prise de notes* : Trois temps caractéristiques pour les sources et détecteurs optiques, avec des ordres bien distincts :  $\tau_{\text{détect}} \gg \tau_c, T$  : les détecteurs ne sont sensibles qu'à l'intensité lumineuse  $I = \langle ||\vec{\Pi}||^2 \rangle$ .

★ 1ère conséquence (celle là, je la dis pour les marquer : retenir qu'on est sensible qu'à une MOYENNE, car c'est le point clé !!!) : certes,  $\vec{\Pi}$  oscille (ondes !!), mais comme les détecteurs ne sont sensibles qu'à sa moyenne, on ressent une intensité lumineuse indépendante du temps (lampe de la salle de classe par exemple). (C'est radicalement différent de l'acoustique : on met un micro, un oscillo, on voit l'onde.)

2nde conséquence : interférences. On a fait le modèle scalaire de l'OO pour simplifier le formalisme des ondes EM : va permettre de traiter des situations plus complexes comme la superposition de deux ondes, qui pourra mener à des interférences sous certaines conditions bien précises.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Etablir la formule de Fresnel.
2. Identifier une situation de cohérence ou d'incohérence entre deux ondes et en déduire la formule de calcul de l'intensité à appliquer.

## I Comment calculer l'intensité lumineuse résultant de la superposition de deux ondes ?

### I.1 Calcul dans le cas général

On se place dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique ondulatoire. Considérons deux vibrations lumineuses harmoniques, appelées 1 et 2, et se superposant en un point  $M$  :

$$s_i(M, t) = A_{0i} \cos(\omega_i t - \varphi_i(M)) \quad (i = 1, 2)$$

★ En  $M$ , d'après le théorème de superposition :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

Or, l'intensité lumineuse  $I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle s^2(M, t) \rangle &= \frac{1}{2} A_{01}^2 + \frac{1}{2} A_{02}^2 + 2 A_{01} A_{02} \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} A_{01}^2 + \frac{1}{2} A_{02}^2 + A_{01} A_{02} \left( \underbrace{\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))) \rangle}_{=0} + \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} A_{01}^2 + \frac{1}{2} A_{02}^2 + A_{01} A_{02} \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \rangle \end{aligned}$$

On pose  $I_1 = K \langle s_1^2(M, t) \rangle = K A_{01}^2 \langle \cos^2(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \rangle = K \times \frac{1}{2} A_{01}^2$  et  $I_2 = K \times \frac{1}{2} A_{02}^2$ . On ré-écrit alors le résultat précédent, en utilisant  $I = K \langle s^2(M, t) \rangle$  :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \rangle$$

★ Entourer le dernier terme : terme d'interférences, qui doit être non nul pour avoir des interférences

### I.2 Conditions d'obtention d'interférences

### a Condition 1 : ondes synchrones

Si  $\omega_1 \neq \omega_2$ , alors  $\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \rangle = 0$  : il n'y a pas d'interférences.



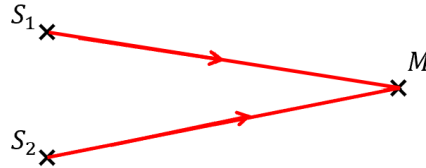
La première condition nécessaire pour obtenir des interférences est  $\omega_1 = \omega_2$  : on parle dans ce cas d'ondes synchrones.

Sous cette condition, la formule de l'intensité devient :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle$$

### b Condition 2 : ondes cohérentes

Ré-écrivons le terme  $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ . Pour cela, appelons  $S_1$  et  $S_2$  les points sources émettant les ondes 1 et 2.



On utilise le chemin optique :

$$\varphi_1(M) = \underbrace{\varphi_1(S_1)}_{=\varphi_{10}} + \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M) \quad \text{et} \quad \varphi_2(M) = \underbrace{\varphi_2(S_2)}_{=\varphi_{20}} + \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M)$$



Donc,

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda_0}((S_2 M) - (S_1 M))$$

Néanmoins, expérimentalement, les sources  $S_1$  et  $S_2$  ne peuvent pas émettre une onde strictement monochromatique (il y a toujours une certaine largeur spectrale). Cela implique (à notre niveau) l'utilisation du modèle des trains d'onde pour décrire l'émission des deux ondes quasi-monochromatiques.

### Conséquences du modèle des trains d'onde :

**Rappel du modèle :** Une source lumineuse émet une succession de portions de sinusoides (= les trains d'onde), chacune de ces portions étant émise pendant une durée finie valant en moyenne le temps de cohérence  $\tau_c$ . Deux trains d'onde successifs sont émis avec une variation brutale et aléatoire de la phase à l'origine  $\varphi_{i0}$ .

