

Interféromètre à division du front d'onde : trous et fentes d'Young

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Description de l'interféromètre des trous d'Young | 2 |
| II | Éclairage par une source ponctuelle monochromatique | 3 |
| II.1 | Différence de chemins optiques au point M dans le cas où la source est située sur la médiatrice des deux trous | 3 |
| II.2 | Intensité lumineuse et forme des franges observées | 4 |
| II.3 | Translation de la source ponctuelle primaire S | 6 |
| III | Du dispositif-modèle au dispositif réel | 7 |
| III.1 | Interféromètre des fentes d'Young éclairé par une fente source monochromatique | 7 |
| III.2 | Utilisation de lentilles : montage de Fraunhofer | 8 |
| IV | Éclairage par une source étendue spatialement monochromatique : notion de cohérence spatiale | 11 |
| IV.1 | Cas particulier : éclairage par deux sources distinctes monochromatiques | 11 |
| IV.2 | Cas général : source étendue spatialement monochromatique | 13 |
| V | Eclairage par une source ponctuelle polychromatique : notion de cohérence temporelle | 14 |
| V.1 | Cas particulier : éclairage par une source ponctuelle possédant un doublet spectral | 14 |
| V.2 | Cas général : source ponctuelle avec un spectre étendu | 17 |
| V.3 | Observation en lumière blanche | 19 |
| | Exercices | 21 |

Questions de cours

- Interféromètre des trous d'Young avec point source monochromatique sur ou hors de l'axe optique : démonstration de l'ordre d'interférences, conséquences (forme des franges, interfrange, effet de la translation du point source)
- Interféromètre des fentes d'Young : effet de la diffraction sur la figure d'interférences, intérêt expérimental par rapport aux trous d'Young, présentation du montage de Fraunhofer et de son intérêt expérimental
- Interféromètre des trous d'Young dans la configuration de Fraunhofer avec point source monochromatique sur ou hors de l'axe optique : présentation, démonstration de l'ordre d'interférences, conséquences (forme des franges, interfrange, effet de la translation du point source)
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source étendue monochromatique : description qualitative de l'effet de l'élargissement spatial de la source, critère semi-quantitatif de brouillage, application de ce critère au cas d'une source primaire carrée de côté h
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source ponctuelle polychromatique : description qualitative de l'effet de l'élargissement spectral de la source, critère semi-quantitatif de brouillage, application de ce critère au cas d'une source de largeur spectrale $\Delta\nu$
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source ponctuelle blanche : description qualitative, spectre cannelé, longueurs d'onde des cannelures en un point M fixé

Prise de notes : Les deux prochains chapitres d'optique sont consacrés à deux grands exemples d'interféromètres (= systèmes créant des interférences) : trous d'Young, puis interféromètre de Michelson.

Les interféromètres permettent des mesures très fines, irréalisables avec d'autres instruments de mesure, car on passe d'une frange brillante à une autre dès que la différence de chemins optiques $\delta(M)$ varie de $\lambda_0 \sim 0.5 \mu\text{m}$: on est donc sensible à des variations infimes de longueurs ! Citons alors quelques mesures précises réalisables avec un interféromètre :



- longueur d'une lame introduite, ou de défaut de surface
- taille d'une source lumineuse / écart angulaire entre deux étoiles non distinguables avec un télescope
- indice optique d'un milieu
- longueur d'onde de la source / écart entre deux longueurs d'onde très proches (moins de 1 nm)

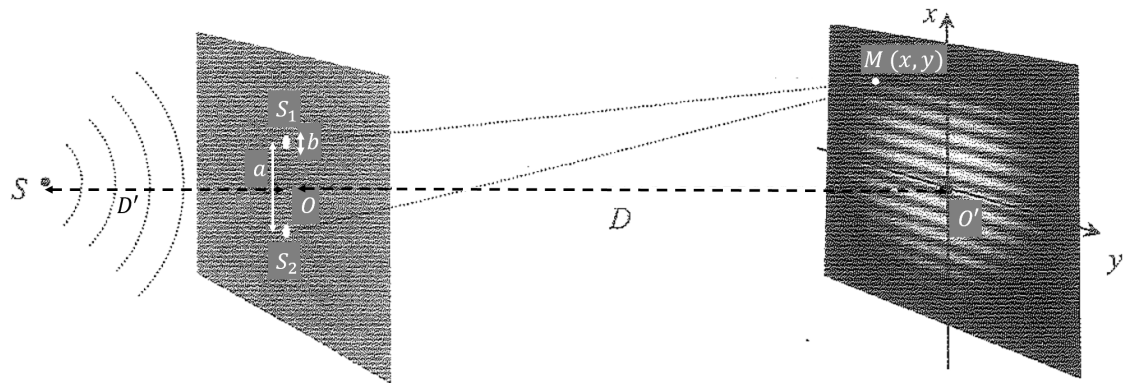
Du point de vue pragmatique, l'idée est d'appliquer les concepts des chapitres OO1 et OO2 au cas le plus simple pour obtenir des interférences : les trous d'Young.

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Distinguer les deux méthodes de calcul de la différence de chemins optiques $\delta(M)$ suivant si des lentilles sont présentes ou non.
2. Déterminer l'interfrange connaissant $\delta(M)$.
3. Distinguer les deux types possibles de brouillage des franges : élargissement spatial de la source (problème de cohérence spatiale) ou élargissement spectral de la source (problème de cohérence temporelle).
4. Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges.

I Description de l'interféromètre des trous d'Young

On choisit un système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Une source primaire S , que l'on supposera pour l'instant ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide, éclaire un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 . On appelle S_1 et S_2 les sources secondaires. Ces deux sources secondaires émettent des ondes qui se superposent en un point M de coordonnées $M(x, y, z = D)$.

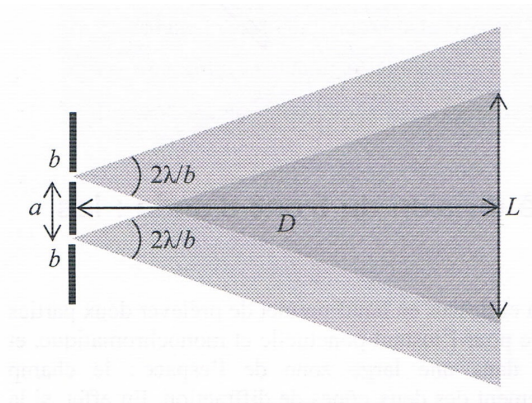
On étudie l'interféromètre dans les conditions de Gauss, de sorte à pouvoir utiliser l'approximation scalaire de l'optique ondulatoire. On choisit de placer la source à grande distance finie et d'observer à grande distance finie des trous d'Young. On supposera donc que $D' \gg a$, $D \gg a$, $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$.

Pourquoi observe-t-on des interférences en M ?

Cause 1 : La source primaire S étant ponctuelle et monochromatique (implique que $\ell_c \rightarrow +\infty$), les deux ondes sont synchrones et cohérentes entre elles. Elles interfèrent donc aux points M où elles se superposent. La zone de superposition des deux ondes est appelé le champ d'interférences.

★

Cause 2 : En choisissant le diamètre b des trous d'Young suffisamment petit ($b < 1000\lambda_0 \sim 0.5\text{ mm}$), les trous d'Young diffractent l'onde primaire. Cette diffraction est indispensable pour qu'il existe une zone de recouvrement des deux faisceaux lumineux, et donc pour pouvoir observer des interférences. Dans le cas contraire, le champ d'interférences serait nul.



Un trou de diamètre b va essentiellement diffracter dans un cône de demi-angle au sommet $\frac{\lambda_0}{b}$ autour de la direction de l'optique géométrique. On en déduit que sur l'écran, la zone d'interférences a pour largeur $L \simeq \frac{2\lambda_0 D}{b}$. Ainsi, la largeur b des trous d'Young a un effet sur la largeur totale de la zone d'interférences.

Notons que, à condition de respecter les conditions de Gauss, on peut placer l'écran n'importe où derrière les trous d'Young et observer des interférences. On dit que **les interférences sont non localisées**.

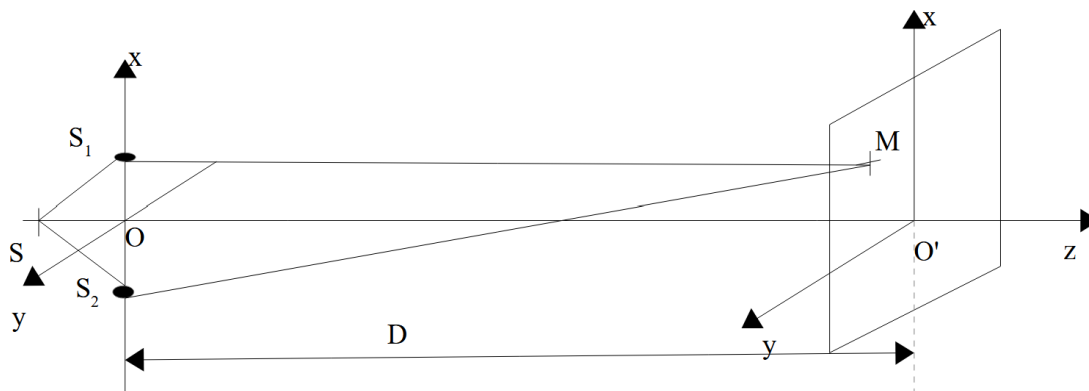
On appelle ce type d'interféromètre **un interféromètre à division du front d'onde**, car seules deux portions distinctes de la surface d'onde issue de S et arrivant aux trous d'Young serviront à créer les interférences en M .

Remarque : En se rappelant le raisonnement sur les hyperboloïdes, qui représentent les franges d'interférences, on peut directement connaître la forme des franges sur l'écran : on attend des franges rectilignes. Nous allons le vérifier dans la suite.

II Éclairage par une source ponctuelle monochromatique

II.1 Différence de chemins optiques au point M dans le cas où la source est située sur la médiatrice des deux trous

L'étude sera faite dans un milieu diélectrique linéaire homogène, isotrope (DLHI) et transparent d'indice optique n . Les deux ondes sont cohérentes entre elles. La première étape du calcul de l'intensité lumineuse sur l'écran est alors de déterminer la différence de chemins optiques $\delta(M)$.



Les coordonnées des points M , S_1 et S_2 sont : $M(x, y, D)$, $S_1(\frac{a}{2}, 0, 0)$ et $S_2(-\frac{a}{2}, 0, 0)$.

On choisit de poser :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

Dans chaque chemin optique, les deux points considérés sont sur le même rayon lumineux :

$$\delta(M) = n(SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M)$$

Comme S est sur la médiatrice de $[S_1S_2]$, on a $SS_1 = SS_2$. Donc : $\delta(M) = n(S_2M - S_1M)$

★

Les coordonnées des points permettent de déterminer :

$$S_1M = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$$

Or, $D \gg a, |x|, |y|$. On réalise donc un développement limité :

$$\delta(M) = \dots = \frac{nax}{D}$$

On en déduit la différence des phases des ondes se superposant en M :

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D}$$

ainsi que l'ordre d'interférences en M :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 D}$$

II.2 Intensité lumineuse et forme des franges observées

On considère que les deux vibrations lumineuses ont la même amplitude, et donc la même intensité lumineuse I_0 .

Les deux ondes étant cohérentes entre elles, la formule de Fresnel donne :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nax}{D} \right) \right)$$

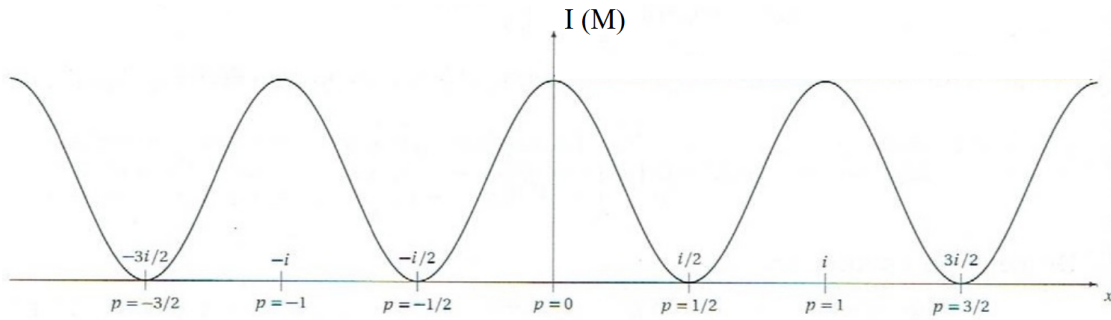
★

Forme des franges :

Les franges sont les points M vérifiant $I(M) = \text{cste}$. Les franges sont donc rectilignes, d'équation $x = \text{cste}$.

L'écart entre deux franges brillantes successives est appelé l'**interfrange** i .

Représentons l'intensité lumineuse $I(x)$ en fonction du point M de coordonnée x .



Détermination de l'expression de l'interfrange :

Il existe trois méthodes différentes pour déterminer l'interfrange i .

Méthode 1 : coordonnées des franges brillantes. Les franges brillantes sont situées aux points d'abscisses x_k tels que :

$$p(M) = \frac{na x_k}{\lambda_0 D} = k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{k \lambda_0 D}{na}$$

★

L'écart entre deux franges brillantes successives est $x_{k+1} - x_k = i = \frac{\lambda_0 D}{na}$.

Méthode 2 : variation de l'ordre d'interférences en fonction du point M . Lorsque le point M se déplace de $\Delta x = i$, alors l'ordre d'interférences varie de :

★

$$\Delta p(\text{position sur l'écran}) = \frac{na i}{\lambda_0 D} = 1 \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

Méthode 3 : identification de la période spatiale de l'intensité. On a déterminé que l'intensité lumineuse sur l'écran est $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi na x}{\lambda_0 D} \right) \right)$. On identifie directement la période spatiale du cosinus, car toute fonction cosinus peut s'écrire :

$$\cos \left(\frac{2\pi x}{\text{période}} \right)$$

★

Donc, ici, la période est l'interfrange i :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

Vocabulaire : On appelle frange centrale, la frange d'ordre d'interférences nul. Ici, on remarque qu'elle est située en $x = 0$.

