Exercices supplémentaires à rendre au retour des vacances de Toussaint

I. **Expérience de Rüchardt**

Ce sujet propose une étude de l'expérience de Rüchardt. Elle consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 1). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz).

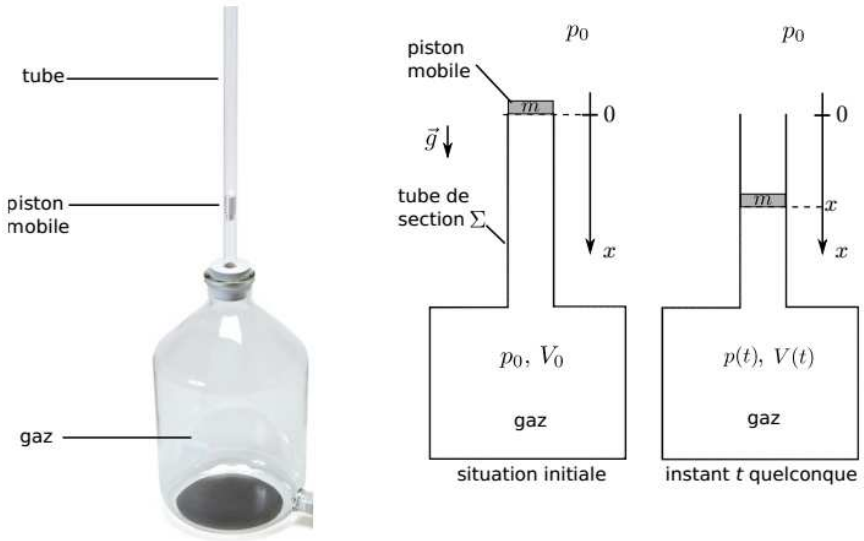


Figure 1 : photographie et schéma de l'expérience.

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ de divers gaz.

On utilise les notations de la figure 1.

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston)

- $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. La pression du gaz est notée $P(t)$ et sa température $T(t)$

- La pression atmosphérique est P_0. C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial

- La section du tube est notée S

- La masse du piston est m et l'intensité de la pesanteur est g

- $\overrightarrow{e_x}$ est un vecteur unitaire descendant.

1. Ecrire la relation donnant $V(t)$ en fonction de V_0, S et l'abscisse x du piston.

2. On suppose que le gaz dans le récipient se comporte comme un GP et que les transformations qu'il subit sont adiabatiques et réversibles. Montrer que $P(t) \approx P_0(1 + \frac{\gamma Sx}{V_0})$ en supposant que $Sx << V_0$.

3. En déduire que la résultante des forces de pression sur le piston se met sous la forme $\overrightarrow{F} = -\gamma kx\overrightarrow{e_x}$ où k est une constante à exprimer en fonction des données.

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 2. L'amortissement de la courbe $x(t)$ montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). Les phénomènes dissipatifs sont modélisées par une force de la forme $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}$ exercée sur le piston où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du piston et h une constante relative aux phénomènes dissipatifs.

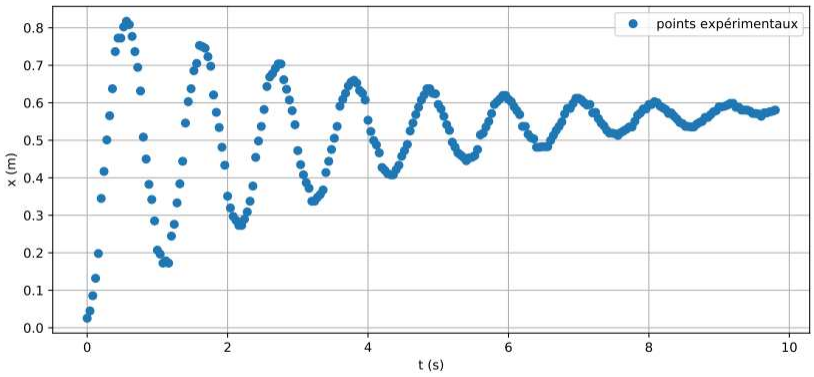


Figure 2 : données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

4. Montrer que $x(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$. Exprimer ω_0, Q et x_e en fonction des données et préciser le sens physique de ces trois grandeurs.