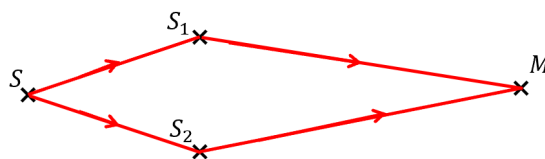
Ainsi, à cause de l'émission sous la forme de trains d'onde,  $\varphi_{i0}(t)$  fluctue avec le temps. Si  $\varphi_{10}$  et  $\varphi_{20}$  fluctuent de manière indépendante entre eux, alors en moyenne sur un



grand nombre de trains d'onde  $\left\langle \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda_0}((S_2 M) - (S_1 M)) \right\rangle = 0$ .

Pour visualiser des interférences, il est nécessaire que  $\varphi_{20} - \varphi_{10}$  ne varie pas aléatoirement dans le temps.

Pour réaliser ceci expérimentalement, on doit nécessairement utiliser un point source primaire  $S$  dont on divise le faisceau en deux avant de se faire superposer de nouveau les deux faisceaux.



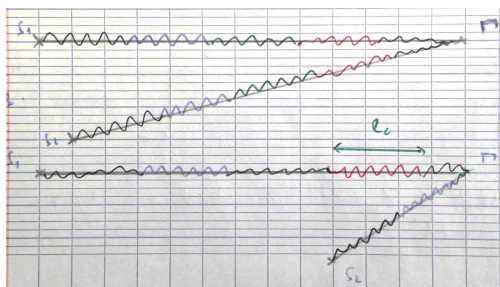
La formule du déphasage devient alors :  $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \varphi'_{20} - \varphi'_{10} + \frac{2\pi}{\lambda_0}((SS_2 M) - (SS_1 M))$  avec  $\varphi'_{10}$  et  $\varphi'_{20}$  désignant désormais les phases à l'origine au niveau du point source primaire  $S$ .

On définit alors  $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ , la différence des chemins optiques, aussi appelée la différence de marche.

Néanmoins, ceci n'est pas suffisant pour observer des interférences. Représentons les trains d'onde émis par la source primaire.

(Faire le schéma ci-dessous en commençant à partir d'un point  $S$ . Leur dire qu'ils ont de la place et de prendre plein de couleurs.) Indiquer :  $\ell_c$  : longueur de cohérence temporelle

★



Si  $\delta(M) \geq \ell_c$ , alors  $\varphi'_{10}$  et  $\varphi'_{20}$  n'ont à nouveau aucun lien entre eux : la moyenne du déphasage est alors nulle. Pour observer des interférences, il faut nécessairement que  $\delta(M) \leq \ell_c$ .

Dans le cas où les deux ondes sont issues du même point source primaire  $S$  et que la différence de chemins optiques  $\delta(M) \leq \ell_c$ , alors les deux ondes sont dites cohérentes entre elles. Sous ces conditions, les deux phases à l'origine fluctuent aléatoirement, mais de la même manière :  $\varphi'_{10} = \varphi'_{20}$ . La formule de l'intensité devient :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

**Remarque :** En toute rigueur, la relation  $\varphi'_{10} \simeq \varphi'_{20}$  n'est valable que si  $\delta(M) \ll \ell_c$ . Dans le cas contraire, on observerait bien des interférences, mais la formule de l'intensité serait légèrement modifiée.

### I.3 Synthèse des résultats

#### Conditions d'obtention d'interférences lumineuses

Pour observer des interférences lumineuses, il faut que :

- les deux ondes soient synchrones : les pulsations centrales des spectres d'émission des deux ondes sont identiques :  $\omega_1 = \omega_2$  (critère lié aux pulsations centrales des spectres d'émission).
- les deux ondes soient cohérentes entre elles : elles sont issues du même point source primaire  $S$  (critère lié au point source) et ont une différence de chemins optiques inférieure à la longueur de cohérence temporelle :  $|\delta(M)| \leq \ell_c$  (critère lié aux largeurs spectrales des spectres d'émission).

Dans le cas contraire, le terme d'interférences est nul.

Comme la notion de cohérence implique celle de synchronicité, on se contentera couramment de dire que les deux ondes sont cohérentes entre elles.

**Remarque :** Dans le cas où on travaillerait avec des ondes polarisées, il faudrait ajouter en condition d'obtention d'interférences lumineuses que l'amplitude vectorielle  $\vec{E}_{01}$  ne soit pas orthogonale à  $\vec{E}_{02}$ .

La formule de calcul de l'intensité est modifiée selon que les ondes soient cohérentes ou incohérentes entre elles.

### Formule de Fresnel

Dans le cas où les deux ondes sont cohérentes entre elles, la formule de l'intensité est :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

avec  $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$  la différence des chemins optiques. Cette formule est dite **formule de Fresnel**.