Remarque : Les franges sombres sont situées aux points d'abscisses x_k tels que :

★

$$p(M) = \frac{na x_k}{\lambda_0 D} = k + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{k \lambda_0 D}{na} + \frac{\lambda_0 D}{2na}$$

L'écart entre deux franges sombres successives est $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{na} = i$, équivalent également à l'interfrange.

Evaluation du nombre de franges visibles sur l'écran :

On se place dans le cas de l'air : $n = 1$. Sur l'écran, la largeur L du champ d'interférences est associé à la diffraction par les trous d'Young : $L \simeq \frac{2\lambda_0 D}{b}$.

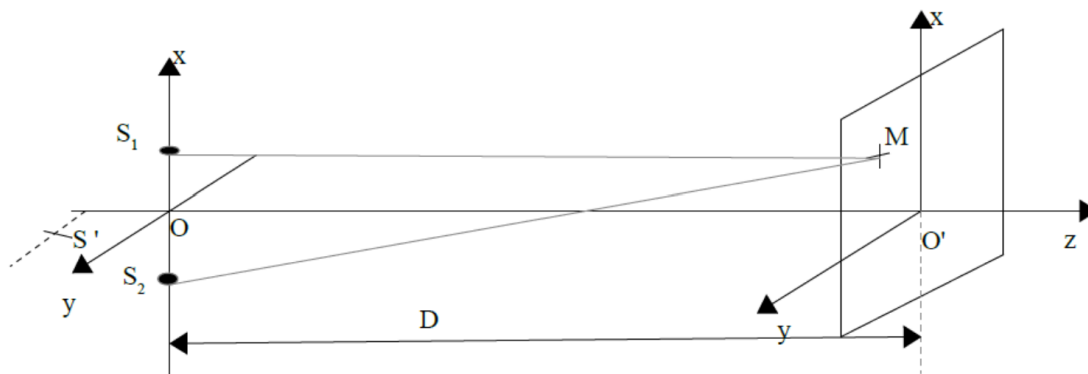
On estime le nombre N de franges brillantes visibles sur l'écran comme :

$$N = \frac{L}{i} = \frac{2\lambda_0 Da}{b\lambda_0 D} = \frac{2a}{b}$$

En prenant $a = 1 \text{ mm}$ et $b = 200 \mu\text{m}$, on estime $N = 10$. Seule une dizaine de franges brillantes seront visibles expérimentalement sur l'écran.

II.3 Translation de la source ponctuelle primaire S

a Translation de S selon y



On translate la source ponctuelle primaire selon \vec{e}_y . Appelons S' la nouvelle position de cette source primaire.

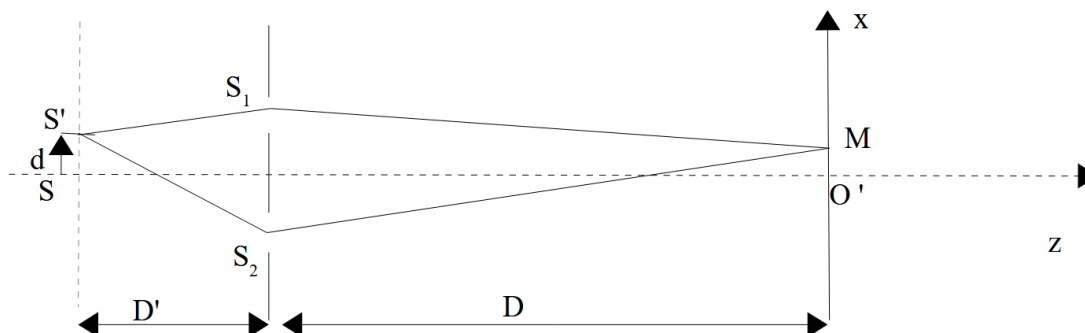
Géométriquement, on a toujours $(S'S_1) = (S'S_2)$. Donc, la différence de chemins optiques est toujours :

$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S_2M) - (S_1M) = \delta(M) = \frac{na x}{D}$$

La translation de la source primaire selon \vec{e}_y ne modifie pas la différence de chemins optiques, et ne modifie donc pas la figure d'interférences observée.

b Translation de S selon x

La différence de chemins optiques étant indépendante de y , on travaillera désormais avec des schémas plans du dispositif interférentiel.



On translate la source ponctuelle primaire selon \vec{e}_x . Appelons S' la nouvelle position de cette source primaire.

Cette fois-ci, $(S'S_2) \neq (S'S_1)$, ce qui va avoir un impact sur la figure d'interférences. La différence de chemins optiques s'écrit :

$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

Si $D' \gg d$ et $D' \gg a$, alors la différence de chemins optiques $(S'S_2) - (S'S_1)$ se calcule exactement de la même manière que la différence des chemins optiques $(S_2M) - (S_1M)$.
Donc :

★

$$\delta'(M) = \frac{nad}{D'} + \frac{nax}{D}$$

L'ordre d'interférences est :

$$p(M) = \frac{\delta'(M)}{\lambda_0} = \frac{nad}{\lambda_0 D'} + \frac{nax}{\lambda_0 D}$$

Déterminons par exemple les coordonnées des franges brillantes.

Les franges brillantes vérifient $p(M) = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ceci est vérifié pour

$$\frac{nad}{\lambda_0 D'} + \frac{nax_k}{\lambda_0 D} = k \iff x_k = k \frac{\lambda_0 D}{na} - \frac{dD}{D'}$$

★

L'interfrange est :

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

inchangé par rapport au cas de S sur la médiatrice de $[S_1S_2]$.

La frange centrale, i.e. d'ordre 0, se trouve en $x_0 = -\frac{dD}{D'}$: toutes les franges ont été translatées.

La translation verticale vers le haut de la source primaire a provoqué un déplacement en bloc vers la bas de la figure d'interférence, l'interfrange restant inchangé.

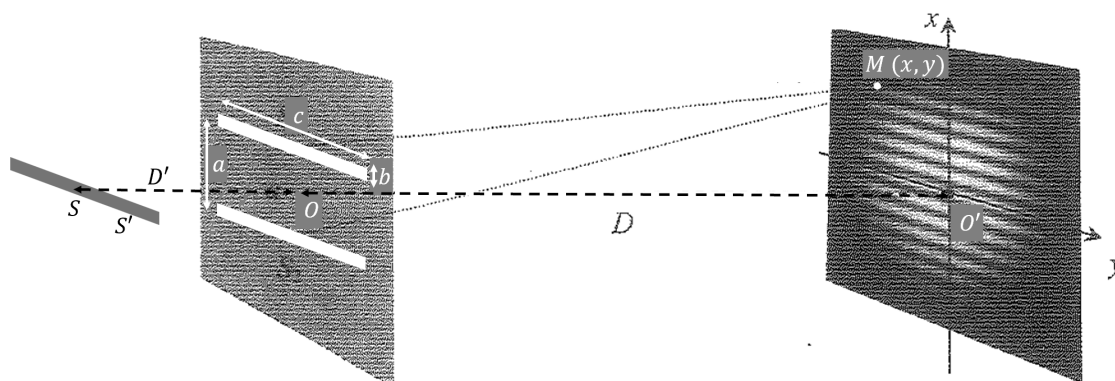
Remarque : Pour trouver le sens du décalage des franges, on peut faire une étude qualitative en s'intéressant à la frange d'ordre 0. L'ordre 0 correspond à l'égalité des chemins optiques des deux vibrations lumineuses, depuis la source primaire au point M .

- Si la source S est sur l'axe (Oz) , $(SS_2) = (SS_1)$: la différence de chemins optiques est nulle lorsque $(S_2M) = (S_1M)$, c'est à dire lorsque M est confondu avec O' .
- Si la source est translatée vers le haut à la position S' , $(S'S_2) > (S'S_1)$: le point M pour lequel l'ordre d'interférence est nul est donc tel que $(S_2M) < (S_1M)$. Le point M est donc situé sous le point O' ce qui implique une translation des franges vers le bas.
- Inversement, si la source est translatée vers le bas à la position S' , $(S'S_2) < (S'S_1)$: le point M pour lequel l'ordre d'interférence est nul est donc tel que $(S_2M) > (S_1M)$. Le point M est donc situé au-dessus du point O' ce qui implique une translation des franges vers le haut.

III Du dispositif-modèle au dispositif réel

III.1 Interféromètre des fentes d'Young éclairé par une fente source monochromatique

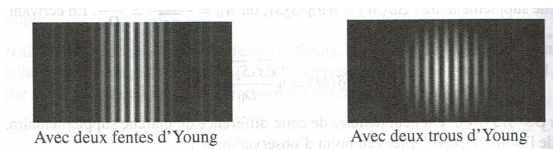
L'interféromètre des fentes d'Young se schématise comme suit :



En guise d'ordre de grandeur, les fentes d'Young utilisées en TP ont des tailles $a \sim 500 \mu\text{m}$, $b \sim 100 \mu\text{m}$ et $c \sim 2.5 \text{ cm}$.

Aspect visuel de la figure d'interférences :

Comparons les aspects visuels des figures d'interférences dans le cas de l'interféromètre des fentes d'Young et des trous d'Young, éclairés dans les deux cas par une fente source fine monochromatique de même longueur d'onde λ_0 . La fente source s'étend suivant l'axe (Sy).



- ★ Les deux figures d'interférences possèdent le même interfrange, et permettent donc toutes les deux d'analyser les mêmes caractéristiques de l'interféromètre et de la source lumineuse. En revanche, la figure obtenue avec les fentes d'Young est plus lumineuse et plus étendue que celle obtenue avec les trous d'Young. On privilégiera donc expérimentalement l'utilisation des fentes d'Young aux trous d'Young.

Dans la suite, nous cherchons à justifier rapidement la forme de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young, et en particulier à comprendre pourquoi l'interfrange est identique au cas de l'interféromètre des trous d'Young.

Effet de la diffraction :

- ★ Rappelons qu'il n'y a diffraction que si la taille de l'obstacle est inférieure à $1000\lambda \sim 500 \mu\text{m}$. Dans le cas des fentes d'Young, $b < 1000\lambda$ mais $c > 1000\lambda$: il y a donc diffraction selon la direction (Ox) mais pas selon la direction (Oy).

Ainsi, pour un point source S' fixé et un point M fixé sur l'écran, il n'y a que deux rayons lumineux allant de S' à M . La différence de chemins optiques des deux seuls rayons lumineux allant de S' à M est toujours $\delta = \frac{na x}{D}$: chaque point source S' de la fente source donne un système de franges rectilignes d'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$.

Effet de la fente source :

On a vu que la translation selon \vec{e}_y de la source primaire n'avait aucun effet sur la figure d'interférences observée. Ainsi, chaque point source S' de la fente crée exactement le même système de franges.

Or, deux points sources primaires S et S' différents donnent des ondes incohérentes entre elles : l'intensité observée sur l'écran est la somme des intensités créées par chaque point source primaire.

Ainsi, la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes d'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

Raisonnement théorique VS pratique expérimentale

Théoriquement, on raisonnera toujours sur l'interféromètre des trous d'Young pour mener les calculs. En revanche, pour améliorer la luminosité et l'extension des franges, on réalisera toujours les montages expérimentaux avec des fentes d'Young. Les résultats trouvés avec l'un des interféromètres sont directement applicables à l'autre interféromètre.

III.2 Utilisation de lentilles : montage de Fraunhofer

a Description du montage de Fraunhofer

On souhaite étudier l'interféromètre des fentes d'Young expérimentalement. Pour pouvoir utiliser les résultats théoriques de la partie II, il faut se placer dans les conditions de Gauss, et donc il faut pouvoir considérer que la source et l'écran sont situés à des distances des fentes d'Young bien

plus grandes que toutes les autres distances caractéristiques du problème.

En pratique, comme on ne peut pas placer la source et l'écran à l'infini, la solution est d'utiliser des lentilles convergentes.

On se ramène à une situation équivalente à une source primaire à l'infini en plaçant la source S dans le plan focal objet d'une lentille convergente. Du point de vue ondulatoire, cela revient à éclairer les fentes d'Young avec une onde plane.



Schéma avec S et θ .

On se ramène à une situation équivalente à un écran à l'infini en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente. Ainsi, deux rayons lumineux arrivant en un point M de l'écran seront issus de rayons lumineux parallèles entre eux avant la lentille.

Montage de Fraunhofer

Le montage de Fraunhofer consiste à placer la source primaire dans le plan focal objet d'une lentille convergente (\mathcal{L}_1), puis de placer le système des fentes d'Young et d'observer les interférences sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (\mathcal{L}_2).



Ne pas lire ce texte, mais faire une sorte de schéma synoptique bilan.

Ce montage permet simplement de se ramener expérimentalement à la situation théorique d'une source primaire à l'infini et d'un écran à l'infini.

Remarque : Autre avantage du montage de Fraunhofer : L'amplitude d'une onde diffractée dans la direction fixée par l'angle θ dépend de cet angle θ . Le montage de Fraunhofer permet de faire interférer entre elles des ondes diffractées dans la même direction θ et donc des ondes avec des intensités lumineuses similaires. On se place alors dans la situation optimale pour améliorer le contraste obtenu sur la figure d'interférences (cf. chapitre OO2).

b Calcul de la différence de chemins optiques dans le cas où la source primaire est sur l'axe optique

Dans la suite, on mène un raisonnement théorique sur une source primaire ponctuelle à travers des trous d'Young.