5. En vous aidant de la figure 2, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de Q. Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système?

6. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_e, ω_0, Q et de deux constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à calculer.

7. Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant l'expression de $x(t)$ et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de γ et de Q. Donnée: $\dfrac{m}{k} = 4,01.10^{-2}\ s^2$.

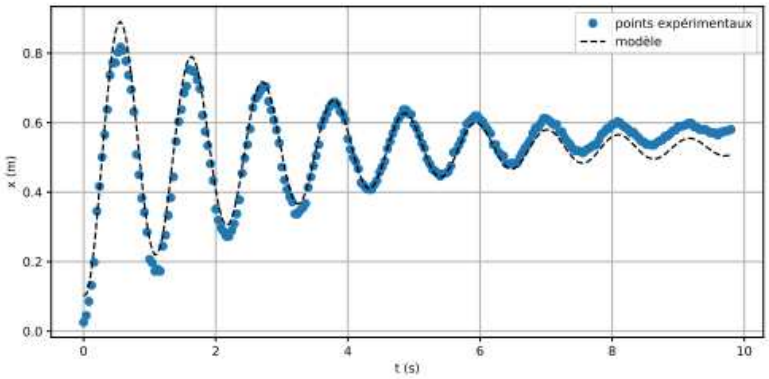


Figure 3 : données et modèle du type `C + (A*cos(Omega*t) + B*sin(Omega*t))*exp(-mu*t)`.
Le programme retourne, en unités cohérentes SI :
`Omega=5.83, mu=0.30, A=-0.43, B=-0.059, C=0.53.`

II. **PAC avec pseudo-sources**

Rappel: la variation d'énergie interne d'une masse m de liquide de capacité thermique massique c s'écrit $dU = mcdT$ *où* dT *est la variation de température du liquide.*

Soit une pompe à chaleur qui fonctionne avec deux seaux contenant chacun une masse d'eau à la même température initiale qui constituent la source froide et la source chaude. Les températures de l'eau dans les deux seaux varient au cours de l'expérience. À la date $t = 0$, on met en marche la pompe à chaleur alors que les deux seaux contiennent chacun $m_e = 4\ kg$ d'eau à la même température T_0. On note c_e la capacité thermique massique de l'eau. Au cours d'un cycle infinitésimal, le fluide de la PAC reçoit le transfert thermique δQ_f de la part de la source froide (à la température T_f), le transfert thermique δQ_c de la part de la source chaude (à la température T_c) et le travail δW de la part du compresseur. On suppose que toutes les évolutions sont réversibles.

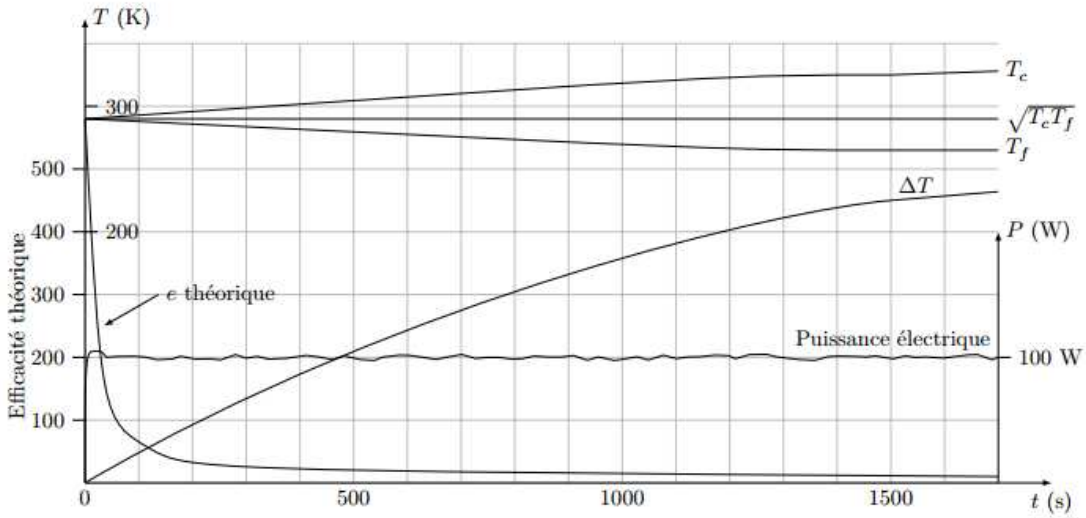
1. Donner, en le justifiant, le signe des grandeurs δQ_c, δQ_f et δW.