Comme les deux ondes interférant proviennent initialement du même point source primaire  $S$ , on aura souvent  $I_1 = I_2 = I_0$ . La formule de Fresnel simplifiée est alors :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)\right)$$

On parle d'additivité des amplitudes complexes (cf. partie III).

### Additivité des intensités lumineuses

Dans le cas où les deux ondes sont non synchrones ou incohérentes entre elles, on n'observe pas d'interférences, et la formule des intensités est simplement :

$$I(M) = I_1 + I_2$$

On parle d'additivité des intensités.

## I.4 Deux ondes sont-elles cohérentes entre elles ? Deux visions différentes de l'émission d'une source

Il existe deux modélisations pour prendre en compte le caractère non monochromatique d'une source. Ces deux modélisations ont un impact sur le caractère cohérent ou incohérent de deux ondes se superposant.

### Modélisation n°1 : On prend directement en compte l'intégralité du spectre d'émission de la source

Dans ce cas, la longueur de cohérence temporelle  $\ell_c$  est reliée à la largeur spectrale totale de la source :

$$\tau_c \sim \frac{1}{\Delta\nu} \Rightarrow \ell_c = c\tau_c \sim \frac{c}{\Delta\nu}$$

C'est la vision couramment utilisée en TP.

**Exercice :** Identifier si les deux ondes se superposant sont cohérentes ou incohérentes entre elles dans les exemples suivants.

1. Trous d'Young avec une source monochromatique  $S$  ponctuelle (source infiniment fine)
2. Trous d'Young avec une source monochromatique étendue (la source a une certaine largeur spatiale)
3. Trous d'Young éclairés par une lampe blanche  $S$  ponctuelle. On distinguera les cas où les deux ondes se superposent proche du centre de l'écran ou proche des bords de l'écran.
4. Michelson en configuration "lame d'air" avec un écart entre les miroirs  $\Delta x \sim 1$  cm et éclairé par un laser (on suppose la direction incidente fixée et que les deux ondes proviennent du même point source)
5. Michelson en configuration "lame d'air" avec un écart entre les miroirs  $\Delta x \sim 1$  cm et éclairé par une lampe blanche (on suppose la direction incidente fixée et que les deux ondes proviennent du même point source)

(Je leur représente les deux schémas de principe des trous d'Young et du Michelson en lame d'air.)



1. Cohérentes. Insister sur : monochromatique  $\Rightarrow \ell_c = +\infty$ .
2. Distinguer deux cas : si les deux ondes considérées viennent du même point source : cohérentes. Sinon : non.
3. Ondes synchrones. Pour la cohérence : au centre de l'écran  $\delta \sim 0 \ll \ell_c$  : cohérentes / au bord  $\delta \gg \ell_c \sim 1 \mu\text{m}$  : incohérentes
4.  $\delta \sim 2\Delta x \ll \ell_c \sim 1 \text{ m}$  : cohérentes
5.  $\delta \gg \ell_c \sim 1 \mu\text{m}$  : incohérentes

### **Modélisation n°2 : On décompose la source comme une infinité de sources monochromatiques**

On peut décomposer la source à spectre large en une infinité de sources monochromatiques de fréquences  $\nu_i$ . Prenons l'exemple de trous d'Young éclairés par une lampe blanche  $S$  ponctuelle.

- Deux ondes émises à la même fréquence  $\nu_i$  sont synchrones et cohérentes entre elles, y compris sur les bords de l'écran. En effet, la source est ponctuelle et la source émettant à la fréquence  $\nu_i$  étant monochromatique, sa longueur de cohérence temporelle  $\ell_c = +\infty \geq |\delta(M)|$ .
- Deux ondes de fréquences  $\nu_i$  différentes ne sont pas synchrones entre elles. Sur l'écran, l'intensité est donc la somme des intensités associées à chacune des fréquences  $\nu_i$ .

**Remarque :** Sur les bords de l'écran, nous verrons (chapitre OO3) que les maxima d'intensité lumineuse pour certaines fréquences  $\nu_i$  coïncident avec des minima d'intensité lumineuses pour d'autres fréquences. On ne distinguera donc pas de figure d'interférences sur les bords de l'écran. Les deux modélisations d'émission d'une source à spectre large sont donc compatibles.

Cette vision de décomposition d'une source à spectre large sera celle couramment utilisée en TD.

## **II Analyse de la figure d'interférences**

Dans toute cette partie, on suppose que des interférences sont visibles, i.e. que les deux ondes se superposant sont cohérentes entre elles.