Considérons pour le moment la situation simplifiée où la source primaire S est sur l'axe optique du montage. On pose la différence de chemins optiques comme :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$



Il ne faut pas calculer les chemins optiques de rayons lumineux traversant des lentilles en se basant sur les trajets géométriques du schéma avec des lentilles minces. On doit utiliser le théorème de Malus.

D'après le théorème de Malus, S_1 et S_2 sont sur la même surface d'onde. Comme S_1 et S_2 sont situés sur des rayons lumineux issus du même point source S et que l'optique géométrique s'applique entre ces points, on a :

$$(SS_1) = (SS_2)$$

Remarque : Rédaction : On pourra se contenter d'écrire que "D'après le théorème de Malus, S_1 et S_2 sont sur la même surface d'onde relative à S ".

De même, on peut appliquer le théorème de Malus après les trous d'Young : S_1 et H sont sur la même surface d'onde. Mais attention, en S_1 et S_2 s'est produit un phénomène de diffraction ! Donc, les lois de l'optique géométrique ne s'appliquent pas en S_1 et en S_2 . A-t-on alors le droit d'écrire que $(SS_1) = (SH)$?



Etre sur la même surface d'onde signifie que l'onde en S_1 et en H est en phase : $\varphi(S_1) = \varphi(H)$. Mais comme l'optique géométrique n'est pas vérifiée en S_2 , on ne peut plus écrire que $\varphi(H) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SH)$. Donc a priori, $(SS_1) \neq (SH)$!!!

Comment traduire alors que S_1 et H sont sur la même surface d'onde ?

Imaginons momentanément que l'on place une source ponctuelle au point M . Par principe de retour inverse de la lumière, les trajets géométriques suivis par les rayons lumineux issus de M sont identiques à ceux tracés ci-dessus. En particulier, on peut considérer deux rayons lumineux issus de M et arrivant en S_1 et en H .

Cette fois, l'optique géométrique est vérifiée entre M et S_1 et entre M et H . Donc,

$$(MS_1) = (MH) \iff (S_1M) = (HM)$$

★

Remarque : Rédaction : On pourra se contenter d'écrire : "D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, S_1 et H sont sur la même surface d'onde relative à M ."

Ainsi, la différence de chemins optiques en M s'écrit :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H$$

car S_2 et H sont sur le même rayon lumineux.

Géométriquement, $S_2H = a \sin(\theta)$. On se place dans les conditions de Gauss : $|\theta| \ll 1$ rad. Donc, $S_2H = a\theta$.

★

Or, $\tan(\theta) = \frac{x}{f'_2} \simeq \theta$.

Donc, $\delta(M) = na \frac{x}{f'_2}$.

Ainsi, l'ordre d'interférences en M est :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 f'_2}$$

On en déduit que les franges sont rectilignes d'équation $x = \text{cste}$ et que l'interfrange i vérifie :

$$\Delta p(\text{position sur l'écran}) = 1 = \frac{nai}{\lambda_0 f'_2} \iff i = \frac{\lambda_0 f'_2}{na}$$

Les ondes étant cohérentes entre elles, la formule de Fresnel donne l'intensité lumineuse sur l'écran :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nax}{f'_2} \right) \right)$$

c Calcul de la différence de chemins optiques dans le cas où la source primaire est à une distance d de l'axe optique

Considérons le cas général du montage de Fraunhofer où la source optique primaire S' est à une distance d de l'axe optique.

★

Schéma. Mettre S' au-dessus de S : on aura alors un angle $\alpha < 0$. J'insiste : orienter l'angle !! Et faire gaffe aux signes !

On pose la différence de chemins optiques comme :

$$\delta(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

D'après le théorème de Malus, les points S_1 et H' sont sur la même surface d'onde relative à S' . Donc, $(S'S_1) = (S'H')$.

★

Ainsi :

$$(S'S_2) - (S'S_1) = (H'S_2) = nH'S_2 = -na \sin(\alpha)$$

en faisant attention au signe négatif de α .

De plus, d'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, S_1 et H sont sur la même surface d'onde relative à M . Donc : $(S_1M) = (HM)$. Ainsi :

$$(S_2M) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H = na \sin(\theta)$$

On en déduit que : $\delta(M) = na (\sin(\theta) - \sin(\alpha))$.

Dans les conditions de Gauss : $\delta(M) = na(\theta - \alpha)$.

Or, géométriquement,

$$\begin{cases} \tan(\theta) = \frac{x}{f'_2} \simeq \theta \\ \tan(\alpha) = -\frac{d}{f'_1} \simeq \alpha \end{cases}$$

Ainsi, $\delta(M) = \frac{nax}{f'_2} + \frac{nad}{f'_1}$. D'où l'ordre d'interférences : $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 f'_2} + \frac{nad}{\lambda_0 f'_1}$.

L'interfrange i vérifie alors :

$$\Delta p(\text{position sur l'écran}) = 1 = \frac{nai}{\lambda_0 f'_2} \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 f'_2}{na}$$

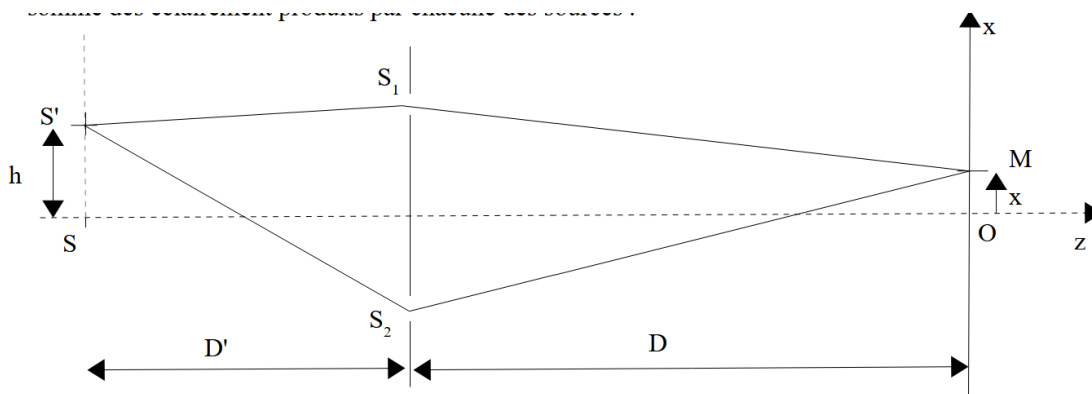
La frange centrale d'ordre 0 est en $x_0 = -\frac{f'_2}{f'_1}d$. Elle est donc dans la direction $\theta_0 = \alpha$: elle se forme au niveau de l'image géométrique de la source S' à travers les deux lentilles.

IV Éclairage par une source étendue spatialement monochromatique : notion de cohérence spatiale

L'étude sera menée à partir du montage de base des trous d'Young placés dans l'air $n = 1$.

IV.1 Cas particulier : éclairage par deux sources distinctes monochromatiques

On considère des trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles distinctes S et S' .



Calculons l'intensité lumineuse en M en supposant que les vibrations lumineuses issues de S et S' ont la même amplitude.

Pour les deux ondes cohérentes issues de S : $\delta_S(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = \frac{ax}{D}$.

D'après la formule de Fresnel : $I_S(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$

Pour les deux ondes cohérentes issues de S' : $\delta_{S'}(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = \frac{ax}{D} + \frac{ah}{D'}$.

D'après la formule de Fresnel : $I_{S'}(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ah}{D'} \right) \right) \right)$

S et S' étant distinctes, les ondes qu'elles produisent sont incohérentes entre elles. Par additivité des intensités lumineuses produites par chacun des points sources :

★

$$I(M) = I_S(M) + I_{S'}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \right)$$

Le terme caractérisant les franges d'interférences est le terme $\cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right)$: on l'appelle le terme d'interférences. On en déduit que les franges sont rectilignes, d'équation $x = \text{cste}$, avec une interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

Le terme $\cos \left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right)$ est appelé le facteur de contraste.

Calculons le contraste :

$$\begin{cases} I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \right| \right) \\ I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \right| \right) \end{cases}$$

Ainsi, le contraste vaut :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \right|$$

Ce contraste est uniforme sur tout l'écran.

Représentons graphiquement \mathcal{C} en fonction de la distance h entre les deux sources.

Représenter graphiquement $\mathcal{C}(h)$.

★

On a $\mathcal{C} = 0 \iff \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff h = \frac{\lambda_0 D'}{2a} + k \frac{\lambda_0 D'}{a}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut donner une explication qualitative à cette évolution du contraste de la figure d'interférences. En effet, chaque source donne le même système de franges (même forme des franges et même interfrange). Lorsque la source S' s'éloigne de l'axe optique, le système de franges qu'elle produit subit une translation en bloc (vers le bas si S' se déplace vers le haut et vers le haut si S' se déplace vers le bas).

- Lorsque $h = 0$, les deux systèmes de franges sont en coïncidence : les franges brillantes (respectivement les franges sombres) du système de franges créé par S coïncident avec les franges brillantes (respectivement les franges sombres) du système de franges créé par S' . Les franges brillantes résultantes sont parfaitement brillantes et les franges sombres résultantes parfaitement noires, le contraste vaut 1.
- Lorsque h augmente, le système de franges créé par S' se décale vers le bas, les franges brillantes (respectivement sombres) des deux systèmes de franges ne coïncident plus, le contraste diminue.
- Pour $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a}$, les deux systèmes de franges se retrouvent en anti-coïncidence : les franges brillantes (respectivement sombres) produites par S coïncident avec les franges sombres (respectivement brillantes) produites par S' . Le contraste s'annule, on ne peut plus distinguer les franges brillantes résultantes des franges sombres résultantes (éclairage uniforme sur l'écran) : on dit qu'il y a brouillage des franges. Il y aura brouillage des franges lorsque $\mathcal{C} = 0$, c'est à dire lorsque $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a} + k \frac{\lambda_0 D'}{a}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La plus petite valeur de h assurant le brouillage est $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a}$.

- ★ Le brouillage des franges a lieu de la même manière sur tout l'écran : le contraste est uniforme.

Autre méthode pour retrouver les conditions d'anti-coïncidence :

On peut également, pour trouver les conditions d'annulation du contraste, travailler avec les ordres d'interférence au point M relatifs aux sources S et S' . Il y aura anti-coïncidence lorsqu'en un même point M , la différence des ordres d'interférence $p_{S'}(M) - p_S(M)$ sera égale à $k + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

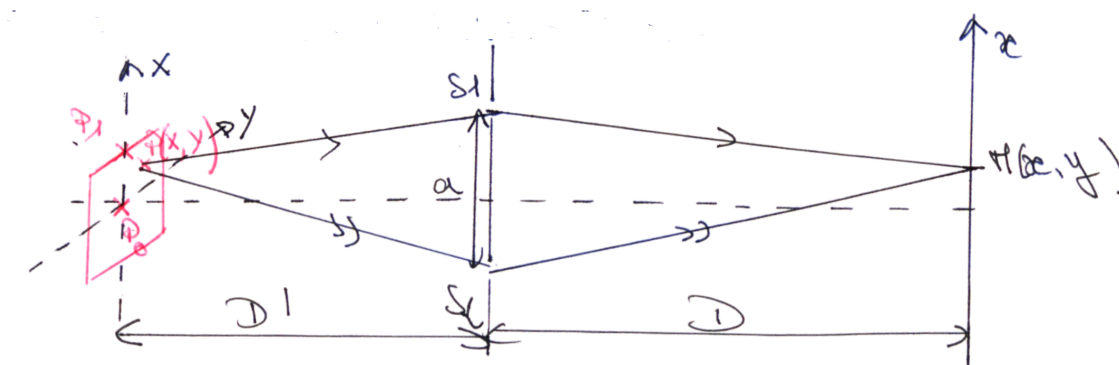
On a : $p_S(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$ et $p_{S'}(M) = \frac{ah}{\lambda_0 D'} + \frac{ax}{\lambda_0 D}$.

- ★ Donc, $p_{S'}(M) - p_S(M) = \frac{ah}{\lambda_0 D'}$. Il y a anti-coïncidence lorsque $p_{S'}(M) - p_S(M) = k + \frac{1}{2} \iff h = \frac{\lambda_0 D'}{2a} + k \frac{\lambda_0 D'}{a}$.

IV.2 Cas général : source étendue spatialement monochromatique

a Etude qualitative

On considère une source monochromatique spatialement étendue, centrée sur P_0 et de dimension h selon la direction $(P_0 X)$.



La source peut-être considérée comme un ensemble de sources distinctes et donc incohérentes entre elles. Chaque point source va créer son propre système de franges. Les différents systèmes de franges ont le même interfrange mais sont décalés les uns par rapport aux autres. Les franges brillantes et sombres des différents systèmes ne coïncident pas, le contraste diminue et peut même s'annuler (brouillage des franges).

b Critère semi-quantitatif de brouillage

La différence de chemins optiques en M entre deux vibrations issues d'un même point P de la source est :

- ★ $\delta_P(M) = (PS_2M) - (PS_1M) = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{D'}$
L'ordre d'interférences est donc : $p_P(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \frac{aX}{\lambda_0 D'}$.

Pour évaluer les contraintes sur la dimension de l'ouverture, on utilise le critère semi-quantitatif suivant :

Critère semi-quantitatif de brouillage

On considère qu'il y a brouillage en M si l'écart entre les ordres d'interférences produits par un point P_0 au centre de la source et le point P_1 au bord de la source (écart évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source) est supérieur à $\frac{1}{2}$:

★ Brouillage si $|\Delta p(\text{demi-largeur spatiale de la source})| \geq \frac{1}{2}$

On a :

★
$$\Delta p(\text{demi-largeur spatiale de la source}) = p_{P_1}(M) - p_{P_0}(M) = \frac{ah}{2\lambda_0 D'}$$

Il y a brouillage si $\Delta p \geq \frac{1}{2} \iff h \geq \frac{\lambda_0 D'}{a} = L_s$.

