

Interféromètre à division du front d'onde : trous et fentes d'Young

Ex. 1 Déplacement d'un système de franges

Une source S monochromatique éclaire deux fentes fines F_1 et F_2 parallèles distantes de $a = 3$ mm situées à une distance $d = 50$ cm de S .

La source est située sur la médiatrice de F_1 et F_2 et on compte 6 franges brillantes de chaque côté de la frange centrale située en O , occupant dans leur ensemble une longueur $L = 7.2$ mm, sur un écran situé à une distance $D = 3$ m des deux fentes. On définit un repère cartésien de centre O , de sorte que (Oz) coïncide avec l'axe optique.

1. Faire une figure représentant le système. Etablir la différence de chemins optiques entre deux rayons venant interférer en un point M de l'écran de coordonnées $(x, y, 0)$.
Décrire précisément le système de franges observable sur l'écran. Le système de franges est-il observable uniquement pour $D = 3$ m ? Qualifie-t-on alors les interférences de localisées ou de délocalisées ?
2. Calculer la longueur d'onde λ de la radiation émise par S .
3. Avec quelle incertitude-type connaît-on λ sachant que l'on a mesuré L au 1/10 mm, a au 1/10 mm et D à 1 cm près ?
4. On déplace S de 2,5 mm vers le haut de la figure. Dans quel sens se déplace la frange centrale ? Déterminer la distance de déplacement de la frange centrale.
5. On ramène la frange centrale dans sa position initiale O en plaçant devant une des 2 fentes une lame mince à faces parallèles (i.e. un morceau de verre taillé de manière parallélépipédique) d'indice 1,5. Cette lame est placée orthogonalement à l'axe optique. Où doit-on mettre la lame à faces parallèles ? Quelle épaisseur convient-il de lui donner ?

Ex. 2 Miroir de Lloyd

Un miroir plan, de largeur $L = 20$ cm, est placé perpendiculairement à un écran. Celui-ci est en contact avec le bord O du miroir. On éclaire le miroir par une source lumineuse S ponctuelle, située à faible distance $y = 1.5$ mm du plan du miroir et à une distance $D = 70$ cm de l'écran. On nomme $x = OM$.



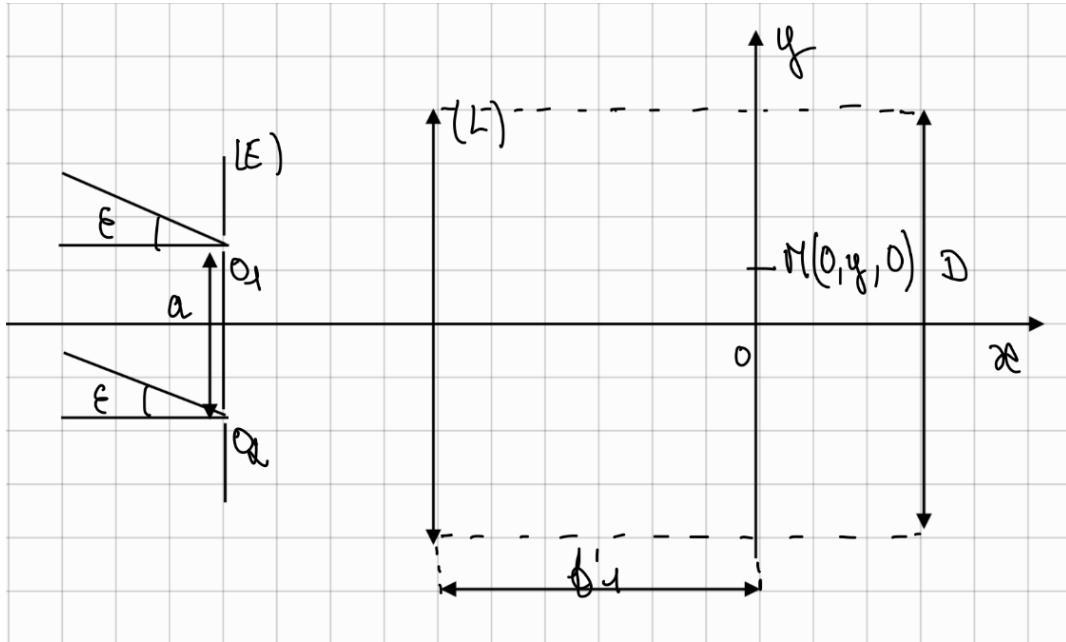
1. Représenter les rayons lumineux associés aux ondes susceptibles d'interférer au point M . Montrer alors que, du point de vue de la différence de chemins optiques, tout se passe comme si l'une des ondes était issue de S et l'autre était issue du symétrique S' de S par rapport au plan du miroir.
2. La source émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0.6$ µm. Ecrire la loi $I(x)$ donnant l'intensité vibratoire sur l'écran en un point M du champ d'interférence. On précise que lors de la réflexion d'une onde sur un miroir métallique, l'onde réfléchie est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.
3. Préciser la forme des franges observées et donner l'expression de l'interfrange. La frange au point O est-elle brillante ou sombre ?
4. (a) A quelle distance de O se trouve la troisième frange brillante ?
(b) Quel est le nombre de franges brillantes visibles sur l'écran ?
5. La source émet désormais de la lumière blanche dont les limites sont $\lambda_b = 0.4$ µm et $\lambda_r = 0.75$ µm. Décrire ce qu'on observe sur l'écran. On dispose un spectroscope dans le plan d'observation, à la distance $x = 0.5$ mm du centre du système de franges. Décrire l'aspect du spectre observé.
6. Calculer le nombre de cannelures et les longueurs d'onde des radiations manquantes dans le spectre.