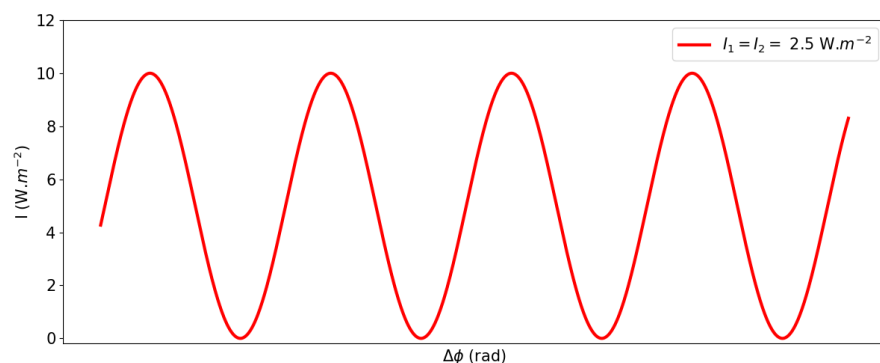
### **II.1 Champ d'interférences**

On appelle champ d'interférences la zone de l'espace où les deux ondes cohérentes se superposent.

Expérimentalement, cette zone de superposition est forcément limitée (l'intensité lumineuse ne peut pas être non nulle partout). Il ne peut pas y avoir d'interférences en dehors du champ d'interférences.

### **II.2 Franges d'interférences et ordre d'interférences**

Représentons l'intensité  $I(M)$  donnée par la formule de Fresnel en fonction du déphasage entre les deux ondes au point  $M$  :  $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$ . On se place pour le moment dans le cas où  $I_1 = I_2$ , la formule de Fresnel est donc :  $I(M) = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi(M)))$ .



- ★ Placer les  $\Delta\varphi$  pertinents (en mettre des négatifs) et placer le max et min en intensité. Plus tard : numéroter les ordres d'interférences entiers.

On observe des maxima et des minima de l'intensité lumineuse selon la valeur du déphasage entre les deux ondes.

- ★ On appelle franges brillantes, l'ensemble des points sur l'écran d'observation tels que  $I(M)$  est maximal. On parle alors d'interférences constructives. Ceci revient à un déphasage  $\Delta\varphi(M) = 2p\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  : les deux ondes sont en phase au point  $M$ . On appelle franges sombres, l'ensemble des points sur l'écran d'observation tels que  $I(M)$  est minimal (pas forcément nul). On parle alors d'interférences destructives. Ceci revient à un déphasage  $\Delta\varphi(M) = 2\pi(p + \frac{1}{2})$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  : les deux ondes sont en opposition de phase au point  $M$ .

On définit alors un outil pratique pour analyser la figure d'interférences.

**Définition :** Ordre d'interférences

On définit l'ordre d'interférence  $p(M)$  au point  $M$  comme le rapport du déphasage entre les deux ondes interférant en  $M$  et  $2\pi$  :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$$

- ★ Sans dimension

Or, le déphasage est relié à la différence de chemins optiques  $\delta(M)$  :  $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$ . Donc :

#### Détermination et utilisation de l'ordre d'interférences

L'ordre d'interférences  $p(M)$  au point  $M$  est relié à la différence de chemins optiques  $\delta(M)$  :

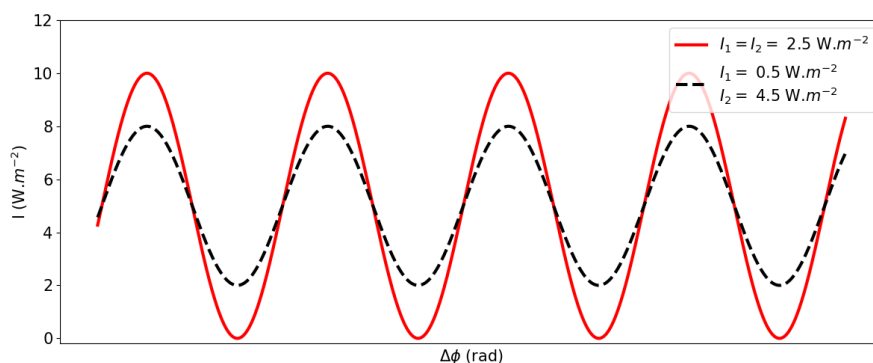
$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$$

- Si  $p(M)$  est un entier relatif, alors les interférences sont constructives en  $M$  et on y observe une frange brillante.  $\delta(M)$  est alors un multiple entier de  $\lambda_0$ .
- Si  $p(M)$  est un demi-entier relatif, alors les interférences sont destructives en  $M$  et on y observe une frange sombre.  $\delta(M)$  est alors un multiple demi-entier de  $\lambda_0$ .

