TD diffusion thermique

I. **Résistance thermique d'une façade**

La température intérieure d'une maison est $T_i = 20^0C$ et la température extérieure est $T_e = 0^0C$. On étudie les pertes thermiques en régime stationnaire pour une façade de surface $S = 30\ m^2$ de la maison à travers de laquelle est percée une fenêtre de surface $s = 6\ m^2$. La façade est constituée d'une épaisseur $e_b = 20\ cm$ de béton et d'une épaisseur $e_p = 10\ cm$ de polystyrène expansé.

Cas 1: La fenêtre est en simple vitrage d'épaisseur $e_v = 0,5\ cm$.

Cas 2: La fenêtre est en double vitrage constitué de deux vitres d'épaisseur $e = 0,5\ cm$ et d'une tranche d'air de même épaisseur e.

Données:

Matériau	béton	polystyrène	verre	air
Conductivité thermique ($W.K^{-1}.m^{-1}$)	1	4.10^{-3}	3.10^{-2}	1

Utiliser un modèle électrique pour calculer les pertes thermiques à travers la façade dans les deux cas.

Réponses: Cas 1: $P = 734\ W$ *Cas 2:* $P = 371\ W$

II. **Isolation du plafond**

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^0C$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_1 = 10.10^{-3}\ K.W^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_2 = 2.10^{-3}\ K.W^{-1}$. La température de l'extérieur (sol et air) est $T_e = 10^0C$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.

2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique R_2' de ce matériau afin de réaliser une économie de 50 % sur la puissance thermique P (soit de fournir la puissance $P' = P/2$ pour maintenir la température de la pièce constante).

Réponses: 1- $P = 6\ kW$ *2-* $R_2' = 3.10^{-3}\ K.W^{-1}$

III. **Chauffage d'une maison**

On étudie une maison supposée parfaitement isolée au niveau du sol et du plafond. On note C la capacité thermique de l'intérieur de la maison, R_1 la résistance thermique des murs, R_2 la résistance thermique des fenêtres et R_3 la résistance thermique de la porte. Données: $C = 5,0.10^3\ kJ.K^{-1}$, $R_1 = 10.10^{-3}\ K.W^{-1}$, $R_2 = 5,0.10^{-3}\ K.W^{-1}$ et $R_3 = 2,0.10^{-3}\ K.W^{-1}$

1. Etablir un modèle électrique permettant d'évaluer la puissance du chauffage nécessaire pour maintenir la température de la pièce constante. Données: température extérieure: $T_{ext} = 10^0C$ et température intérieure: $T_{int} = 20^0C$.

2. A un instante $t = 0$, la température intérieure la maison est $T_0 = 20^0C$, l'un des chauffages tombe en panne et le chauffage fournit une puissance $P' = 6,0\ kW$. Que se passe-t-il? Montrer que la température intérieure vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$. Exprimer et calculer τ et T_∞ en précisant leur sens physique. Donnée: $T_{ext} = 10^0C$.

Réponses: 1- $P = 8,0\ kW$ *2-* $\tau = 6,2.10^3\ s$ *et* $T_\infty = 17,5^0C$

IV. **Equilibre thermique d'une brebis**

On modélise une brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $T_{eq} = 39^0C$ de longueur $L = 100\ cm$ et de section carrée de côté $H = 30\ cm$. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10\ cm$ de laine avant la tonte à $e = e_m = 0,5\ cm$ après la tonte. On donne la conductivité thermique de la laine $\lambda_{laine} = 0,040\ SI$.

1. Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bord. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques: la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

2. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique égal à $j_{cc} = h(T_{ext} - T_{air})$ où T_{ext} est la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air}. On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4,0\ W.m^{-2}.K^{-1}$. En déduire la résistance de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

3. Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r. Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme $P_r = KA(T_{ext} - T_{air})$ où A est l'aire de la surface extérieure de la brebis prise pou $e = 0$ et K une constante de valeur $K = 5,0\ W.m^{-2}.K^{-1}$. Exprimer et calculer la résistance thermique de rayonnement R_r.

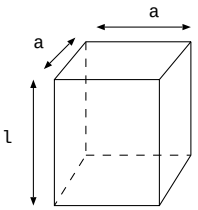
4. Faire un schéma électrique équivalent des échanges thermiques de la brebis de température T_{eq} avec l'air extérieur de température T_{air}. On note T_{ext} la température de surface de la brebis. Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

En déduire les puissances P_1 et P_2 que doit fournir le métabolisme d'une brebis non tondue ou d'une brebis tondue pour maintenir sa température interne constante pour une température de l'air de 10^0C. Calculer T_{ext} dans les deux cas.