2. Appliquer le premier principe et le second principe au fluide de la PAC pour un cycle infinitésimal.

3. Exprimer le transfert thermique élémentaire δQ_f reçu par le fluide de la part de la source froide en fonction de m_e , c_e et dT_f où dT_f est la variation élémentaire de température de la source froide.

4. Exprimer le transfert thermique élémentaire δQ_c reçu par le fluide de la part de la source chaude en fonction de m_e , c_e et dT_c où dT_c est la variation élémentaire de température de la source chaude. En déduire la relation: $\dfrac{dT_f}{T_f} + \dfrac{dT_c}{T_c} = 0$.

5. Lors de l'expérience, on obtient les tracés expérimentaux avec $\theta_0 = 17^0 C$ où θ_0 représente la température initiale commune des deux seaux.



5.a. Commenter l'allure des trois courbes du haut donnant les variations de $T_c(t)$, $T_f(t)$ et $\sqrt{T_c(t)T_f(t)}$. On commentera avec soin l'allure de cette dernière courbe et on retrouvera le résultat par un calcul.

5.b. Pour $t > 1500\ s$, on observe que la température T_f ne varie plus. Quel phénomène se produit-il à partir de cette date? Que se passe-t-il pour $t > 1500\ s$?

Dans la suite, on se place à $t < 1500\ s$.

6. Définir l'efficacité théorique e_t de la PAC au cours d'un cycle infinitésimal et l'exprimer en fonction de $T_c(t)$ et $T_f(t)$.

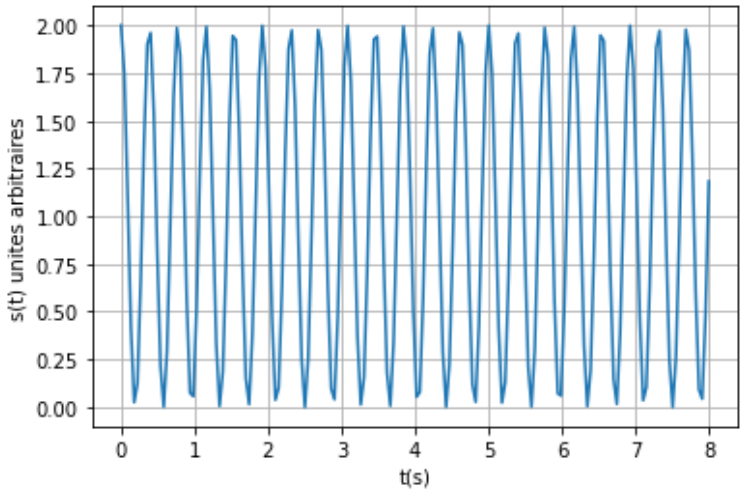
7. On pose $\Delta T = T_c - T_f$, on peut montrer (et on ne demande pas de le faire) que $e_t = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + (\dfrac{T_0}{\Delta T})^2}$. Commenter cette expression. La courbe nommée efficacité théorique ci-dessus est-elle en accord avec cette expression ?

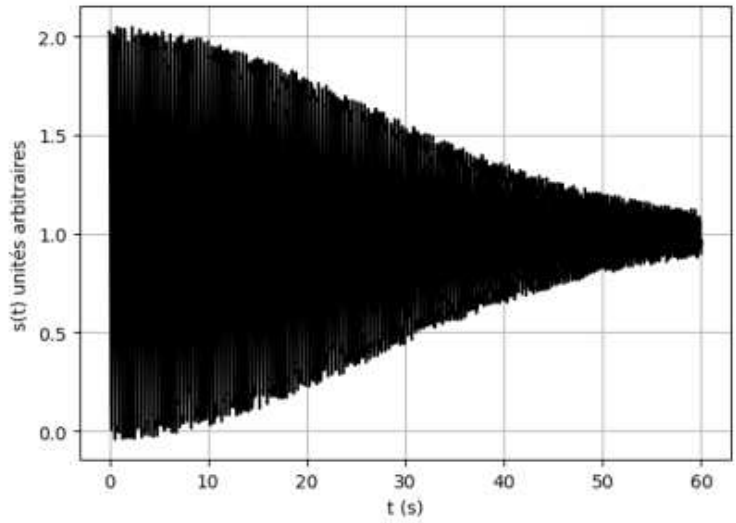
III. **Exploitation d'interférogrammes**