On utilisera l'ordre d'interférences pour justifier la présence d'une frange brillante et pour numéroter ces franges brillantes sur l'écran.

## II.3 Contraste (= visibilité) de la figure d'interférences

Représentons à nouveau l'intensité lumineuse  $I(M)$  donnée par la formule de Fresnel en fonction du déphasage entre les deux ondes au point  $M$ , mais dans le cas où  $I_1 \neq I_2$ .



Placer sur la courbe en pointillés le max  $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$  et le min  $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ .

- ★ On observe toujours des franges brillantes et des franges sombres, pour les mêmes valeurs de l'ordre d'interférences  $p(M)$ , mais l'écart entre l'intensité des franges brillantes et l'intensité des franges sombres a diminué. Expérimentalement, on aura plus de difficulté à repérer les franges brillantes/sombres. On dit que le contraste (= la visibilité) de la figure d'interférences a diminué.

### Contraste de la figure d'interférences

On définit le contraste (= la visibilité) de la figure d'interférences par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

- ★ Sans dimension, et  $0 \leq \mathcal{C} \leq 1$

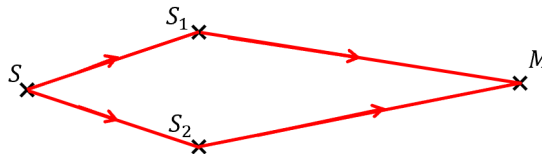
Plus le contraste  $\mathcal{C}$  est élevé, plus il est aisé de repérer expérimentalement les franges brillantes et les franges sombres.

Dans le cas de l'interférence de deux ondes cohérentes, d'après la formule de Fresnel, on remarque que le contraste vaut  $\mathcal{C} = 1$  et est donc maximal quand  $I_1 = I_2$ .

- ★ On retiendra qu'un bon contraste est associé à l'interférence d'ondes d'intensités voisines.

## II.4 Forme géométrique des franges d'interférences

On peut trouver l'équation mathématique des franges en imposant  $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \text{cste} \iff \delta(M) = \text{cste}$ . On a :  $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ .

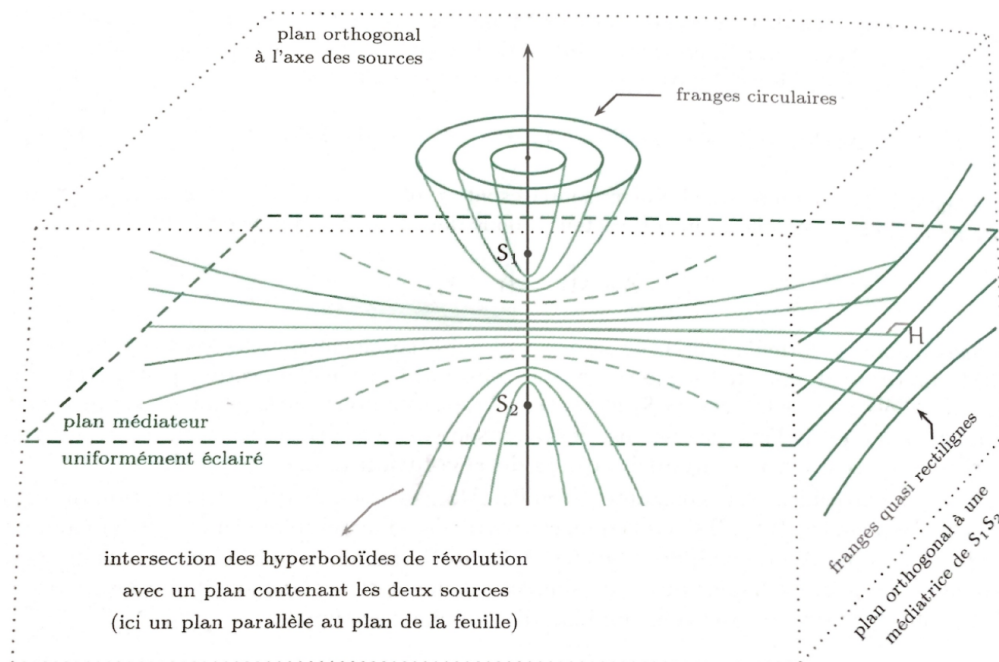


Expérimentalement, dans un système interférentiel, le point source primaire  $S$  et les points sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  sont fixes, quelque que soit le point  $M$  observé. Donc,  $(SS_2) - (SS_1) = \text{cste}$ . Ainsi, l'équation des franges vérifie  $(S_2M) - (S_1M) = \text{cste}$ .