L_s est appelé la longueur de cohérence spatiale de la source.

- Si les dimensions de la source sont très inférieures à L_s , les interférences sont quasiment les mêmes que pour une source ponctuelle.
- Si les dimensions de la source sont supérieures à L_s , les franges sont brouillées, on dit que dans ce cas la source est peu cohérente spatialement.

Le brouillage a lieu de la même manière sur tout l'écran : le contraste est uniforme. Ceci est une caractéristique d'un problème de cohérence spatiale.

Application numérique : $D' = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.5 \text{ mm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$. On obtient : $L_s \sim 0.5 \text{ mm}$, ce qui est faible.

Pour les dispositifs à division du front d'onde, la longueur de cohérence spatiale est très faible, l'utilisation de sources étendues brouillent très rapidement les figures d'interférences.

Expérimentalement, hormis avec un laser, il sera donc indispensable d'utiliser une fente source primaire très fine ($\sim 0.1 \text{ mm}$) pour limiter l'extension spatiale de la source.

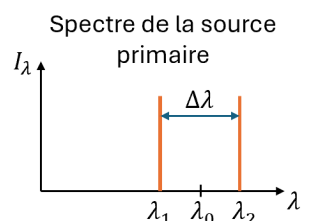
V Eclairage par une source ponctuelle polychromatique : notion de cohérence temporelle

L'étude sera menée à partir du montage de base des trous d'Young placés dans l'air $n = 1$.

On reprend le cas d'une source primaire S ponctuelle pour ne pas avoir de problème de cohérence spatiale. On place la source S sur l'axe optique pour simplifier les calculs.

V.1 Cas particulier : éclairage par une source ponctuelle possédant un doublet spectral

Supposons que le spectre de la source S contienne deux raies de longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 . On note $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ l'écart spectral entre les raies et $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ la longueur d'onde moyenne. Dans le cas où $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, on parle d'un doublet spectral.



Exemple : Une lampe à vapeur de sodium possède un doublet spectral dans le jaune : $\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$.

On suppose que les ondes émises par la source aux deux longueurs d'onde ont la même intensité lumineuse I_0 au point M .

Les deux vibrations de longueur d'onde λ_1 qui arrivent en M sont cohérentes entre elles : elles interfèrent. D'après la formule de Fresnel :

$$I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{ax}{D} \right) \right)$$

Franges rectilignes d'interfrange $i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a}$.

De même, les vibrations de longueur d'onde λ_2 sont cohérentes entre elles :

★

$$I_2(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \frac{ax}{D} \right) \right)$$

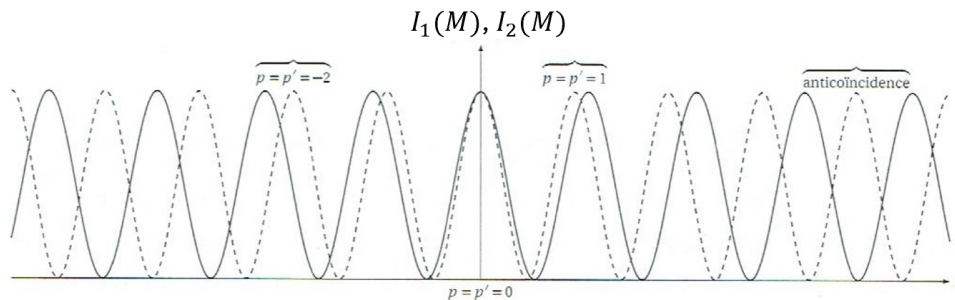
Franges rectilignes d'interfrange $i_2 = \frac{\lambda_2 D}{a}$.

En revanche, les vibrations de longueurs d'onde différentes ne sont pas synchrones : elles n'interfèrent pas entre elles. L'intensité lumineuse totale sur l'écran est donc :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

a Etude qualitative

Représentons les deux intensités lumineuses $I_1(M)$ et $I_2(M)$.



Les interfranges étant différents les maxima des deux systèmes de franges se décalent progressivement lorsqu'on s'éloigne du centre ($x = 0$).

Au voisinage de $x = 0$ les franges brillantes (respectivement les franges sombres) des deux systèmes sont quasiment en coïncidence : les franges seront bien visibles. On observera des franges résultantes proches de celles du cas d'une source monochromatique, le contraste est proche de 1. Lorsqu'on s'éloigne de $x = 0$, les franges brillantes (respectivement sombres) des deux systèmes se décalent. Le contraste diminue jusqu'à atteindre une zone de brouillage où une frange sombre d'un des systèmes de franges coïncide avec une frange brillante de l'autre système : le contraste s'annule alors, il y a brouillage des franges.

Ensuite le décalage des systèmes de franges continue, le contraste augmente à nouveau puis diminue et ainsi de suite.

★

Le brouillage des franges n'a pas lieu partout : le contraste est donc variable sur l'écran et dépend du point d'observation.

b Etude quantitative

Calculons explicitement l'intensité résultante :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1(M) + I_2(M) \\ &= 2I_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{ax}{D} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \frac{ax}{D} \right) \right) \\ &= 2I_0 \left(2 + 2 \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{D} \right) \times \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{D} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, on a :

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

et

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \simeq \frac{2}{\lambda_0}$$

Les franges sont toujours rectilignes.

On souhaite représenter $I(x)$. La difficulté est que $I(x)$ fait apparaître un produit de deux cosinus. Dans ce cas, la méthode est souvent la même : comparons les périodes des deux cosinus.

★

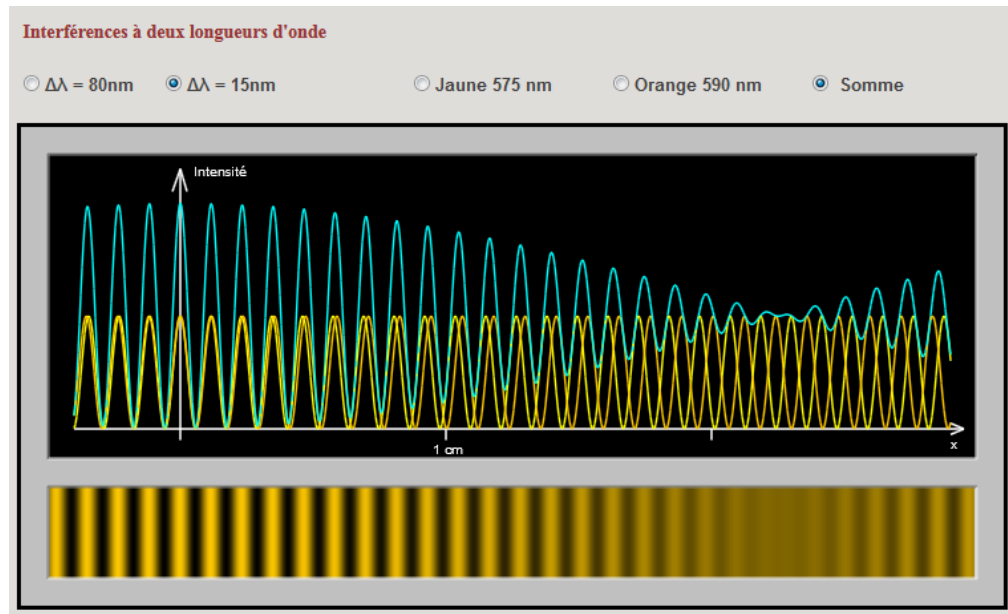
- $\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \frac{ax}{D}\right)$ a pour période $\frac{2D\lambda_0^2}{\Delta\lambda a}$
- $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$ a pour période $\frac{\lambda_0 D}{a} \ll \frac{2D\lambda_0^2}{\Delta\lambda a}$

Donc, $\gamma(x) = \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)$ varie lentement et caractérise l'enveloppe de la fonction.

$\gamma(x)$ est appelée la fonction de contraste. $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$ varie rapidement.

Grapher $I(x)$ en mettant en évidence les deux périodes

L'interfrange vaut donc : $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$, formule identique au cas des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle primaire monochromatique de longueur d'onde λ_0 .



Nombre de franges entre deux anti-coïncidences successives :

On détermine le nombre N de franges entre deux anti-coïncidences successives :

$$N = \frac{\frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a}}{\frac{\lambda_0 D}{a}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg 1$$

| **Ordre de grandeur :** Dans ce cas du doublet jaune du sodium, on obtient : $N \simeq 1000$

Contraste de la figure d'interférences :

Visuellement, ce qui compte pour distinguer les franges brillantes des franges sombres est la différence d'intensités lumineuses entre une frange brillante et une frange sombre successives.

Donc, on calcule

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

en prenant le I_{\max} et le I_{\min} distants d'une demi-interfrange. Il s'agit donc d'un maximum et d'un minimum locaux.

Graphe zoomé et rapide pour expliquer le calcul.

Sur une demi-interfrange, $\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)$ ne varie quasiment pas. Donc :

★

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right|\right) \quad \text{et} \quad I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right|\right)$$

Ainsi, le contraste vaut :

$$\mathcal{C}(x) = \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right| = |\gamma(x)|$$

et n'est pas uniforme dans tout l'espace : il dépend de x . En particulier, le contraste est nul et il y a brouillage des franges pour les abscisses x_k vérifiant :

$$\frac{\pi\Delta\lambda ax_k}{\lambda_0^2 D} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_k = \frac{\lambda_0^2 D}{2\Delta\lambda a} + k \frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode pour retrouver les conditions d'anti-coïncidence :

On peut directement retrouver les abscisses x_k des anti-coïncidences en raisonnant sur les ordres d'interférences.

Pour la longueur d'onde λ_1 , l'ordre d'interférences est : $p_1(M) = \frac{ax}{\lambda_1 D}$.

Pour la longueur d'onde λ_2 , l'ordre d'interférences est : $p_2(M) = \frac{ax}{\lambda_2 D}$.

Il y a anti-coïncidence quand, pour un même point M :

★

$$p_1(M) - p_2(M) = k + \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Or,

$$p_1(M) - p_2(M) = \frac{ax}{D} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \simeq \frac{ax}{D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

Il y a donc anti-coïncidence pour :

$$x_k = \frac{\lambda_0^2 D}{2\Delta\lambda a} + k \frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Le premier brouillage observé va être atteint pour des ordres d'interférences $p_1(M)$ et $p_2(M)$ très élevés (de l'ordre de 500 pour le sodium). Les brouillages des franges ne seront donc observables expérimentalement qu'avec des interféromètres permettant d'observer des ordres d'interférences élevés.

V.2 Cas général : source ponctuelle avec un spectre étendu

Supposons que le spectre de la source S soit un spectre continu. Cela peut par exemple modéliser une raie non monochromatique d'une lampe spectrale ou une source blanche.

Appelons ν_0 la fréquence centrale du spectre et $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ la largeur spectrale caractéristique (on prendra le plus souvent la largeur à mi-hauteur).

★ Profil lorentzien de $I_\nu(\nu)$ en définissant graphiquement la largeur à mi-hauteur.

On peut décomposer la source ponctuelle à spectre continu en une infinité de sources ponctuelles monochromatiques de fréquence ν_i .

Chaque fréquence ν_i crée son propre système de franges d'interférences, les différents systèmes ont des interfranges différents. Comme deux ondes émises à des fréquences ν_i différentes ne sont pas synchrones, l'intensité lumineuse totale est la somme des intensités lumineuses de chacun des systèmes de franges créées par les différentes fréquences ν_i .

a Etude qualitative

Pour la frange en $x = 0$, l'ordre d'interférence est nul pour toutes les longueurs d'onde : il s'agit d'une frange centrale brillante. Autour de cette frange, le contraste est bon, car les différents systèmes de frange sont quasiment en coïncidence. En s'éloignant de la frange centrale, les franges brillantes et sombres des différents systèmes ne coïncident plus, il y a brouillage des franges.

On retrouve qualitativement que le contraste ne sera pas uniforme sur l'écran et dépendra de la position du point d'observation.

b Critère semi-quantitatif de brouillage

Critère semi-quantitatif de brouillage pour un spectre étendu

On considère qu'il y a brouillage des franges lorsque la différence des ordres d'interférences en un même point M pour les ondes de fréquence ν_0 et de fréquence ν_2 (demi-largeur spectrale) est supérieure à $\frac{1}{2}$:

$$\star \quad |\Delta p(\text{demi-largeur spectrale de la source})| \geq \frac{1}{2}$$

L'ordre d'interférence en M pour une raie de longueur d'onde λ est $p_\lambda(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{\nu\delta(M)}{c}$.
Donc,

$$\star \quad \Delta p(\text{demi-largeur spectrale de la source}) = p_{\nu_2}(M) - p_{\nu_0}(M) = \frac{(\nu_2 - \nu_0)\delta(M)}{c} = \frac{\Delta\nu\delta(M)}{2c}$$

Il y a brouillage si $|\Delta p| \geq \frac{1}{2} \iff |\delta(M)| \geq \frac{c}{\Delta\nu} = c\tau_c = \ell_c$ avec τ_c le temps de cohérence de la source et ℓ_c la longueur de cohérence temporelle.

Plus le spectre de la source est étendu, moins ℓ_c est grand et moins il y aura de franges visibles avant le premier brouillage. On dit dans ce cas que la source possède une mauvaise cohérence temporelle.

Notons que le fait que le brouillage ne soit pas uniforme sur l'écran est une caractéristique des problèmes de cohérence temporelle.

Remarque : Attention néanmoins à ne pas confondre expérimentalement le phénomène d'absence de franges du fait de la figure de diffraction (cf. TP7-B) avec le brouillage des franges lié à une mauvaise cohérence temporelle de la source.