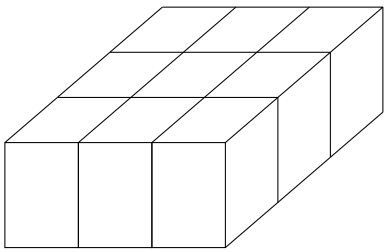
Réponses : $R_1 = 1,88\ K.W^{-1}$, $R_2 = 0,17\ K.W^{-1}$, $R_{cc} = 0,181\ K.W^{-1}$, $R_r = 0,145\ K.W^{-1}$, $P_1 = 18\ W$ *et* $P_2 = 207\ W$

V. **Assemblée de manchots**

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée, de côté $a = 0,10\ m$ et de hauteur $l = 0,50\ m$ (figure (1)). Le manchot, animal à sang chaud, maintient sa température interne T_i constante au moyen d'un apport métabolique $\mathcal{P}_1$ qui compense les pertes thermiques par conduction thermique au travers d'un revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1,0\ cm$ et de conductivité λ, face à la température extérieure $T_e = -20^0C$ (y compris au niveau du sol).



(1)


(2)

1. Calculer l'aire du corps du manchot A_1.

2. Exprimer les pertes thermiques d'un manchot isolé à travers son revêtement de plumes d'épaisseur e et de conductivité thermique λ. Le métabolisme du manchot isolé lui fournit une puissance $\mathcal{P}_1$ pour maintenir sa température interne constante et égale à $T_i = 37^0C$. Exprimer $\mathcal{P}_1$ en fonction de A_1, e, T_i, T_e et λ. Donnée: $\mathcal{P}_1 = 50\ W$, calculer λ.

3. Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots de serrent comme représenté sur la figure (2). Le pavage étant parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. Calculer l'aire A_9 exposée à la température T_e et la puissance métabolique $\mathcal{P}_9$ nécessaire au maintien de la température interne de ces neuf manchots. En déduire la puissance moyenne fournie par le métabolisme d'un manchot dans ce groupe de 9 manchots qui se serrent les uns contre les autres (comportement social thermorégulateur).

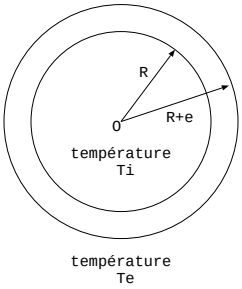
4. On considère un manchot isolé dont le métabolisme ne produit plus que la puissance $P_1 = 45\ W$. On note c la capacité thermique massique de ce manchot et R_{th} la résistance thermique de l'épaisseur e de plumes. La température extérieure est $T_{ext} = -20^0C$. Déduire du premier principe de la thermodynamique appliqué au manchot entre t et $t + dt$ que $T_i(t)$ (la température intérieure du manchot) vérifie une équation

différentielle de la forme $\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$. Exprimer τ et T_f en fonction de P_1, R_{th} et des notations de l'énoncé. Calculer R_{th}, T_f et τ pour $\lambda = 0,04\ SI$, $c = 4,18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$ la masse volumique du manchot. En déduire $T_i(t)$ et représenter la courbe associée à cette fonction. Que représentent T_f et τ?

Réponses: $A_1 = 0,22\ m^2$, $\lambda = 4,0.1^{-2}\ SI$, $P_9 = 180\ W$, $R_{th} = 1,14\ SI$, $T_f = 31^0C$, $\tau = 2,38.10^4\ s$

VI. **Chouette harfang**

On modélise le corps de l'oiseau par une sphère homogène de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ, maintenue à la température corporelle T_i. Il est enveloppé par une couche isolante d'épaisseur e représentant le plumage. On étudie la conduction thermique dans le plumage de conductivité λ avec comme conditions aux limites : $T(r = R) = T_i$ et $T(r = R + e) = T_e$. La température T_e est la température extérieure inférieure à T_i. Il n'y pas de source de chaleur à l'intérieur du plumage.



1. Déterminer la direction, le sens et la (ou les) variables du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$.

2. Exprimer le flux thermique perdu à travers une sphère de rayon r avec $R < r < R + e$ et de centre O. Montrer qu'en régime permanent ce flux ne dépend pas de r.

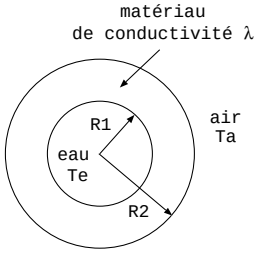
3. Déduire de la loi de Fourier et des résultats de la question précédente, l'expression de la puissance thermique dissipée par le plumage en fonction de T_1, T_2, R, e et λ. On donne $\overrightarrow{\text{grad}}\ T(r) = \frac{dT}{dr}\overrightarrow{e_r}$.