Supposons que les points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $M$  soient dans un milieu homogène d'indice optique  $n$ . Comme  $S_1$  et  $M$  sont sur le même rayon lumineux, on a  $(S_1M) = n\overline{S_1M} = nS_1M$ . De même,  $(S_2M) = nS_2M$ . Ainsi les franges sont l'ensemble des points  $M$  vérifiant :

$$S_2M - S_1M = \text{cste}$$

Les mathématiciens ont appelé les surfaces obtenues des hyperboloïdes de foyers  $S_1$  et  $S_2$  et d'axe de révolution  $(S_1S_2)$ .



Si on place un écran parallèle à la direction  $(S_1S_2)$  (cf. à droite du schéma), on observe des franges sous forme de branches d'hyperboles sur l'écran. Mais, en pratique, comme le champ d'interférences est limité, les franges apparaissent comme rectilignes.

Si on place un écran orthogonal à la direction  $(S_1S_2)$  (cf. en haut du schéma), on observe des franges sous forme de cercles concentriques.

### III Autre démonstration de la formule de Fresnel en supposant que les deux ondes sont cohérentes entre elles

#### III.1 Préambule : utiliser la notation complexe pour calculer l'intensité lumineuse

Si la vibration lumineuse  $s(M,t)$  est harmonique, alors on peut utiliser le raccourci de calcul en notation complexe :

$$I(M) = K \langle s^2(M,t) \rangle = \frac{K}{2} \text{Re}(\underline{s} \times \underline{s}^*) = \frac{K}{2} |\underline{s}|^2$$

Si deux vibrations lumineuses sont harmoniques, **synchrones** (pulsation  $\omega$ ) et **cohérentes entre elles**, alors leur superposition  $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$  est aussi une vibration lumineuse harmonique de pulsation  $\omega$ . (Se poser pour justifier la nécessité de synchrones (deux fonctions harmoniques de même période, donc la somme est harmonique) et cohérentes (il ne faudrait pas avoir des sauts de phase aléatoires indépendants pour les deux vibrations).) Donc, la formule précédente s'applique à cette superposition :

$$I(M) = \frac{K}{2} |\underline{s}_1(M,t) + \underline{s}_2(M,t)|^2$$

#### III.2 Démonstration de la formule de Fresnel avec la notation complexe

Nous allons retrouver plus rapidement la formule de Fresnel en supposant que les deux vibrations lumineuses harmoniques se superposant sont synchrones et cohérentes entre elles.

**Exercice :** En écrivant  $s_1(M,t)$  et  $s_2(M,t)$  en notation complexe, déterminer la formule de Fresnel.

On pose :  $\underline{s}_1(M,t) = A_{10} e^{j(\omega t - \varphi_1(M))}$  et idem pour  $s_2$ . Par principe de superposition,  $\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$  (c'est pour cela que l'on parle d'additivité des amplitudes complexes).  
Donc :

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{K}{2} |\underline{s}_1 + \underline{s}_2|^2 \\ &= \frac{K}{2} (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) \\ \star &= \frac{K}{2} (|\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + 2\text{Re}(\underline{s}_1 \underline{s}_2^*)) \\ &= I_1 + I_2 + K A_{10} A_{20} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \end{aligned}$$

Enfin, deux ondes cohérentes entre elles ont été émises par le même point source durant le même train d'onde

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((SS_2M) - (SS_1M))$$

### Vision graphique : représentation de Fresnel

Nous allons utiliser la représentation vectorielle de Fresnel des nombres complexes. Elle consiste à représenter les amplitudes complexes dans le plan complexe (sous forme de vecteurs).

Par exemple, pour la vibration lumineuse  $\underline{s}_1(M,t) = A_{10} e^{j(\omega t - \varphi_1(M))} = \underline{S}_1(M) e^{j\omega t}$  avec  $\underline{S}_1(M) = A_{10} e^{-j\varphi_1(M)}$ , la représentation de Fresnel est :

J'écris  $\vec{S}_1$ . On a en particulier :

$$\star \quad |\underline{s}_1| = |\underline{S}_1| = \|\vec{S}_1\|$$

Démonstration de la formule de Fresnel :

On pose les grandeurs complexes  $\underline{s}_1 = \underline{S}_1 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{S}_1 = A_{10} e^{-j\varphi_1(M)}$  et  $\underline{s}_2 = \underline{S}_2 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{S}_2 = A_{20} e^{-j\varphi_2(M)}$ .

Représentation de Fresnel.