Ex. 3 Résolution angulaire d'un système d'étoiles doubles

Pour mesurer l'angle ε séparant deux étoiles proches S_1 et S_2 vues depuis la Terre, on utilise la méthode de Fizeau décrite ci-dessous.

Deux fentes infiniment fines O_1 et O_2 , distantes de a , identiques et percées dans un écran (E) opaque, sont placées devant une lentille convergente (L) de focale f'_1 et de diamètre D . L'observation est faite dans le plan focal image de (L).

On considère, pour simplifier, que S_1 est sur l'axe optique et on note $\varepsilon \ll 1$ l'écart angulaire entre les deux sources S_1 et S_2 distinctes. On note $\lambda = 550 \text{ nm}$ la longueur d'onde émise par les deux étoiles, en supposant que l'émission est monochromatique. On suppose également que les deux étoiles émettent une onde arrivant en O_1 et O_2 avec la même intensité lumineuse I_0 . On considère le dispositif dans l'air d'indice optique 1.



On rappelle qu'une minute d'arc équivaut à un angle de $(1/60)^\circ$ et qu'une seconde d'arc équivaut à un angle $(1/3600)^\circ$.

1. Représenter les rayons lumineux arrivant au point M .
2. Démontrer l'expression de l'intensité lumineuse au point M dans le cas où on n'observerait que l'étoile S_1 .
3. Déterminer l'intensité lumineuse au point M dans le cas où on n'observerait que l'étoile S_2 .
4. Montrer que l'intensité lumineuse due aux deux sources S_1 et S_2 observées simultanément peut se mettre sous la forme :

$$I(y) = K \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{ya}{f'_1} \quad \text{et} \quad \delta' = a\varepsilon$$

On exprimera la constante K .

5. Commenter le résultat précédent. On précisera l'expression du facteur de contraste, aussi appelé facteur de visibilité.
6. On étudie le système d'étoiles doubles Hercule. Afin de déterminer ε , on modifie l'écartement a entre les deux fentes afin d'annuler le contraste. En démarquant pour une valeur de a nulle et en augmentant progressivement a , on observe le premier brouillage des franges pour $a = 41 \text{ mm}$. Déterminer l'angle ε entre les deux étoiles du système. On donnera le résultat en secondes d'arc.
7. Retrouver rapidement la condition de 1er brouillage des franges portant sur a , ε et λ à l'aide du critère d'anti-coïncidence des systèmes de franges.

Ex. 4 Trous d'Young éclairés par une source avec un spectre étendu

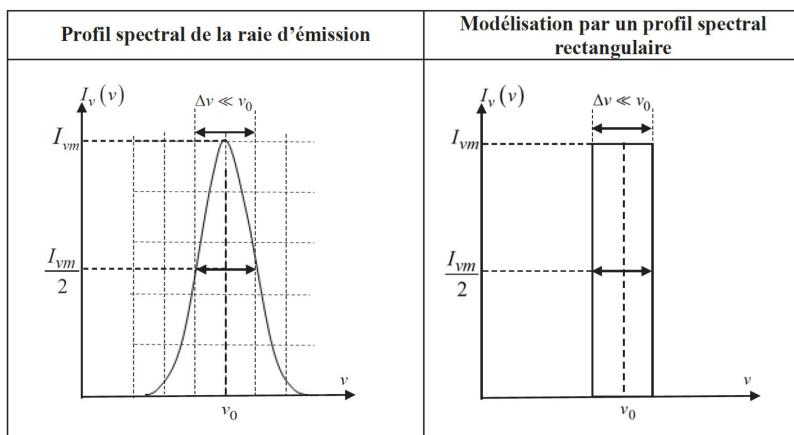
Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁴

On éclaire des trous d'Young, distants de a et situés le long d'un axe (Ox), avec une source primaire ponctuelle. La source S est à une grande distance d des trous d'Young, sur la médiatrice des trous d'Young. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'intensité lumineuse sur un écran situé à une grande distance D derrière les trous d'Young. L'air sera assimilé à du vide du point de vue optique.