4. On suppose $e << R$. On note P_m, la puissance produite par le métabolisme de la chouette. Exprimer l'épaisseur e de la couche de plume pour que la température interne de la chouette reste constante.

Réponse: 3- $P_{th} = \frac{4\pi\lambda R(R+e)(T_i - T_e)}{e}$ *4-* $e = \frac{4\pi R^2\lambda(T_i - T_e)}{P_m}$

VII. **Canalisation d'eau**

De l'eau circule dans une canalisation de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2. La conductivité thermique du matériau de la canalisation est notée λ. On suppose la température de l'eau constante dans la canalisation $T_e = 65^0C$. L'air extérieur est à la température $T_a = 20^0C$. On se place en régime permanent et on néglige tout phénomène de convection dans l'eau et dans l'air extérieur.



1. Donner l'expression générale de $\overrightarrow{j_Q}$ en coordonnées cylindriques. En déduire, en fonction de r, L, $j_Q(r)$, l'expression de $P_{th}(r)$, la puissance thermique perdue par le cylindre de longueur L et de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$.

On suppose que T et $\overrightarrow{j_Q}$ ne dépendent que de r. On donne $\overrightarrow{\text{grad}}\ T = \frac{dT}{dr}\overrightarrow{e_r}$.

2. Déduire de la conservation de l'énergie sur un système bien choisi que P_{th} ne dépend pas de r.

3. Déduire de la loi de Fourier et des résultats précédents l'expression de P_{th} en fonction de $T_e - T_a$, R_1, R_2, λ et L.

4. On considère une longueur de canalisation $L = 50\ m$ avec $R_1 = 6\ mm$ et $R_2 = 7\ mm$, de conductivité thermique $\lambda = 400\ SI$. Estimer l'énergie thermique perdue en une heure.

Réponse : $P_{th} = \frac{\lambda 2\pi L(T_e - T_a)}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

VIII. **Chauffage d'une pièce par une PAC**

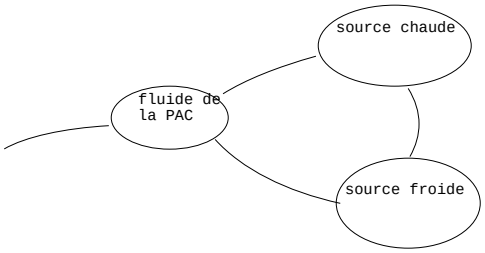
Il fait une température $T_{int} = 20\ ^0C$ à l'intérieur d'une salle à manger alors que la température extérieure est $T_{ext} = 3\ ^0C$. On étudie les fuites thermiques en régime stationnaire à travers les murs et les baies vitrées de la salle à manger. Les murs sont constitués d'une épaisseur $e_b = 20\ cm$ de béton recouvert d'une seule épaisseur $e_p = 10\ cm$ de polystyrène expansé. La surface totale du mur entre la salle à manger et l'extérieur est $S = 60\ m^2$. Ce mur est percé de quatre fenêtres en simple vitrage, constituées d'une épaisseur $e_v = 1\ cm$ de verre. Chaque fenêtre a pour surface $s = 2\ m^2$.

On donne: pour le béton et pour le verre : $\lambda = 1\ SI$ et pour le polystyrène $\lambda_p = 4.10^{-3}\ SI$.

1. Utiliser un modèle électrique pour calculer la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$ liée aux fuites thermiques à travers le mur et les fenêtres. On note R_{th}, la résistance thermique équivalente de l'ensemble constitué des murs et de la fenêtre. AN: Calculer R_{th} et P_{th}.

Pour chauffer la pièce, on utilise une pompe à chaleur qui échange les puissances thermiques $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_f$, avec les sources chaude et froide et qui reçoit la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$. Toutes ces puissances sont ici des grandeurs positives.

2. Compléter le schéma en ajoutant les puissances $\mathcal{P}_f$, $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_{th}$ et les sens réels de ces puissances échangées et préciser qui sont les sources froide et chaude. L'efficacité de la PAC est $e = 3$. On cherche la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ à fournir à la PAC pour maintenir la température de la pièce constante. Appliquer le premier principe de la thermodynamique à la source chaude et en déduire $\mathcal{P}_m$.



3. La puissance mécanique de la PAC est $\mathcal{P}'_m = 3\ kW$. Justifier que la température de la pièce va diminuer. On note C la capacité thermique de l'air de la pièce et $T_{int}(t)$ sa température. Par application du premier principe à l'air de la pièce montrer que l'équation différentielle vérifiée par T_{int} se met sous la forme: $\dfrac{dT_{int}}{dt} + \dfrac{T_{int}}{\tau} = \dfrac{T_m}{\tau}$.