On en déduit :

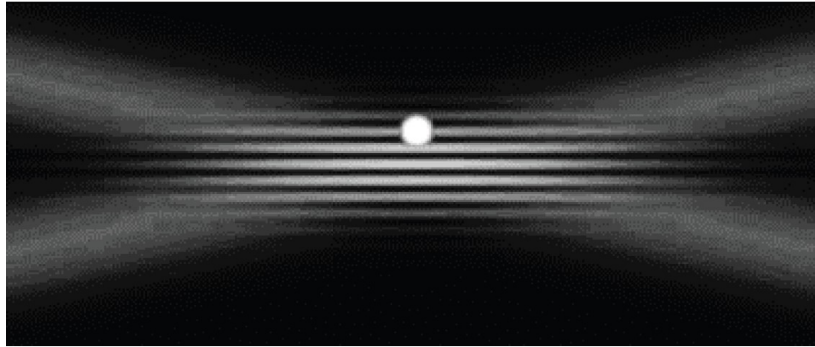
$$\begin{aligned} \star \quad |\underline{s}_1 + \underline{s}_2|^2 &= \|\vec{S}_1 + \vec{S}_2\|^2 \\ &= \dots \\ &= |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + 2A_{10}A_{20} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \\ \Rightarrow I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \end{aligned}$$

La représentation de Fresnel est particulièrement efficace lorsqu'on est amené à calculer la somme de différentes grandeurs complexes synchrones car on somme des vecteurs. Lien vers une construction numérique de la représentation de Fresnel : <https://femto-physique.fr/simulations/interference-deux-ondes.php>.

## Exercices

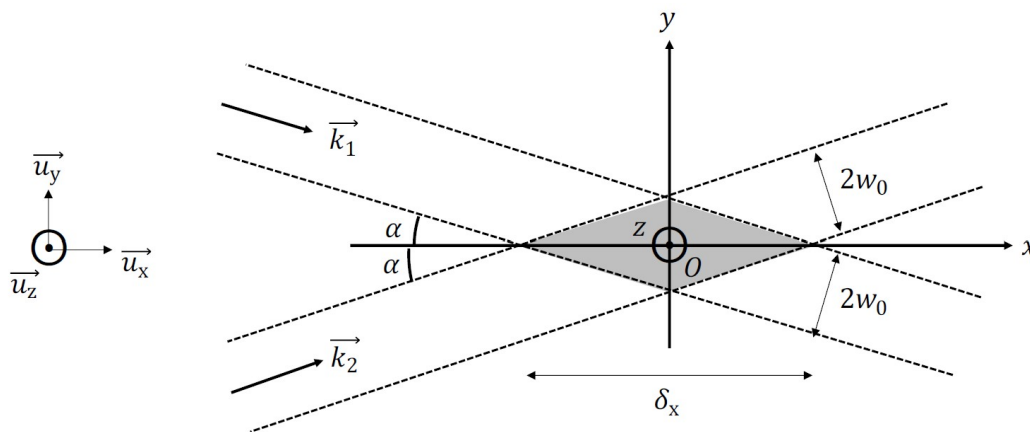
### Ex. 1 (Ecrit CCINP PC 2022) Véllocimétrie laser à franges

Bien souvent, la mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide nécessite de placer l'appareil de mesure dans l'écoulement, ce qui est susceptible de perturber ce dernier. Cet inconvénient a conduit à développer des méthodes optiques ne nécessitant pas d'introduire de capteur. Elles sont actuellement utilisées dans le domaine de la recherche. On s'intéresse ici à l'une de ces méthodes : la vélocimétrie laser à franges.



**Figure 8** - Franges d'interférences créées par les faisceaux laser. Une particule suivant le mouvement du fluide passe à travers les franges (source : ONERA)

Le principe consiste à croiser deux faisceaux issus d'une même source laser dans une zone de l'écoulement afin de créer des franges d'interférences lumineuses. On introduit dans le fluide des particules d'ensemencement (gouttelettes d'huile, microbilles d'aluminium ou de polystyrène...) qui suivent l'écoulement du fluide. Lorsqu'une de ces particules traverse les franges d'interférences, elle diffuse la lumière du laser. L'intensité diffusée est proportionnelle à l'intensité lumineuse du laser. Ainsi, en mesurant l'intensité de la lumière diffusée par la particule au cours du temps, on peut accéder à la vitesse à laquelle celle-ci traverse les franges, ce qui permet de déduire la vitesse du fluide.