Exercice : Une des raies d'émission de l'hydrogène, appelée raie $H\alpha$ (très très utilisée en astrophysique), a pour longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 656.3 \text{ nm}$ et pour largeur spectrale $\Delta\lambda \sim 0.1 \text{ nm}$ pour de l'hydrogène basse pression à température ambiante. Estimer la longueur de cohérence temporelle ℓ_c associée à cette raie d'émission.

$$\ell_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}. \text{ Or, } \nu = \frac{c}{\lambda}. \text{ Donc, } d\nu = -\frac{cd\lambda}{\lambda_0^2}. \text{ Ainsi :}$$

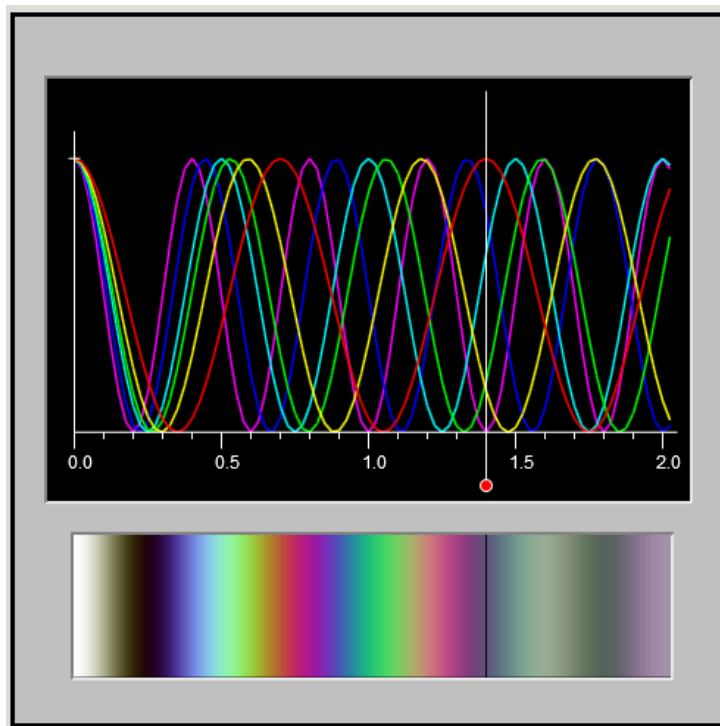
★

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = 4.3 \text{ mm}$$

V.3 Observation en lumière blanche

A nouveau, les ondes émises à différentes longueurs d'onde ne sont pas cohérentes entre elles : l'intensité résultante est la somme des intensités lumineuses créées par chaque longueur d'onde. Or, chaque longueur d'onde donne un système de franges décalé par rapport aux autres longueurs d'onde : la figure se brouille.

La figure ci-dessous représente l'intensité lumineuse sur l'écran pour différentes longueurs d'onde et l'aspect visuel pour la partie $x > 0$.



★ Ajouter sous l'aspect visuel les différents noms des phénomènes observés sur l'écran.

Observations :

- si $\delta(M) = 0$, alors $p(M) = 0$ pour toutes les longueurs d'onde. On observe alors une teinte blanche ayant le même spectre que la source. On parle de **teinte plate**.
- si $\delta \neq 0$ mais petit (il faut en fait avoir $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} \leq \frac{\ell_c}{\lambda} \sim 2$), alors, il y aura certaines longueurs d'onde d'une certaine couleur qui donneront une intensité maximale en M et d'autres d'une autre couleur qui auront une intensité minimale. On observe une teinte colorée en M : on parle de **teinte de Newton**.
- si $\delta(M)$ augmente encore, alors au sein des longueurs d'onde rouge, certaines donneront une intensité maximale en M , d'autres une intensité minimale. Il en va de même pour toutes les couleurs. Au global, la tache résultante est blanche : on parle de **blanc d'ordre supérieur**. Mais le spectre en M n'est plus identique à la source primaire, vu qu'il manque certaines longueurs d'onde, on parle de **spectre cannelé**. Dans ce spectre, les raies sombres sont appelées des **cannelures**.

Détermination des longueurs d'onde des cannelures :

On peut déterminer mathématiquement les longueurs d'onde λ_k pour lesquelles le spectre présentera une cannelure en un point M . Pour cela, on fixe le point M (x fixé).

Pour les cannelures, l'ordre d'interférences est :

★
$$p(M) = \frac{ax}{\lambda_k D} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_k = \frac{ax}{D} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ne pas oublier que ces cannelures sont dans le visible, donc : $400 \text{ nm} < \lambda_k < 750 \text{ nm}$.

Remarque : On notera que tout au long de ce chapitre, on a étudié la variation de l'ordre d'interférences Δp en faisant varier des paramètres différents :

- $\Delta p(\text{position sur l'écran}) = 1$ pour l'interfrange.
- $|\Delta p(\text{demi-largeur spatiale de la source})| = \frac{1}{2}$ pour la limite de brouillage associé à l'extension spatiale de la source.
- $|\Delta p(\text{demi-largeur spectrale de la source})| = \frac{1}{2}$ pour la limite de brouillage associé à l'extension spectrale de la source.

Ne vous embrouillez pas dans tous ces paramètres !

Exercices

Ex. 1 Déplacement d'un système de franges

Une source S monochromatique éclaire deux fentes fines F_1 et F_2 parallèles distantes de $a = 3 \text{ mm}$ situées à une distance $d = 50 \text{ cm}$ de S .

La source est située sur la médiatrice de F_1 et F_2 et on compte 6 franges brillantes de chaque côté de la frange centrale située en O , occupant dans leur ensemble une longueur $L = 7.2 \text{ mm}$, sur un écran situé à une distance $D = 3 \text{ m}$ des deux fentes. On définit un repère cartésien de centre O , de sorte que (Oz) coïncide avec l'axe optique.

1. Faire une figure représentant le système. Etablir la différence de chemins optiques entre deux rayons venant interférer en un point M de l'écran de coordonnées $(x, y, 0)$.
Décrire précisément le système de franges observable sur l'écran. Le système de franges est-il observable uniquement pour $D = 3 \text{ m}$? Qualifie-t-on alors les interférences de localisées ou de délocalisées ?
2. Calculer la longueur d'onde λ de la radiation émise par S .
3. Avec quelle incertitude-type connaît-on λ sachant que l'on a mesuré L au $1/10 \text{ mm}$, a au $1/10 \text{ mm}$ et D à 1 cm près ?
4. On déplace S de $2,5 \text{ mm}$ vers le haut de la figure. Dans quel sens se déplace la frange centrale ? Déterminer la distance de déplacement de la frange centrale.
5. On ramène la frange centrale dans sa position initiale O en plaçant devant une des 2 fentes une lame mince à faces parallèles (i.e. un morceau de verre taillé de manière parallélépipédique) d'indice 1,5. Cette lame est placée orthogonalement à l'axe optique. Où doit-on mettre la lame à faces parallèles ? Quelle épaisseur convient-il de lui donner ?

Correction de l'exercice 1

Remarque générale : Si l'exercice n'introduit pas d'indice optique, il est sous-entendu qu'on travaille dans l'air, assimilable à du vide du point de vue optique : $n = 1$.

1. La différence de chemins optiques est :

$$\delta(M) = (SF_2M) - (SF_1M) = \underbrace{(SF_2) - (SF_1)}_{=0} + (F_2M) - (F_1M) = F_2M - F_1M$$

Géométriquement :

$$F_1M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right)$$

car $D \gg x - \frac{a}{2}$ et $D \gg y$ (conditions de Gauss). Et de manière similaire :

$$F_2M \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right)$$

Ainsi, on obtient, après calculs :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}$$

On en déduit l'ordre d'interférences en M :

$$p(M) = \frac{ax}{\lambda D}$$

Or, les franges vérifient $p(M) = \text{cste}$: les franges sont rectilignes d'équation $x = \text{cste}$. On détermine également l'interfrange tel que

$$\Delta p = \frac{ai}{\lambda D} = 1 \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$

Remarque : Lorsque vous devez décrire le système de franges, on attend leur forme et l'interfrange (s'il en existe un).

Les interférences sont observables partout derrière les fentes (le calcul précédent restant valable à condition que $D \gg a, x, y$), donc pas que pour $D = 3 \text{ m}$. On parle d'interférences délocalisées.

2. Les données mesurées se traduisent par : $L = 12i$. Donc : $\lambda = \frac{La}{12D}$. A.N. : $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$
3. On ne nous donne pas l'incertitude-type sur L mais une précision de mesure à comprendre comme : « L est situé quelque part dans un intervalle $L - 1/10 \text{ mm}$ et $L + 1/10 \text{ mm}$. L'incertitude-type sur L est donc : $u(L) = \frac{1}{10\sqrt{3}} \text{ mm}$. On raisonne de même pour les deux autres grandeurs. Par formule de composition des incertitudes pour un quotient :

$$u(\lambda) = \lambda \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2}$$

L'incertitude relative sur D est nettement négligeable devant les deux autres (logique !). A.N. : $u(\lambda) = 0.1 \mu\text{m}$

Remarque : On devrait donc conclure : $\lambda = 0.6 \pm 0.1 \mu\text{m}$.

4. Avec le déplacement de S , la différence de chemins optiques est modifiée :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} + \frac{ah}{d}$$

avec $h = 2.5 \text{ mm}$. On en déduit l'ordre d'interférences et on cherche x tel que $p(x) = 0 \iff \delta(x) = 0$. On obtient :

$$x = -\frac{hD}{d} = -15 \text{ mm}$$

La frange centrale s'est déplacée vers le bas.

5. **Remarque générale :** Si l'exercice n'explicite pas clairement qu'on doit considérer un angle d'incidence dans une lame à faces parallèles, alors on suppose qu'on peut considérer que le rayon lumineux orthogonal aux faces parallèles. Cela revient à négliger les termes d'ordre 2 en x/D devant les termes d'ordre 1. On raisonne sur la frange centrale (ordre d'interférence nul). Il y a donc égalité des chemins optiques depuis S . Vu que le chemin optique 1 avait été diminué par le déplacement vers le haut de S , on compense en mettant une lame à faces parallèles pour le rayon lumineux 1 : cela va rallonger à nouveau le chemin optique 1. Appelons e l'épaisseur de la lame à faces parallèles. On souhaite qu'en $x = 0$, $p = 0$. Or,

$$\delta(x = 0) = (SF_2) - (SF_1) = \frac{ah}{d} - (n - 1)e$$

On en déduit :

$$e = \frac{ah}{d(n - 1)}$$

A.N. : $e = 30 \mu\text{m}$

Ex. 2 Miroir de Lloyd

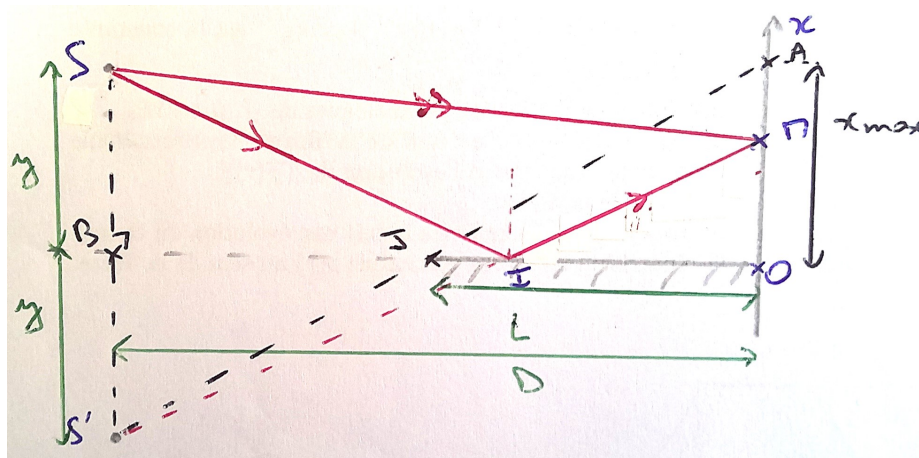
Un miroir plan, de largeur $L = 20 \text{ cm}$, est placé perpendiculairement à un écran. Celui-ci est en contact avec le bord O du miroir. On éclaire le miroir par une source lumineuse S ponctuelle, située à faible distance $y = 1.5 \text{ mm}$ du plan du miroir et à une distance $D = 70 \text{ cm}$ de l'écran. On nomme $x = OM$.



- Représenter les rayons lumineux associés aux ondes susceptibles d'interférer au point M . Montrer alors que, du point de vue de la différence de chemins optiques, tout se passe comme si l'une des ondes était issue de S et l'autre était issue du symétrique S' de S par rapport au plan du miroir.
- La source émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$. Ecrire la loi $I(x)$ donnant l'intensité vibratoire sur l'écran en un point M du champ d'interférence. On précise que lors de la réflexion d'une onde sur un miroir métallique, l'onde réfléchie est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.
- Préciser la forme des franges observées et donner l'expression de l'interfrange. La frange au point O est-elle brillante ou sombre ?
- (a) A quelle distance de O se trouve la troisième frange brillante ?
(b) Quel est le nombre de franges brillantes visibles sur l'écran ?
- La source émet désormais de la lumière blanche dont les limites sont $\lambda_b = 0.4 \mu\text{m}$ et $\lambda_r = 0.75 \mu\text{m}$. Décrire ce qu'on observe sur l'écran. On dispose un spectroscope dans le plan d'observation, à la distance $x = 0.5 \text{ mm}$ du centre du système de franges. Décrire l'aspect du spectre observé.
- Calculer le nombre de cannelures et les longueurs d'onde des radiations manquantes dans le spectre.

Correction de l'exercice 2

1. Du fait de la réflexion sur le miroir plan, tout se passe comme si le rayon émergent du miroir plan était issu de S' , symétrique de S par rapport au miroir. Du point de vue des chemins optiques, on a alors $(SI) = (S'I)$ (mêmes indices et mêmes longueurs géométriques).