Exprimer τ et T_m en fonction des données. Exprimer $T_{int}(t)$ et tracer la courbe associée à cette fonction. Que représente T_m?

Réponses: 1- $\mathcal{P}_{th} = 13,6\ kW$ *2-* $\mathcal{P}_m = 4,5\ kW$ *3-* $\tau = R_{th}C$ *et* $T_m = T_{ext} + eR_{th}\mathcal{P}_m$

IX. **Ailette de refroidissement**

Une ailette de refroidissement cylindrique de rayon R de longueur L grande devant R est plongée dans un fluide en mouvement de température T_F. On négligera la chaleur perdue par l'extrémité de l'ailette. La base de l'ailette est en contact avec un thermostat qui impose la température $T(x = 0) = T_0$.

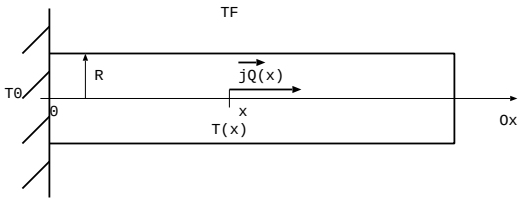
Dans l'ailette on observe un phénomène de diffusion thermique de vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x)\overrightarrow{e_x}$. L'ailette a pour conductivité thermique λ.

Sur la surface latérale de l'ailette, on observe le phénomène de conducto-convection qui suit la loi de Newton : $j_{cc}(x) = h(T(x) - T_F)$, où j_{cc} est le flux thermique surfacique sortant de l'ailette à l'abscisse x en régime stationnaire, $T(x)$ la température de l'ailette à l'abscisse x et h le coefficient de transfert convecto-diffusif.

1. Montrer que $T(x)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{T}{\delta^2} = -\dfrac{T_F}{\delta^2}$. Exprimer δ en fonction de λ, h et R et préciser son unité.

2. En déduire l'expression de $T(x)$.

3. En déduire la puissance thermique dégagée par la surface latérale de l'ailette.



Réponses : *1-* $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{2h}}$ *2-* $T(x) = T_F + (T_0 - T_F)e^{-x/\delta}$ *3-* $P = 2\pi Rh\delta(T_0 - T_F)$

X. **Température d'un mammifère**

On modélise un mammifère par une boule de rayon a et de centre O. Son métabolisme produit une puissance volumique uniforme p qui lui permet de maintenir une température T_i uniforme dans tout l'organisme. Le mammifère est plongé dans un fluide de conductivité thermique λ dont la température très loin du mammifère est uniforme et vaut $T_0 = 20^0C < T_i$. Le vecteur densité de courant thermique dans le fluide s'écrit $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques avec $r = OM$.

1. Préciser le signe de j_Q en expliquant la situation.

2. On définit $P_{th}(r)$, la puissance thermique perdue par la sphère de rayon $r \geq a$. Exprimer $P_{th}(r)$ en fonction de $j_Q(r)$ et de r. Montrer, par un bilan d'énergie à un système élémentaire, que P_{th} ne dépend pas de r.

3. Déduire d'un bilan d'énergie appliqué au mammifère, l'expression de P_{th} en fonction de p et a.

4. Ecrire la loi de Fourier et déduire des questions précédentes que la température dans le fluide s'écrit $T(r) = T_0 + \dfrac{a^3 p}{3\lambda r}$. Donnée: $\overrightarrow{\text{grad}}\, T(r) = \dfrac{dT}{dr}\overrightarrow{e_r}$.

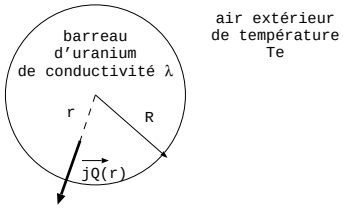
5. En déduire la température cutanée. Soit un mammifère pour lequel $a = 25\ cm$ de température cutanée $T_c = 30^0C$. Déterminer p selon que le mammifère vit dans l'air ou dans l'eau. Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins? Données: $\lambda_{air} = 5\ W.K^{-1}.m^{-1}$ et $\lambda_{eau} = 500\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

Réponses: 3- $P_{th} = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ *5-* $p_{air} = 9,6\ kW.m^{-3}$ *et* $p_{eau} = 960\ kW.m^{-3}$

XI. **Réactions nucléaires**

La réaction nucléaire qui se produit dans un barreau d'uranium dégage une puissance volumique $p_v = 700\ MW.m^{-3}$. L'uranium a pour conductivité thermique $\lambda = 27\ SI$. L'étude se fait en régime stationnaire.