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

1. Considérons, dans cette question uniquement, que la source est monochromatique de longueur d'onde λ .
 - (a) Donner l'ordre d'interférences sur l'écran.
 - (b) Décrire la forme des franges d'interférences et exprimer l'interfrange en fonction de a , D et λ .

On considère désormais le cas d'une source avec un spectre étendu. Appelons ν_0 la fréquence centrale et $\Delta\nu \ll \nu_0$ l'écart spectral. L'intensité spectrale de la source est représentée sur la figure ci-dessous.



Etude qualitative

2. Expliquer qualitativement pourquoi on pourrait observer un brouillage des franges sur l'écran.
3. Rappeler le critère semi-quantitatif de brouillage des franges. En déduire la valeur limite de la différence de chemins optiques $\delta(M)$ à partir de laquelle la figure d'interférences est brouillée. Qu'observe-t-on pour $\delta(M)$ supérieur à cette valeur limite ?

Calcul exact

Dans la suite, on souhaite vérifier quantitativement ce critère de brouillage, dans le cas d'une modélisation simplifiée. Pour ce faire, on suppose le profil spectral de la source comme rectangulaire entre $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$.

4. Soit $dI(M)$ l'intensité lumineuse au point M sur l'écran associée aux ondes émises entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$. On suppose que l'intensité lumineuse au niveau de la source correspondant à la plage de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ vaut $\frac{I_0 d\nu}{\Delta\nu}$. Exprimer $dI(M)$ en fonction notamment de $\delta(M)$ et de ν .
5. En intégrant sur tout le spectre de la source, montrer que l'intensité lumineuse totale est :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \Delta\nu \delta(M)}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi\nu \delta(M)}{c} \right) \right)$$

où la fonction sinus cardinal est définie comme $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Un formulaire donne le graphe de cette fonction.

6. Identifier les termes variant rapidement et lentement avec la différence de chemins optiques et leur attribuer un sens physique.
7. En déduire le graphe de $I(\delta)$.

⁴

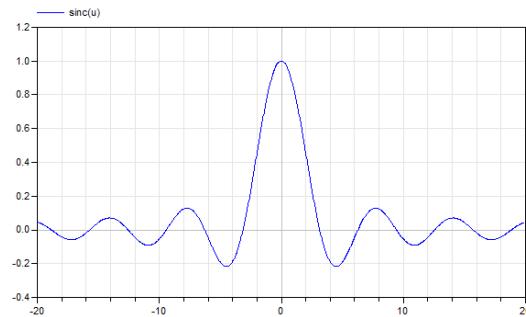
$\operatorname{ap} \left(\left(\left(\frac{c}{\Delta\nu} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{c}{\Delta\nu} \right) + 1 \right) \frac{c \nabla}{2I_0} \right) = \frac{c \nabla}{2I_0} \cdot \operatorname{ap} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{c}{\Delta\nu} \right) + 1 \right)$

8. Retrouve-t-on la condition de brouillage établie à la question 3 ? Proposer une condition numérique portant sur $\delta(M)$ pour pouvoir considérer que le contraste reste correct sur la figure d'interférences.

Formulaire :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

On définit la fonction "sinus cardinal" sur \mathbb{R} par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On donne le graphe de cette fonction ci-contre.



Ex. 5 (Inspiré de Ecrit Centrale MPI 2023) Taille d'un pixel de l'écran d'un smartphone

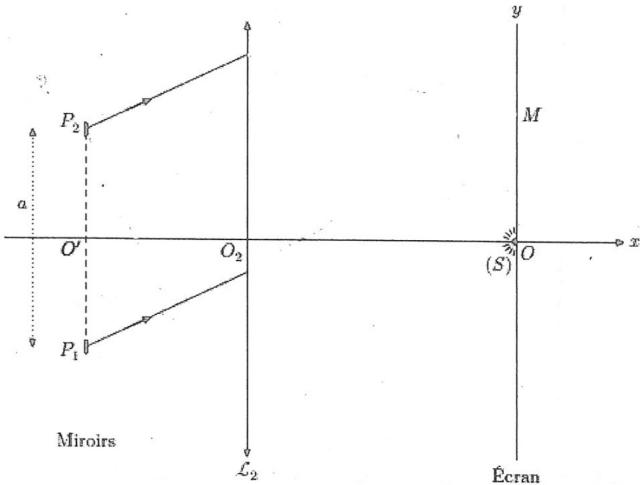
On souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté ci-dessus. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle S qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O .