2. Difficultés relevées lors du TD :

- D'après la Q.1, on peut considérer que les deux ondes interférant en M sont les ondes associées aux rayons lumineux SM (deux flèches) et $S'IM$ (ne pas considérer le rayon SIM , car on le prend en compte via $S'IM$). Faire un schéma équivalent si cela vous aide.
- On reconnaît une situation analogue aux trous d'Young : inutile de refaire le calcul de la différence de chemins optiques, c'est un résultat de cours pouvant être immédiatement donné.

Sans prendre en compte le déphasage de π à la réflexion, on a la différence de chemins optiques : $\delta(M) = (S'IM) - (SM) = \frac{2yx}{D}$, car les ondes sont en phase aux points S et S' (rappelons que le point S' est un point source fictif, en réalité les deux ondes sont émises de S , donc évidemment qu'elles sont en phase au niveau de leur point d'émission).

Les deux ondes sont cohérentes entre elles, on applique la formule de Fresnel, en ajoutant le déphasage de π lié à la réflexion :

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yx}{D} + \pi \right) \right) = 2I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yx}{D} \right) \right)$$

3. D'après la formule de l'intensité lumineuse, les franges sont rectilignes d'équation $x = \text{cste}$. L'interfrange est identifié : $i = \frac{\lambda D}{2y} = 0.14 \text{ mm}$.

En $x = 0$, $I(0) = 0$: il s'agit d'une frange sombre en O .

4. (a) Deux façons de raisonner :

- Utiliser l'ordre d'interférences, mais attention, celui doit prendre en compte le déphasage de π : $p(M) = \frac{2yx}{\lambda D} + \frac{1}{2}$. On aura la troisième frange brillante si $p = 3$ (vérifier que pour $p = 1$, et non $p = 0$, cela donne la première frange brillante).
- Représenter la figure d'interférences sur l'écran : on trouve facilement la position de la troisième frange brillante.

On trouve : $x = \frac{\lambda}{2} + 2i = \frac{5i}{2} = 0.35 \text{ mm}$

- (b) On doit connaître la taille du champ d'interférences. Ce champ d'interférences est limité par le rayon lumineux issu de S' et passant par le bord extérieur J du miroir. Avec le th de Thalès dans $S'BJOAJ$, on trouve :

$$\frac{y}{D-L} = \frac{x_{\max}}{L} \Rightarrow x_{\max} = \frac{yL}{D-L} = 0.6 \text{ mm}$$

La 4ème frange brillante est en $x = 0.49 \text{ mm}$. La 5ème serait en $x = 0.63 \text{ mm} > x_{\max}$. On voit donc 4 franges brillantes sur l'écran.

5. Les ondes émises à une même longueur d'onde sont cohérentes entre elles : elles donnent un système de franges d'interférences. En revanche, des ondes à des longueurs d'onde différentes étant incohérentes entre elles, il y a additivité des intensités lumineuses des systèmes de franges à des longueurs d'onde distinctes. Ainsi, la frange en O est sombre, puis on observe les teintes de Newton proche de O , et enfin un blanc d'ordre supérieur loin du point O .

Le spectre est donc cannelé en $x = 0.5 \text{ mm}$: certaines longueurs d'onde sont absentes du spectre.

6. Le plus simple est de raisonner sur l'intensité lumineuse. On voit que la longueur d'onde λ_k donne une cannelure si

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} \frac{2yx}{D}\right) = 1 \iff \frac{2yx}{\lambda_k D} = k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \iff \lambda_k = \frac{2yx}{Dk}$$

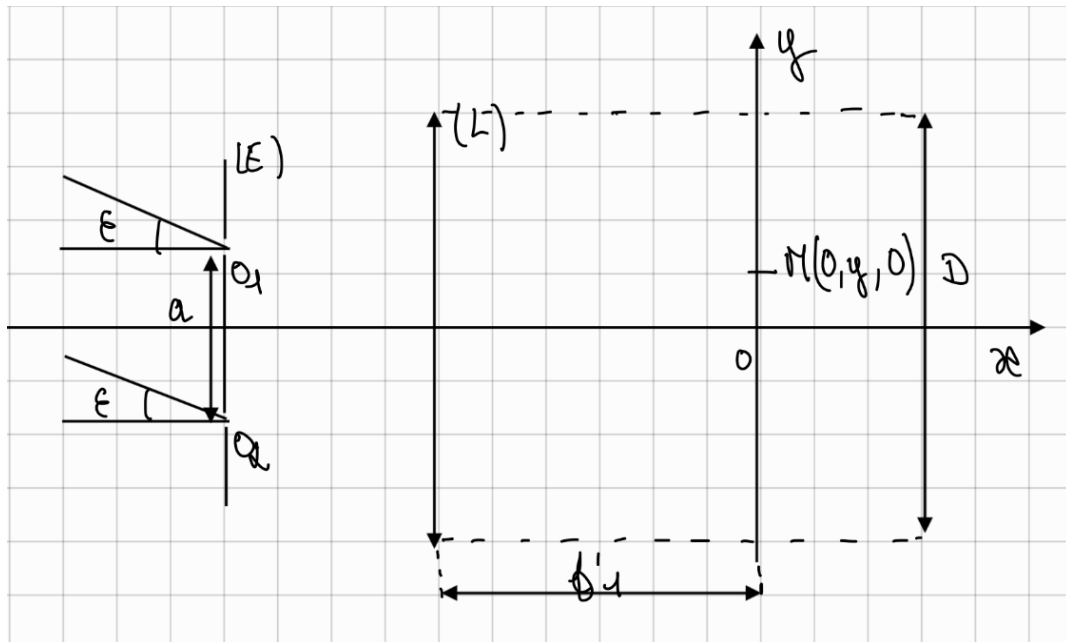
Par tâtonnement, on trouve : $\lambda_5 = 0.43 \mu\text{m}$, $\lambda_4 = 0.54 \mu\text{m}$, $\lambda_3 = 0.71 \mu\text{m}$, soit 3 cannelures (les autres λ_k sont hors du visible).

Ex. 3 Résolution angulaire d'un système d'étoiles doubles

Pour mesurer l'angle ε séparant deux étoiles proches S_1 et S_2 vues depuis la Terre, on utilise la méthode de Fizeau décrite ci-dessous.

Deux fentes infiniment fines O_1 et O_2 , distantes de a , identiques et percées dans un écran (E) opaque, sont placées devant une lentille convergente (L) de focale f'_1 et de diamètre D . L'observation est faite dans le plan focal image de (L).

On considère, pour simplifier, que S_1 est sur l'axe optique et on note $\varepsilon \ll 1$ l'écart angulaire entre les deux sources S_1 et S_2 distinctes. On note $\lambda = 550 \text{ nm}$ la longueur d'onde émise par les deux étoiles, en supposant que l'émission est monochromatique. On suppose également que les deux étoiles émettent une onde arrivant en O_1 et O_2 avec la même intensité lumineuse I_0 . On considère le dispositif dans l'air d'indice optique 1.



On rappelle qu'une minute d'arc équivaut à un angle de $(1/60)^\circ$ et qu'une seconde d'arc équivaut à un angle $(1/3600)^\circ$.

1. Représenter les rayons lumineux arrivant au point M .
2. Démontrer l'expression de l'intensité lumineuse au point M dans le cas où on n'observerait que l'étoile S_1 .
3. Déterminer l'intensité lumineuse au point M dans le cas où on n'observerait que l'étoile S_2 .
4. Montrer que l'intensité lumineuse due aux deux sources S_1 et S_2 observées simultanément peut se mettre sous la forme :

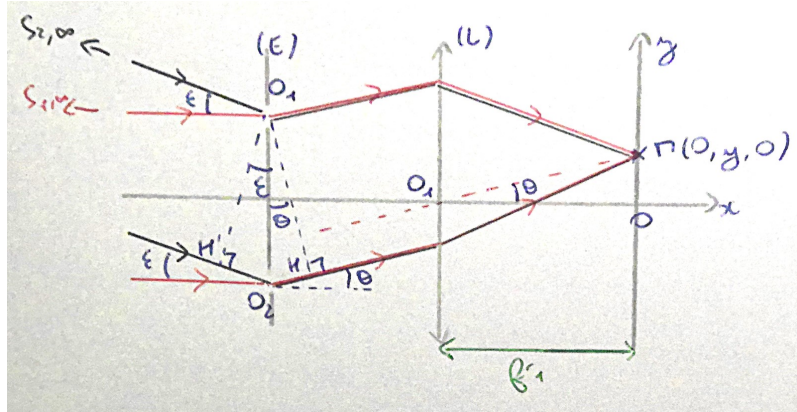
$$I(y) = K \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{ya}{f'_1} \quad \text{et} \quad \delta' = a\varepsilon$$

On exprimera la constante K .

5. Commenter le résultat précédent. On précisera l'expression du facteur de contraste, aussi appelé facteur de visibilité.
6. On étudie le système d'étoiles doubles Hercule. Afin de déterminer ε , on modifie l'écartement a entre les deux fentes afin d'annuler le contraste. En démarrant pour une valeur de a nulle et en augmentant progressivement

- a , on observe le premier brouillage des franges pour $a = 41$ mm. Déterminer l'angle ε entre les deux étoiles du système. On donnera le résultat en secondes d'arc.
7. Retrouver rapidement la condition de 1er brouillage des franges portant sur a , ε et λ à l'aide du critère d'anti-coïncidence des systèmes de franges.

Correction de l'exercice 3



2. Les ondes lumineuses émises par S_1 sont cohérentes entre elles. D'après la formule de Fresnel :

$$I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta_1(M) \right) \right)$$

avec $\delta_1(M) = (S_1O_2M) - (S_1O_1M)$.

D'après le théorème de Malus, les points O_1 et O_2 sont sur la même surface d'onde relative à S_1 . Donc : $(S_1O_1) = (S_1O_2)$. D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, les points O_1 et H sont sur la même surface d'onde relative à M . Donc $(O_1M) = (HM)$. Ainsi : $\delta_1(M) = (O_2H) = O_2H$. Dans les conditions de Gauss, $\theta \ll 1$ rad. Donc,

$$\delta_1(M) = a\theta = \frac{ay}{f'_1} \Rightarrow I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_1} \right) \right)$$

3. Le raisonnement est similaire pour S_2 , à l'exception du fait que O_1 et O_2 ne sont pas sur la même surface d'onde.

D'après le théorème de Malus, O_1 et H' sont sur la même surface d'onde relative à S_2 . Donc : $(S_2O_1) = (S_2H')$. Ainsi :

$$\delta_2(M) = (H'O_2) + (O_2H) = H'O_2 + O_2H$$

Comme $\varepsilon \ll 1$, on aboutit à :

$$\delta_2(M) = a\varepsilon + \frac{ay}{f'_1} \Rightarrow I_2(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(a\varepsilon + \frac{ay}{f'_1} \right) \right) \right)$$

4. Les ondes issues de S_1 sont incohérentes avec celles issues de S_2 . Donc, l'intensité lumineuse totale est :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda f'_2} + \frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} \right) \right)$$

qui est le résultat demandé avec $K = 4I_0$

5. On identifie le terme d'interférences et le facteur de contraste directement. Le facteur de contraste est $V(\varepsilon) = \cos \left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} \right)$
6. Le premier brouillage de franges est atteint pour

$$\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{2a}$$

A.N. : $\varepsilon = 6.7 \times 10^{-6}$ rad. **Attention : le résultat trouvé est en radians, et non en degrés, car l'approximation $\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon$ n'est valable qu'avec des angles en radians !** On convertit le résultat : $\varepsilon = 1.4$ secondes d'arc.

7. L'ordre d'interférences lié à S_1 est $p_1(M) = \frac{ay}{f'_1 \lambda}$ et l'ordre d'interférences lié à S_2 est $p_2(M) = \frac{ay}{f'_1 \lambda} + \frac{a\varepsilon}{\lambda}$.
Critère de brouillage (égalité dans le cas du 1er brouillage) :

$$p_2(M) - p_1(M) = \frac{a\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{2a}$$

Ex. 4 Trous d'Young éclairés par une source avec un spectre étendu

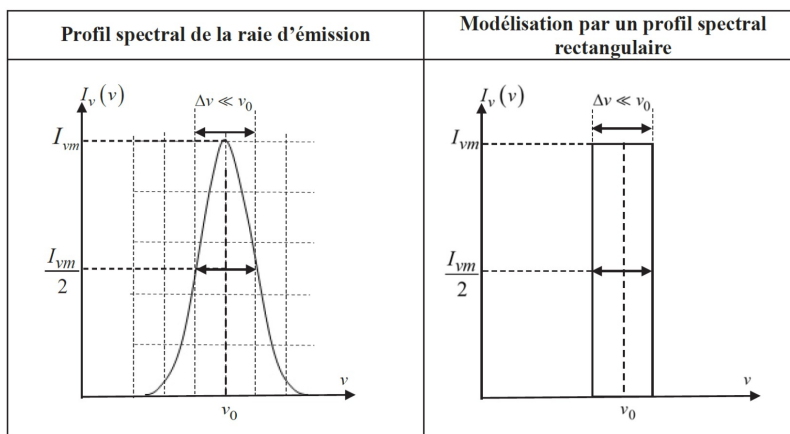
Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁴

On éclaire des trous d'Young, distants de a et situés le long d'un axe (Ox) , avec une source primaire ponctuelle. La source S est à une grande distance d des trous d'Young, sur la médiatrice des trous d'Young. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'intensité lumineuse sur un écran situé à une grande distance D derrière les trous d'Young. L'air sera assimilé à du vide du point de vue optique.

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

- Considérons, dans cette question uniquement, que la source est monochromatique de longueur d'onde λ .
 - Donner l'ordre d'interférences sur l'écran.
 - Décrire la forme des franges d'interférences et exprimer l'interfrange en fonction de a , D et λ .

On considère désormais le cas d'une source avec un spectre étendu. Appelons ν_0 la fréquence centrale et $\Delta\nu \ll \nu_0$ l'écart spectral. L'intensité spectrale de la source est représentée sur la figure ci-dessous.