Une technique d'analyse spectroscopique utilise un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, éclairé par une source collimatée permettant un éclairage en incidence normale par rapport à la lame d'air. L'intensité du rayonnement émergeant de l'interféromètre est mesurée par une photodiode placée au foyer image F' d'une lentille convergente dont l'axe optique est parallèle aux rayons émergents de l'interféromètre.

Le signal s fourni par la photodiode est proportionnel à l'intensité I en F', soit $s = KI$ avec K une constante.

Le miroir mobile chariote à la vitesse $v_0 = 7,0.10^{-7}\ m.s^{-1}$ à partir du contact optique. On donne les courbes $s(t)$ sur des échelles de temps différents.





On modélise le spectre de la source lumineuse par un profil gaussien de longueur d'onde moyenne λ_m et de largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\lambda$.

Déduire des interférogrammes, une estimation de λ_m et de la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source.

IV. **Correction: expérience de Ruchardt**

1. On a $V(t) = V_0 - Sx$.

2. Le gaz est supposé parfait en transformation adiabatique réversible, on peut appliquer les lois de Laplace soit $P_0V_0^\gamma = P(t)V(t)^\gamma$ ou encore $P_0V_0^\gamma = P(t)(V_0 - Sx)^\gamma = P_0V_0^\gamma(1 - \frac{Sx}{V_0})^\gamma$ soit $P(t) = P_0(1 - \frac{Sx}{V_0})^{-\gamma}$.

En faisant un DL car $\frac{Sx}{V_0} << 1$ on a $P(t) = P_0(1 + \frac{\gamma Sx}{V_0})$.

3. Le piston subit la force de pression de l'air extérieur $+P_0S\overrightarrow{e_x}$ et la force de pression de l'air dans la bouteille $-P(t)S\overrightarrow{e_x}$. La résultante s'écrit: $(P_0 - P(t))S\overrightarrow{e_x} = -\frac{\gamma S^2P_0x}{V_0}\overrightarrow{e_x}$. Par identification avec l'énoncé on a $k = \frac{S^2P_0}{V_0}$.

4. On applique le PFD au piston qui subit son poids $\overrightarrow{P} = +mg\overrightarrow{e_x}$, la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F} = -\gamma kx\overrightarrow{e_x}$ et la force de dissipation $\overrightarrow{f} = -mh\dot{x}\overrightarrow{e_x}$.

On a donc $m\ddot{x}\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f}$ qui, en projection sur Ox, donne:

$m\ddot{x} = mg - \gamma kx - mh\dot{x}$ soit $\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{\gamma k}{m}x = g$.

Par identification on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

On a $\omega_0^2 x_e = g$ soit $x_e = \frac{mg}{\gamma k}$ est la position d'équilibre du piston.

On a $h = \frac{\omega_0}{Q}$ soit $Q = \frac{\omega_0}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$ est le facteur de qualité, nombre sans dimension d'autant plus grand que les frottements sont faibles.

5. On observe un régime pseudo périodique. La valeur approchée de Q correspond au nombre d'oscillations avant le retour à l'équilibre soit ici $Q \approx 10$.

6. On écrit l'équation caractéristique de l'équation homogène soit $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ de discriminent $\Delta = (\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2 < 0$ pour un régime pseudo périodique.

Les solutions sont de la forme $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

On a donc $x(t) = x_e + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

7. La solution proposée par la modélisation est de la même forme que celle que nous avons écrite avec $x_e = C = 0,53\ m$ et $\mu = \frac{\omega_0}{2Q} = 0,3\ s^{-1}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 5,83\ rad/s$.

Il faut remarquer que $\Omega \approx \omega_0$ car $Q \approx 10$ donc $1 - \frac{1}{4Q^2} \approx 1$.

Or on a $\omega_0^2 = \frac{\gamma k}{m}$ donc $\gamma = \frac{m\omega_0^2}{k} = 5,83^2 * 4,01.10^{-2} = 33,5 * 4.10^{-2} \approx 1,32$.