Cette source S éclaire vers la gauche, les rayons qui en sont issus traversent la lentille \mathcal{L}_2 et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe (Oy).

Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille \mathcal{L}_2 et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan Oyz formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $|y| \ll f'_2$ et $|z| \ll f'_2$.



Aide : Les rayons lumineux cheminent donc d'abord de la droite vers la gauche entre la source et les pixels, puis de la gauche vers la droite entre les pixels et l'écran. Ce montage est donc équivalent au montage classique des trous d'Young en configuration de Fraunhofer avec une "première" lentille \mathcal{L}_2 , puis une "seconde" lentille \mathcal{L}_2' .

1. A quelle distance de la lentille \mathcal{L}_2 doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de S ressortent parallèles entre eux après la lentille \mathcal{L}_2 ? Justifier alors que les rayons issus de P_1 et de P_2 et convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille \mathcal{L}_2 .
2. Recopier et compléter le trajet des deux rayons lumineux issus de S et interférant au point M placé sur l'écran. En le justifiant précisément, montrer tout d'abord que la différence de marche $\delta_{1/2}(M) = (SM)_1 - (SM)_2$ entre les deux ondes se ramène à $\delta_{1/2}(M) = (P_1 M) - (P_2 M)$, puis montrer qu'elle s'écrit $\delta_{1/2}(M) = \frac{ay}{f'_2}$.
3. En déduire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.
4. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y , la coordonnée du point M sur l'axe (Oy). On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un miroir seulement. Représenter graphiquement $I(y)$ et faire apparaître l'interfrange i .
5. Le point source S est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur

un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche $\delta_{1/2}(M)$ au point M en fonction de a , y , y_S et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source S induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

6. À l'aide d'un critère semi-quantitatif (à énoncer), basé sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale c_{max} au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement c_{max} dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45.5$ cm, $a = 80$ µm et une longueur d'onde $\lambda = 589$ nm. Conclure.

Montage avec un laser

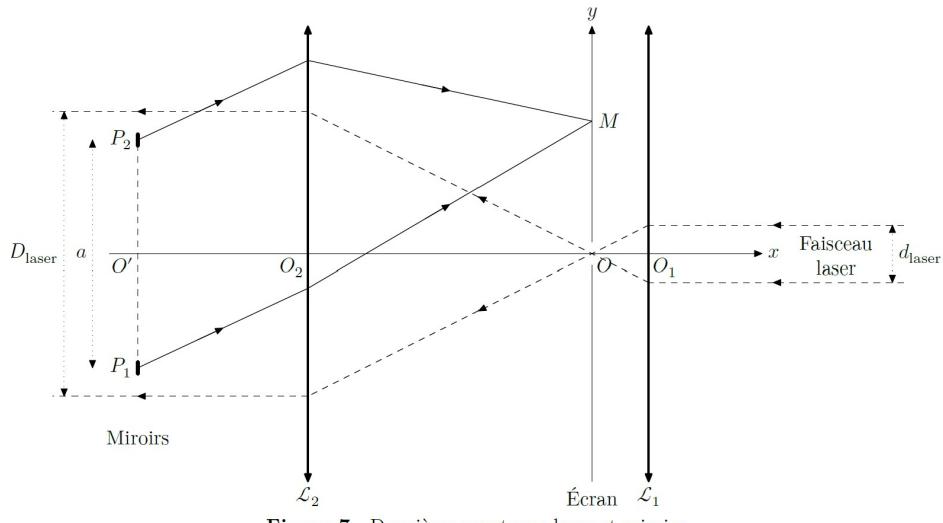


Figure 7 Deuxième montage : laser et miroirs

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en figure 7. De plus, on insère une lentille \mathcal{L}_1 de distance focale $f'_1 = 10.5$ cm entre le laser et l'écran.