Etude qualitative

- Expliquer qualitativement pourquoi on pourrait observer un brouillage des franges sur l'écran.
- Rappeler le critère semi-quantitatif de brouillage des franges. En déduire la valeur limite de la différence de chemins optiques $\delta(M)$ à partir de laquelle la figure d'interférences est brouillée. Qu'observe-t-on pour $\delta(M)$ supérieur à cette valeur limite ?

Calcul exact

Dans la suite, on souhaite vérifier quantitativement ce critère de brouillage, dans le cas d'une modélisation simplifiée. Pour ce faire, on suppose le profil spectral de la source comme rectangulaire entre $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$.

- Soit $dI(M)$ l'intensité lumineuse au point M sur l'écran associée aux ondes émises entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$. On suppose que l'intensité lumineuse au niveau de la source correspondant à la plage de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ vaut $\frac{I_0 d\nu}{\Delta\nu}$. Exprimer $dI(M)$ en fonction notamment de $\delta(M)$ et de ν .
- En intégrant sur tout le spectre de la source, montrer que l'intensité lumineuse totale est :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi \Delta\nu \delta(M)}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi \nu_0 \delta(M)}{c} \right) \right)$$

⁴

$\alpha_P \left(\left((N)g \frac{\partial}{\partial \nu} \right)_{\text{so}} + 1 \right) \frac{a \nabla}{0_{I\mathbb{Z}}} = (N)IP \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$

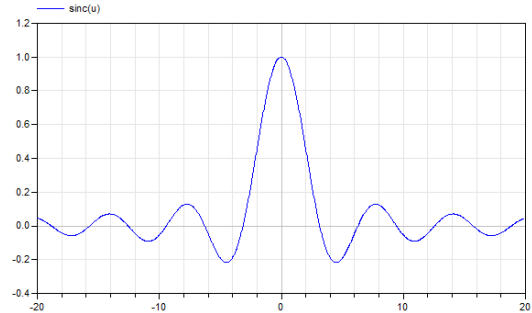
où la fonction sinus cardinal est définie comme $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Un formulaire donne le graphe de cette fonction.

- Identifier les termes variant rapidement et lentement avec la différence de chemins optiques et leur attribuer un sens physique.
- En déduire le graphe de $I(\delta)$.
- Retrouve-t-on la condition de brouillage établie à la question 3 ? Proposer une condition numérique portant sur $\delta(M)$ pour pouvoir considérer que le contraste reste correct sur la figure d'interférences.

Formulaire :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

On définit la fonction "sinus cardinal" sur \mathbb{R} par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On donne le graphe de cette fonction ci-contre.



Correction de l'exercice 4

- On donne l'ordre d'interférences $p(M) = \frac{ax}{\lambda D}$.
 - D'après l'ordre d'interférences, les franges sont rectilignes. L'interfrange i vérifie $\Delta p(\text{position sur écran}) = 1 = \frac{ai}{\lambda D} \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$.
- Les ondes émises à des longueurs d'onde différentes sont incohérentes entre elles : il y a additivité des intensités lumineuses des systèmes de franges à des longueurs d'onde distinctes. Or, l'interfrange i de chaque système de franges varie avec λ . Donc, hormis au centre de l'écran, les différents systèmes de franges ne seront pas en coïncidence : cela mène à un brouillage des franges loin du centre de l'écran.
- Critère semi-quantitatif de brouillage : il y a brouillage des franges si la différences d'ordre d'interférences en un même point M de l'écran $\Delta p(\text{demi-largeur spectrale de la source}) \geq \frac{1}{2}$. A la limite :

$$\Delta p(\text{demi-largeur spectrale de la source}) = \frac{\delta(M)}{c} \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} - \nu_0 \right) = \frac{\delta(M)\Delta\nu}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta(M) = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Remarque : Il s'agit du fameux critère de brouillage $\delta(M) = c\tau_c = \ell_c$ la longueur de cohérence temporelle de la source.

Pour $\delta(M) > \frac{c}{\Delta\nu}$, l'intensité lumineuse est uniforme sur l'écran : le contraste est nul et on ne distingue plus de frange.

- Les ondes émises sur la plage infinitésimale de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ sont cohérentes entre elles. D'après la formule de Fresnel :

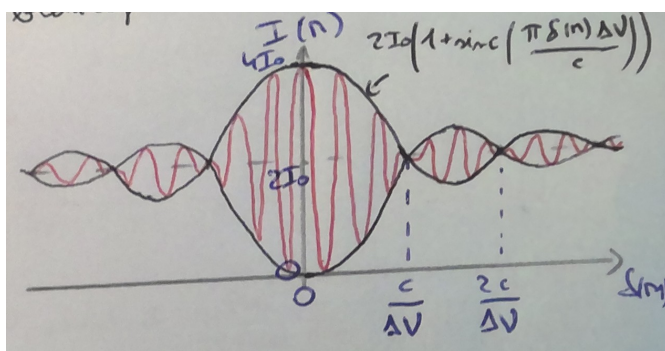
$$dI(M) = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta(M)\right) \right) d\nu$$

- D'après la Q.2, il y a additivité des intensités lumineuses :

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{\nu_0 + \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta(M)\right) \right) d\nu \\ &= 2I_0 \left(1 + \frac{1}{\Delta\nu} \times \frac{c}{2\pi\delta(M)} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{c}(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2})\delta(M)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{c}(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2})\delta(M)\right) \right) \right) \\ &= 2I_0 \left(1 + \frac{c}{\pi\delta(M)\Delta\nu} \times \sin\left(\frac{\pi\delta(M)\Delta\nu}{c}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)\nu_0}{c}\right) \right) \\ &= 2I_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta(M)}{c}\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta(M)}{c}\right) \right) \end{aligned}$$

- Fonction de contraste : $\gamma(M) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta(M)}{c}\right)$, évoluant lentement. Cette fonction caractérise l'évolution du contraste sur l'écran (maximal au centre, puis diminuant quand on s'approche des bords de l'écran).

$\cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta(M)}{c}\right)$ évoluant rapidement : il s'agit du terme d'interférences.



7.

8. 1ère annulation du contraste pour $\delta = \frac{c}{\Delta\nu}$: en accord avec le critère semi-quantitatif de la Q.3 !

Bon contraste revient à dire que la fonction de contraste doit rester plus grande que $\frac{1}{2}$ (critère que l'on pose).
Donc, en s'aidant du graphe fourni du sinc :

$$\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c} \leq 2 \Rightarrow \delta \leq \frac{2}{\pi} \frac{c}{\Delta\nu} = 0.6 \frac{c}{\Delta\nu} = 0.6\ell_c$$

Ex. 5 (Inspiré de Ecrit Centrale MPI 2023) Taille d'un pixel de l'écran d'un smartphone

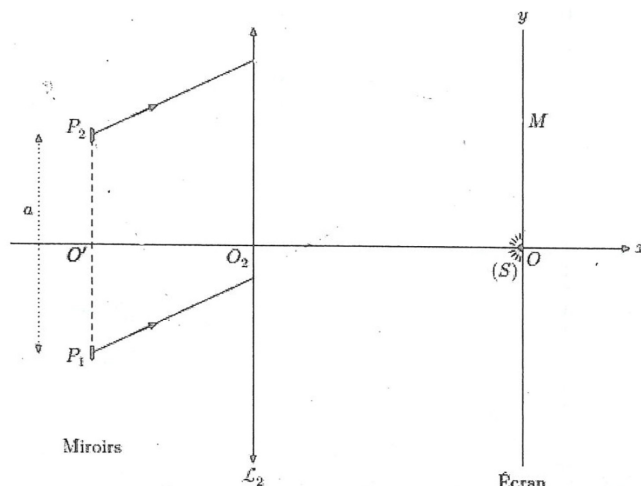
On souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté ci-dessus. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle S qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O .

Cette source S éclaire vers la gauche, les rayons qui en sont issus traversent la lentille \mathcal{L}_2 et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe (Oy) .

Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille \mathcal{L}_2 et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan Oyz formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $|y| \ll f'_2$ et $|z| \ll f'_2$.



Aide : Les rayons lumineux cheminent donc d'abord de la droite vers la gauche entre la source et les pixels, puis de la gauche vers la droite entre les pixels et l'écran. Ce montage est donc équivalent au montage classique des trous d'Young en configuration de Fraunhofer avec une "première" lentille \mathcal{L}_2 , puis une "seconde" lentille \mathcal{L}_2 .

1. A quelle distance de la lentille \mathcal{L}_2 doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de S ressortent parallèles entre eux après la lentille \mathcal{L}_2 ? Justifier alors que les rayons issus de P_1 et de P_2 et convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille \mathcal{L}_2 .
2. Recopier et compléter le trajet des deux rayons lumineux issus de S et interférant au point M placé sur l'écran. En le justifiant précisément, montrer tout d'abord que la différence de marche $\delta_{1/2}(M) = (SM)_1 - (SM)_2$ entre les deux ondes se ramène à $\delta_{1/2}(M) = (P_1M) - (P_2M)$, puis montrer qu'elle s'écrit $\delta_{1/2}(M) = \frac{ay}{f'_2}$.

3. En déduire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.
4. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y , la coordonnée du point M sur l'axe (Oy) . On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un miroir seulement. Représenter graphiquement $I(y)$ et faire apparaître l'interfrange i .
5. Le point source S est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche $\delta_{1/2}(M)$ au point M en fonction de a , y , y_S et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source S induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

6. À l'aide d'un critère semi-quantitatif (à énoncer), basé sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale c_{max} au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement c_{max} dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45.5 \text{ cm}$, $a = 80 \mu\text{m}$ et une longueur d'onde $\lambda = 589 \text{ nm}$. Conclure.

Montage avec un laser

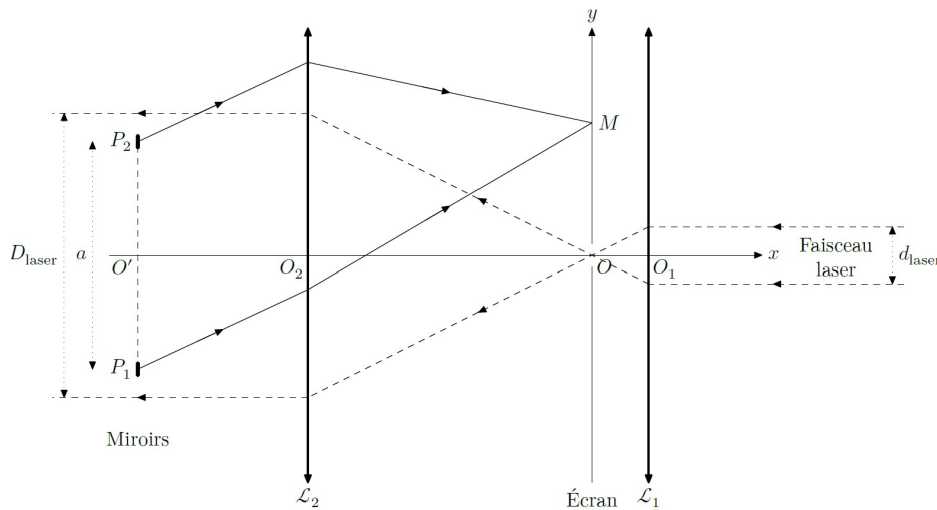


Figure 7 Deuxième montage : laser et miroirs

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en figure 7. De plus, on insère une lentille \mathcal{L}_1 de distance focale $f'_1 = 10.5 \text{ cm}$ entre le laser et l'écran.

7. On souhaite élargir le diamètre du faisceau laser : soit d_{laser} son diamètre avant traversée de la lentille \mathcal{L}_1 et D_{laser} son diamètre après traversée de la lentille \mathcal{L}_2 . Préciser comment doit être disposée la lentille \mathcal{L}_1 par rapport à \mathcal{L}_2 pour qu'à la sortie de \mathcal{L}_2 , on obtienne un faisceau cylindrique de diamètre D_{laser} comme indiqué sur la figure 7. Exprimer le rapport D_{laser}/d_{laser} en fonction des paramètres du système. Faire l'application numérique.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a (figure 8). Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

8. En utilisant les résultats de la question 5, exprimer sans calculs les différences de marches au point M , $\delta_{i/1}(M) = (SM)_i - (SM)_1$ avec $i = 2, 3, 4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a} \quad ; \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right)$$

où k et m sont deux nombres entiers.

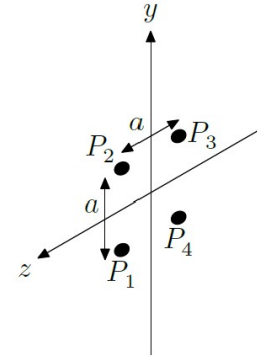


Figure 8 Disposition des 4 miroirs

On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs répartis périodiquement avec une période a selon y et selon z . Par un raisonnement similaire à celui effectué ci-avant, on montre qu'on observe sur l'écran un réseau carré de maxima d'éclairement aux points de coordonnées (y_k, z_m) .

Détermination de la taille d'un pixel



Figure 9 Dernier montage : détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels. Le montage est représenté sur la figure 9 et est réalisé comme suit.

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille \mathcal{L}_1 , un écran troué en son centre, une lentille \mathcal{L}_2 et le téléphone.
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone.
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après.
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10.5 \text{ cm}$ et $f'_2 = 45.5 \text{ cm}$. Leur incertitude-type vaut $u(f') = 0.30 \text{ cm}$.

La figure 10 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda = 532 \text{ nm}$ avec son incertitude-type $u(\lambda) = 10 \text{ nm}$). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de 4.0 mm .

9. Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type.