De plus $Q = \frac{\omega_0}{2\mu} = \frac{\Omega}{2\mu} = \frac{5,83}{2 * 0,3} = 9,7$.

V. **Correction: PAC avec pseudo sources**

1. La PAC reçoit du travail, $\delta W > 0$, pour prélever du transfert thermique à la source froide (qui se refroidit) soit $\delta Q_f > 0$ et pour donner du transfert thermique à la source chaude (qui se réchauffe) soit $\delta Q_c < 0$.

2. Le premier principe appliqué au fluide de la PAC pour un cycle s'écrit: $dU_{cycle} = 0 = \delta W + \delta Q_f + \delta Q_c$.

Le second principe appliqué au fluide de la PAC pour un cycle s'écrit: $dS_{cycle} = 0 = \delta S_c + \delta S_e$ avec $\delta S_c = 0$ car les transformations sont réversibles et $\delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f}$ donc $\delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0$.

3. Le signe de δQ_f est compté positif pour le fluide de la PAC qui reçoit δQ_f et donc la source froide reçoit $-\delta Q_f$. On applique le premier principe à la source froide soit: $dU_{sf} = m_e c_e dT_f = -\delta Q_f$ (on a dit précédemment que $\delta Q_f > 0$ donc $dT_f < 0$, l'équation confirme un refroidissement de la source froide).

4. Le signe de δQ_c est compté pour le fluide de la PAC et donc la source chaude reçoit $-\delta Q_c$. On applique le premier principe à la source chaude soit: $dU_{sc} = m_e c_e dT_c = -\delta Q_c$ (on a dit précédemment que $\delta Q_c < 0$ donc $dT_c > 0$, l'équation confirme un réchauffement de la source chaude).

On remplace dans l'équation du second principe $\delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0$ qui donne $-m_e c_e \frac{dT_c}{T_c} - m_e c_e \frac{dT_f}{T_f} = 0$ d'où l'équation demandée $\frac{dT_c}{T_c} + \frac{dT_f}{T_f} = 0$.

5. On observe la température de la source chaude augmenter, ce qui est cohérent puisque la source chaude reçoit du transfert thermique et la température de la source froide diminuer, ce qui est cohérent puisque la source froide donne du transfert thermique au fluide de la PAC.

La grandeur $\sqrt{T_c(t)T_f(t)}$ est constante. On a $\sqrt{T_c(t)T_f(t)} = T_0$.

On retrouve ce résultat avec l'équation $\frac{dT_c}{T_c} + \frac{dT_f}{T_f} = 0$ que l'on intègre entre les instants $t = 0$ et t:

$\int_{T_0}^{T_c(t)} \frac{dT_c}{T_c} + \int_{T_0}^{T_f(t)} \frac{dT_f}{T_f} = 0$ soit $\ln(\frac{T_c(t)}{T_0}) + \ln(\frac{T_f(t)}{T_0}) = 0$ qui s'écrit aussi $\ln(\frac{T_c(t)T_f(t)}{T_0^2}) = 0$ soit $T_c(t)T_f(t) = T_0^2$.

A partir de $t = 1500\ s$, la source froide a atteint 0^0C et donc la PAC continue de lui prélever du transfert thermique, de plus en pus d'eau liquide se transforme en glace, la PAC continue de fonctionner mais à température constante pour la source chaude et la source froide.

6. L'efficacité est l'énergie produite divisée par l'énergie coûteuse. On a donc $e_t = \frac{\delta Q_f}{\delta W} = \frac{-\delta Q_f}{\delta Q_f + \delta Q_c} = \frac{-1}{1 + \frac{\delta Q_c}{\delta Q_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$.

7. On remarque que plus l'écart en température des sources est grand et plus l'efficacité diminue ce qui est accord avec la courbe. Pour un temps suffisamment grand, ΔT est grand et e_t tend vers 1.

Pour des temps petits, ΔT est petit et donc on peut faire un DL dans l'expression de e_t: $e_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + (\frac{2T_0}{\Delta T})^2)^{1/2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(\frac{2T_0}{\Delta T})^2)$: c'est l'équation d'une hyperbole en $1/\Delta T$, ce qui correspond à l'allure de la courbe.