7. On souhaite élargir le diamètre du faisceau laser : soit d_{laser} son diamètre avant traversée de la lentille \mathcal{L}_1 et D_{laser} son diamètre après traversée de la lentille \mathcal{L}_2 . Préciser comment doit être disposée la lentille \mathcal{L}_1 par rapport à \mathcal{L}_2 pour qu'à la sortie de \mathcal{L}_2 , on obtienne un faisceau cylindrique de diamètre D_{laser} comme indiqué sur la figure 7. Exprimer le rapport D_{laser}/d_{laser} en fonction des paramètres du système. Faire l'application numérique.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a (figure 8). Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

8. En utilisant les résultats de la question 5, exprimer sans calculs les différences de marches au point M , $\delta_{i/1}(M) = (SM)_i - (SM)_1$ avec $i = 2,3,4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a} \quad ; \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right)$$

où k et m sont deux nombres entiers.

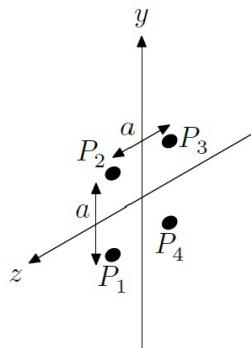


Figure 8 Disposition des 4 miroirs

On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs répartis périodiquement avec une période a selon y et selon z . Par un raisonnement similaire à celui effectué ci-avant, on montre qu'on observe

sur l'écran un réseau carré de maxima d'éclairement aux points de coordonnées (y_k, z_m) .

Détermination de la taille d'un pixel



Figure 9 Dernier montage : détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels. Le montage est représenté sur la figure 9 et est réalisé comme suit.

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille \mathcal{L}_1 , un écran troué en son centre, une lentille \mathcal{L}_2 et le téléphone.
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone.
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après.
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10.5 \text{ cm}$ et $f'_2 = 45.5 \text{ cm}$. Leur incertitude-type vaut $u(f') = 0.30 \text{ cm}$.

La figure 10 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda = 532 \text{ nm}$ avec son incertitude-type $u(\lambda) = 10 \text{ nm}$). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de 4.0 mm.

9. Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type.

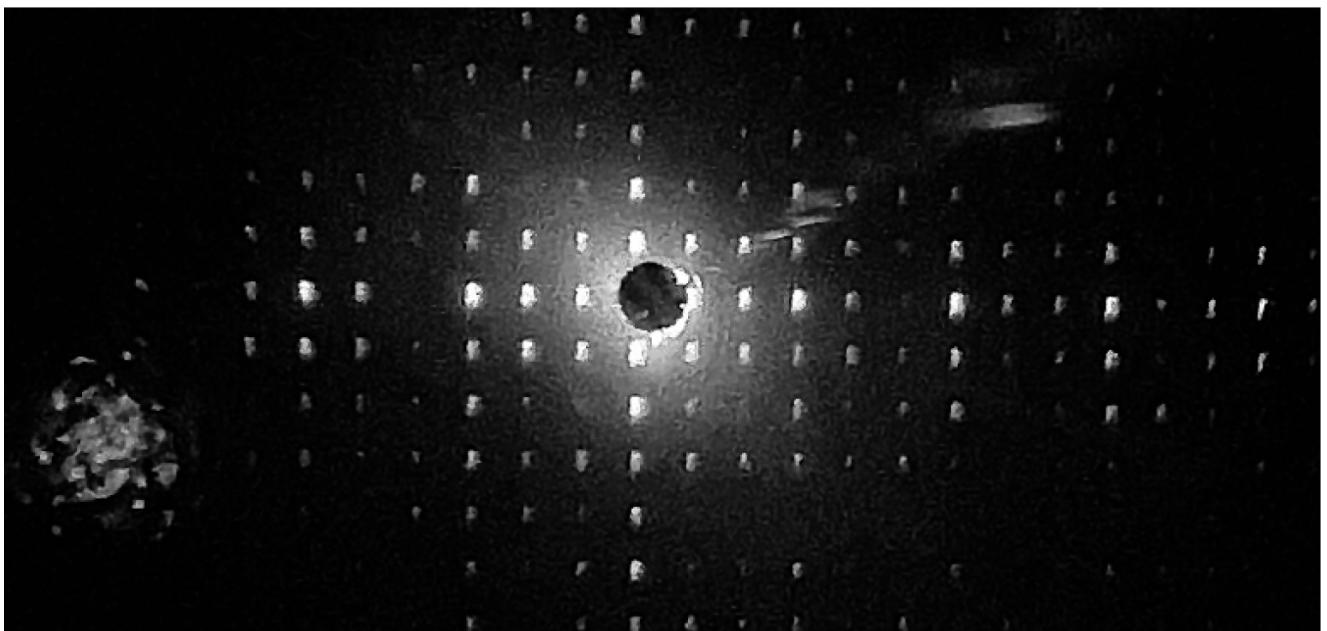


Figure 10 Image visible sur l'écran