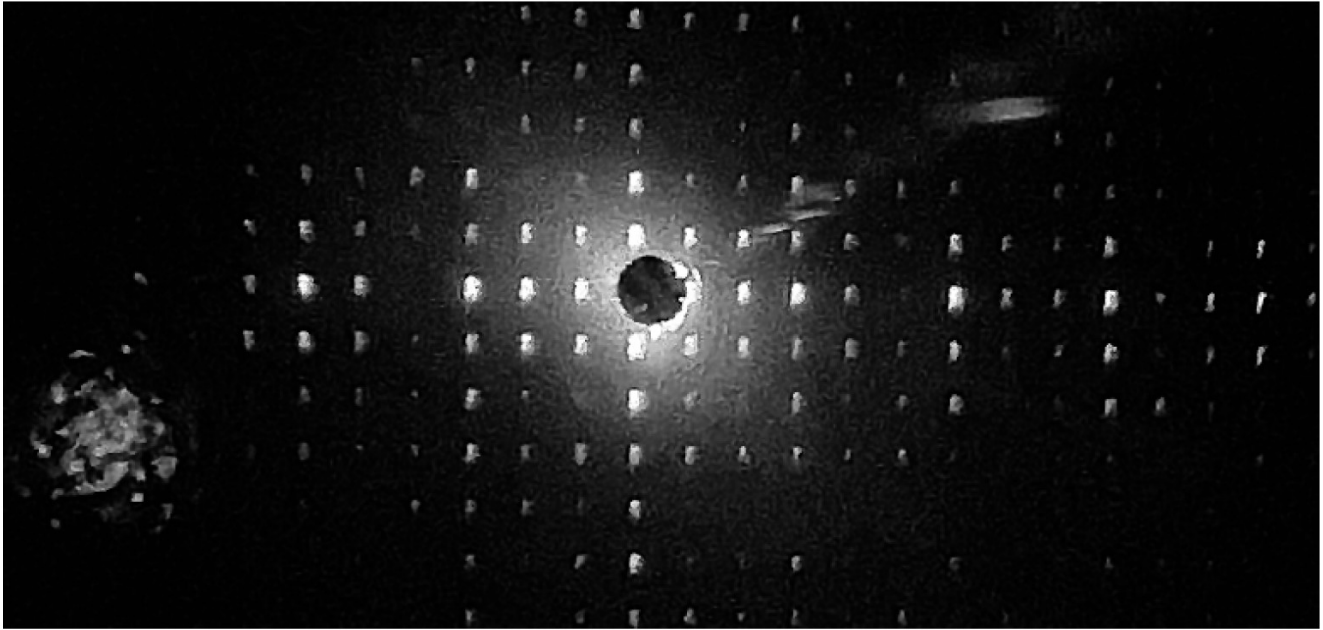


Figure 10 Image visible sur l'écran

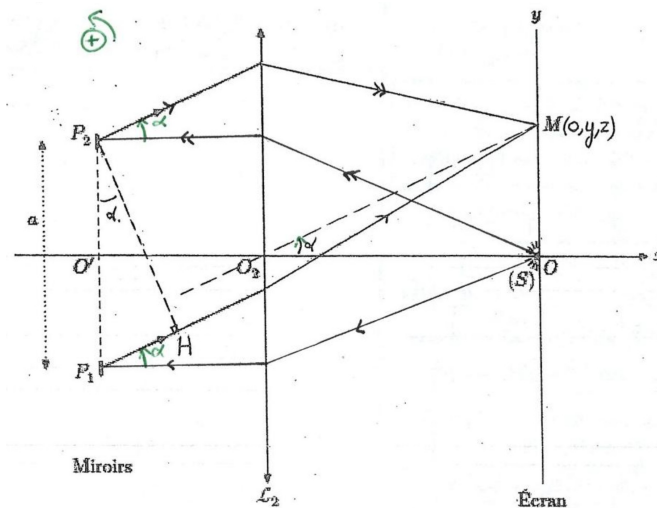
Correction de l'exercice 5

1. Les rayons issus de S ressortent parallèles entre eux après la lentille si S appartient au plan focal objet de \mathcal{L}_2 . Donc, la distance lentille \mathcal{L}_2 - écran doit être f'_2 .



En P_1 et en P_2 , un phénomène de diffraction se produit. Ce n'est donc pas parce que les rayons sont parallèles entre eux avant d'atteindre P_1 et P_2 qu'ils seront nécessairement parallèles entre eux après P_1 et P_2 .

Le point M appartient au plan focal image de \mathcal{L}_2 . Nécessairement, les rayons convergeant en M sont parallèles entre eux avant la lentille.



2. D'après le théorème de Malus, P_1 et P_2 appartiennent à la même surface d'onde relative à S . Donc, $(SP_1) = (SP_2)$. Ainsi, $\delta_{1/2} = (P_1M) - (P_2M)$.

D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, P_2 et H appartiennent à la même surface d'onde relative à M . Ainsi, $(P_2M) = (HM)$. Ainsi, $\delta_{1/2} = (P_1H) = P_1H$.

Géométriquement, $P_1H = a \sin(\alpha) \simeq a \tan(\alpha) = \frac{ay}{f'_2}$ d'après les conditions de Gauss ($|y| \ll f'_2$).

Donc, $\delta_{1/2} = \frac{ay}{f'_2}$.

3. Ainsi, l'ordre d'interférences est $p(M) = \frac{\delta_{1/2}(M)}{\lambda} = \frac{ay}{\lambda f'_2}$.

$p(M) = \text{cste} \Rightarrow y = \text{cste}$: les franges sont rectilignes d'équation $y = \text{cste}$.

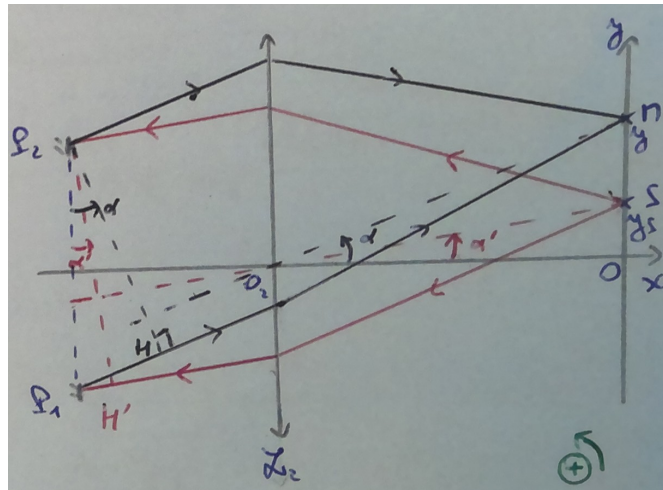
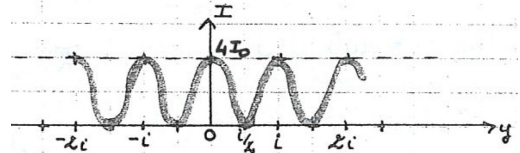
L'interfrange est la plus petite distance entre deux franges brillantes. On peut le déterminer via :

$$\Delta p(\text{position } M \text{ sur l'écran}) = 1 = \frac{ai}{\lambda f'_2} \Rightarrow i = \frac{\lambda f'_2}{a}$$

4. .

Les deux ondes arrivant en M étant cohérentes entre elles, la formule de Fresnel donne :

$$I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2} \right) \right)$$



5. D'après le théorème de Malus, P_2 et H' appartiennent à la même surface d'onde relative à S : $(SP_2) = (SH')$.
Ainsi, $(SP_1) - (SP_2) = (H'P_1) = H'P_1 \simeq \frac{ay_S}{f'_2} > 0$ dans les conditions de Gauss.

En reprenant le raisonnement de la Q.2, on aboutit à :

$$\delta_{1/2}(M) = \frac{a}{f'_2} (y + y_S)$$

Le déplacement de la source S selon l'axe Oz ne change pas la différence de marche.

Effet du déplacement de S : L'ordre d'interférences devient donc $p(M) = \frac{ay}{\lambda f'_2} + \underbrace{\frac{ay_S}{\lambda f'_2}}_{\text{indépendant de } M}$. Ainsi, la

forme des franges est inchangée, l'interfrange est inchangé : le déplacement de S induit une translation de la figure d'interférences (vers les y décroissants si $y_S > 0$).

Je vous mets une correction manuscrite pour la fin de l'exercice. Les numéros des Q. ne sont pas respectés.

Q8. Avec une fente source de largeur c , les pixels P_1 et P_2 sont éclairés par des sources incohérentes spatialement entre elles, donnant chacune leur figure d'interférence. Ces figures se superposent au point M , entraînant un brouillage des franges d'interférences.

Critère : pour une source monochromatique, mais étendue spatialement, les franges sont non brouillées tant que $|\Delta \phi_M(\text{demi-étendue spatiale})| < \frac{1}{2}$.

Elles se brouillent dès que $|\Delta \phi_M(\text{étendue spatiale des } \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}$.

• Cas $y_s = 0$: $P_M(y_s = 0) = \frac{ay}{\lambda f_1}$

• Cas $y_s = \frac{c}{2}$: $P_M(y_s = \frac{c}{2}) = \frac{a}{\lambda f_1} (\frac{c}{2} + y)$

• $\frac{a}{\lambda f_1} \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c_{\max} = \frac{\lambda f_1}{a} = 3,35 \text{ mm}$

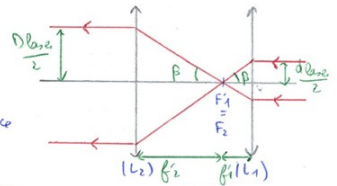
• A.N. $c_{\max} = \frac{589 \cdot 10^{-9} \cdot 45,5 \cdot 10^{-2}}{80 \cdot 10^{-6}} = 3,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Il est très difficile d'obtenir une figure plus lumineuse avec un dispositif à division du front d'onde avec une source large, car dès qu'on ouvre la fente le brouillage apparaît pour moins de 4 mm de largeur.

II.B.3) Montage avec laser

22) Élargisseur de faisceau :

On souhaite créer un système $\{L_1\} + \{L_2\}$ afocal : il faut que le foyer image de L_1 coïncide avec le foyer objet de L_2 : $F_1 = F_2$. La distance $(L_1) - (L_2)$ doit donc être $f_1' + f_2$.



Géométriquement : $\tan(\theta) = \frac{d_{\text{laser}}/2}{f_1'} = \frac{d_{\text{laser}}/2}{f_2}$

$\Rightarrow \frac{d_{\text{laser}}}{d_{\text{laser}}} = \frac{f_2}{f_1'} = 4,33$

Q.23. Les pixels sont éclairés par le faisceau de lumière laser.

$\delta_{1,1}(M) = (S_M)_1 - (S_M)_1 = (P_1 M) - (P_1 M)$

* $\delta_{2,1}(M) = (P_2 M) - (P_1 M) = -\delta_{1,2}(M)$ fait à la question Q4.

$\delta_{2,1}(M) = -\frac{ay}{f_2}$

* $\delta_{3,1}(M) = (P_3 M) - (P_1 M) = +\frac{az}{f_3}$ face analogie

* $\delta_{3,1}(M) = (P_3 M) - (P_1 M) = \underbrace{(P_3 M) - (P_2 M)}_{+\frac{az}{f_3}} + \underbrace{(P_2 M) - (P_1 M)}_{-\frac{ay}{f_2}}$

$\delta_{3,1}(M) = \frac{a}{f_3} (z - y)$

* $\Delta \phi_{1,1}(M) = 2\pi \frac{\delta_{1,1}(M)}{\lambda} \Rightarrow$ les ondes sont en phase

si $\Delta \phi_{1,1}(M) = m \cdot 2\pi$, soit $\delta_{1,1}(M) = m \cdot \lambda$, $m \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \delta_{1,1}(M) = \frac{ay}{f_1} = k \cdot \lambda$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_k = k \cdot \frac{\lambda f_1}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \delta_{2,1}(M) = \frac{az}{f_2} = m \cdot \lambda$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_m = m \cdot \frac{\lambda f_2}{a}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \delta_{3,1}(M) = \frac{az}{f_3} - \frac{ay}{f_2} = m \cdot \lambda - k \cdot \lambda = (m - k) \cdot \lambda$, $(m - k) \in \mathbb{Z}$

Si les ondes issues de P_1 , P_2 et P_3 sont en phase, alors celles issues de P_1 et P_3 sont aussi en phase : elles sont donc toutes en phase.

26) Échelle de l'image : Diamètre du trou : réel : $d = 4,0 \text{ mm}$

image : $d' = 8,5 \text{ mm}$

Distance entre deux maxima selon l'axe vertical (on voit clairement les maxima d'intensité) : $\Delta y = \frac{\lambda f_2}{2}$

On mesure sur l'image : $12 \Delta y' = 7,5 \text{ cm}$

Distance a entre 2 pixels :

$a = \frac{\lambda f_2}{\Delta y} = \frac{\lambda f_2}{12 \Delta y'} \times \frac{12 d'}{d}$ A.N. : $a = 82,3 \text{ } \mu\text{m}$

Incertitudes :

| Grandeur | Source d'incertitude | Incertitude - type |
|----------------|-----------------------|--|
| d' | Précision de la règle | $u(d') = \frac{1 \text{ mm}}{2\sqrt{3}} = 0,29 \text{ mm}$ |
| $12 \Delta y'$ | | $u(12 \Delta y') = 0,23 \text{ mm}$ |

On considère $u(d) = 0$.

On nous donne : $u(\lambda) = 10 \text{ nm}$; $u(f_2) = 0,30 \text{ cm}$.

Composition d'incertitude :

$u(a) = a \times \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{f_2}\right)^2 + \left(\frac{u(12 \Delta y')}{12 \Delta y'}\right)^2 + \left(\frac{u(d')}{d'}\right)^2}$

$= 3,3 \text{ } \mu\text{m}$

On arrondit à $4 \text{ } \mu\text{m}$.

Donc : $a = (82 \pm 4) \text{ } \mu\text{m}$