**Figure 9** - Croisement des faisceaux laser : la zone d'interférences est représentée en gris

La configuration d'étude de la vélocimétrie laser à franges est représentée à la **figure 9**. Les deux faisceaux laser issus d'une même source de fréquence  $f_L$  et de pulsation  $\omega_L = 2\pi f_L$  se croisent dans un écoulement d'air dont on veut mesurer la vitesse. Le centre  $O$  de la figure d'interférences est l'origine d'un repère  $(Oxyz)$ , tel que les directions des deux faisceaux sont inclinées d'un angle  $\alpha = 6,0^\circ$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . La longueur d'onde du laser dans l'air est assimilable à celle dans le vide  $\lambda_0 = 514,5$  nm, les vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  des deux faisceaux ont des normes égales, telles que  $\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . Les champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  associés aux deux faisceaux, de même amplitude  $E_0$ , ont pour expression, en un point quelconque  $M(x, y)$  appartenant à l'un ou l'autre des faisceaux:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M, t) = E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) \vec{u}_z \\ \vec{E}_2(M, t) = E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}) \vec{u}_z \end{cases}$$

1. Les ondes laser sont-elles longitudinales ou transversales ? Quel est l'état de polarisation de ces ondes ? Justifier brièvement.
2. L'éclairement  $\mathcal{E}$  est défini comme la moyenne temporelle du carré du champ électrique. Montrer que dans la zone d'interférences:

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos\left(\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{OM}\right) \right)$$

avec  $\mathcal{E}_0 = \frac{E_0^2}{2}$

3. Montrer que les franges brillantes sont des droites d'équations  $y_p = \frac{p\lambda_0}{2 \sin \alpha}$ , avec  $p$  un entier relatif. L'interfrange est la distance entre deux franges brillantes rectilignes successives. Déterminer l'expression de l'interfrange  $\Delta y$  et faire l'application numérique.
4. On suppose qu'une particule en mouvement avec le fluide passe à travers la zone d'interférences avec une vitesse  $v_y$  selon  $\vec{u}_y$ . On mesure l'intensité lumineuse diffusée par la particule au cours du temps et on obtient un signal de fréquence  $f_d = 2,45\text{MHz}$ . Déterminer la valeur numérique de  $v_y$ .

### Correction de l'exercice 1

**Remarque :** Cet exercice fait partie des rares exemples de prépa qui sont plus simples à traiter avec une description par le champ électrique plutôt que par la vibration lumineuse (car les sources secondaires sont considérées à l'infini et le théorème de Malus n'est pas pratique à utiliser).

1.  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  appartiennent au plan  $(Oxy)$ . Donc,  $\vec{E}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$  et de même  $\vec{E}_2 \cdot \vec{k}_2 = 0$  : les ondes sont transverses (ce qui n'est pas surprenant car on assimile l'air à du vide).  
Les champs électriques ne sont portés que par le vecteur  $\vec{u}_z$  : les ondes sont polarisées rectilignement selon  $\vec{u}_z$ .
2. Par principe de superposition, le champ électrique total s'écrit  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\langle \|\vec{E}\|^2 \right\rangle \\ &= \left\langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \|\vec{E}_1\|^2 \right\rangle + \left\langle \|\vec{E}_2\|^2 \right\rangle + 2 \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \\ &= \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} + 2E_0^2 \left\langle \frac{1}{2} \left( \cos(2\omega_L t - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) \right) \right\rangle \\ &= 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos\left(\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{OM}\right) \right) \end{aligned}$$

**Remarque :** On peut aussi introduire la notation complexe des champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ , puis calculer l'éclairement via le raccourci de calcul en complexes :  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2$ .

**Remarque :** Il n'y pas besoin ici de s'attarder sur la justification de la cohérence des deux ondes : ceci est caché dans l'écriture des champs proposés (pas de déphasage aléatoire entre les deux champs).

3. Vu qu'on a déterminé l'expression de l'éclairement, on cherche les points  $M$  tels que  $\mathcal{E}$  soit maximal. On veut donc que  $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} = 2p\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ .  
Calculons  $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$ . On a :

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\cos(\alpha)\vec{u}_x - \sin(\alpha)\vec{u}_y) \\ \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y) \end{cases} \Rightarrow \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \frac{4\pi}{\lambda_0} \sin(\alpha)\vec{u}_y$$

Ainsi,

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} = \frac{4\pi}{\lambda_0} \sin(\alpha)y$$

La condition d'obtention d'une frange brillante se ré-écrit donc :

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} \sin(\alpha) y_p = 2p\pi \Rightarrow y_p = \frac{p\lambda_0}{2 \sin(\alpha)}$$

Il s'agit bien de franges rectilignes.

L'interfrange est donc :

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\alpha)}$$

A.N. :  $i = 2.5 \mu\text{m}$

4. L'intensité diffusée passe par un maximum à chaque fois que la particule passe sur une frange brillante. Ainsi, la période  $T_d = \frac{1}{f_d}$  du signal diffusé est égal au temps mis par la particule pour passer d'une frange brillante à la frange brillante la plus proche. Ainsi :

$$T_d = \frac{\Delta y}{v_y} \Rightarrow v_y = \Delta y \times f_d$$

A.N. :  $v_y = 6.0 \text{ m s}^{-1}$