L'uranium est contenu dans un barreau d'axe Oz, de rayon $R = 10\ mm$ et une longueur L suffisante pour que l'on néglige les effets de bord. On note $\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$, le vecteur densité de courant thermique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le barreau. L'air extérieur est à la température $T_e = 200^0\ C$.



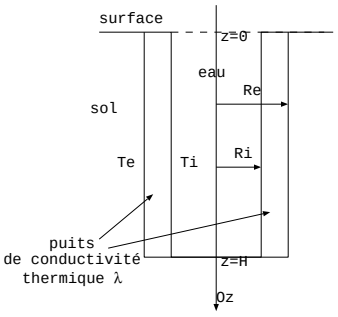
1. Déduire de la loi de Fourier et d'un bilan d'énergie au système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ (avec $r+dr < R$) et de longueur L, que l'on a $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr}) = -\dfrac{p_v r}{\lambda}$. On donne $\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \dfrac{dT}{dr}\overrightarrow{e_r}$.

2. Calculer la température maximale dans le barreau. En quels points est-elle atteinte?

Réponses : $T(r) = \dfrac{-p_v}{4\lambda}(r^2 - R^2) + T_e$ *et* $T_{max} = 850^0\ C$.

XII. **Conduction de la chaleur dans un puits**

Un puits d'alimentation en eau est modélisé par un cylindre de révolution vertical, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e, homogène et de conductivité thermique λ. On repère la profondeur à partir de la surface à l'aide d'un axe vertical Oz orienté vers le bas. A l'intérieur du puits se trouve de l'eau à la température T_i et à l'extérieur se trouve le sol de température T_e.



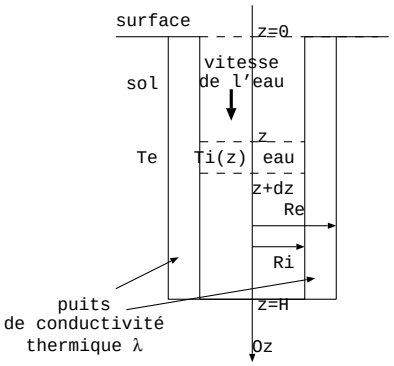
On suppose pour l'instant que toute la surface intérieure du puits est maintenue à la température $T(r = R_i) = T_i$ et que la surface extérieure est maintenue à la température $T(r = R_e) = T_e$ (uniforme également). Les extrémités du tube ($z = 0$ et $z = H$) sont parfaitement isolées thermiquement: T ne dépend que de la distance r à l'axe Oz et on note $\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$ le vecteur densité de courant thermique. On note $\phi(r)$ le flux thermique sortant du cylindre de hauteur H et de rayon r.

1. Justifier qu'en régime stationnaire, le flux thermique ϕ est le même à travers tout cylindre de hauteur H, d'axe Oz et de rayon r tel que $R_i < r < R_e$.

2. Déterminer la résistance thermique R_{th} de cette conduite en fonction de R_i, R_e, H et λ.

3. En déduire l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur du tube, pour r tel que $R_i < r < R_e$ uniquement en fonction de T_i, T_e, R_i, R_e et r.

En réalité la température de l'eau dans le puits dépend de la profondeur z. On note $T_i(z)$, la température de l'eau à la profondeur z. La température du sol est toujours T_e et est homogène. La température de la paroi du puits ne dépend que de z et de la distance r à l'axe de symétrie Oz du puits, on note $T(r, z)$. On se place en régime stationnaire. On considère que le transfert thermique ne se fait que radialement (on néglige les transferts thermiques par conduction dans la direction Oz). L'eau chaude descend (sens z décroissant) dans le puits. On note c la capacité thermique massique de l'eau, ρ sa masse volumique, et D_m son débit massique.



4. Appliquer le premier principe industriel à la tranche d'eau comprise entre les hauteur z et $z + dz$. En déduire la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de D_m, c, dz et $\frac{dT_i}{dz}$.

5. Exprimer, en utilisant la résistance thermique et les résultats de la question 2, la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de $T_i(z)$, T_e, λ, dz, R_e et R_i.

6. Déduire des deux questions précédentes que $T_i(z)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{dT_i}{dz} + \frac{T_i}{\delta} = \frac{T_e}{\delta}$. Exprimer δ en fonction de λ, D_m, c, R_e et R_i.

7. Exprimer $T_i(z)$ pour $T_i(z = 0) = T_0$.