# DS 4 de physique (calculatrices autorisées)

Le sujet comprend quatre problèmes indépendants, vous les traiterez dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format $i/N$ où $i$ est le numéro de la page et $N$ le nombre de pages.

Il est demandé de porter une attention toute particulière à la rédaction, tout résultat doit être justifié (nom d'une loi, hypothèses de la loi, schéma avec les notations...).

## I. **Problème I: Interféromètre de Michelson**

La nanorhéologie est l'étude de l'écoulement des liquides entre des parois séparées d'une distance inférieure au micromètre. Ce domaine est d'un intérêt majeur pour comprendre les mécanismes des frottements fluides, aussi bien dans le domaine industriel (lubrification des moteurs), naturel (écoulement dans les milieux poreux) que biologique (liquide synovial entre les articulations).

Une manière d'accéder à des mesures de nanorhéologie est d'utiliser un appareil à force dynamique de surface (abrégé dans cet énoncé par l'acronyme anglais dSFA), qui est un dispositif permettant de mesurer la force qu'exerce le fluide sur une des parois qui le contient lors de son écoulement. Ce sujet s'intéresse à quelques aspects d'un dSFA développé à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

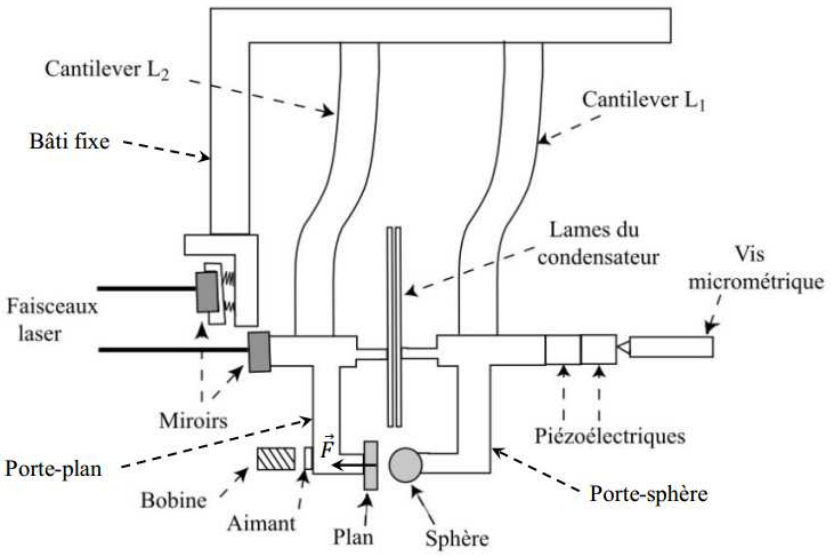



Figure 1 - Schéma de principe de l'appareil à force dynamique de surface

Le schéma de principe du dSFA est représenté sur la figure 1. Une goutte de fluide est insérée entre une sphère et un plan séparés d'une distance allant de quelques nanomètres à quelques centaines de nanomètres, formant ainsi un mince filet fluide. La sphère et le plan sont fixés à des structures, respectivement nommées porte-sphère et porte-plan, attachées à des cantilevers (bilames déformables) L1 et L2, qui permettent une translation horizontale de ces structures et donc un mouvement de la sphère par rapport au plan.

Une céramique piézoélectrique impose une oscillation sinusoïdale à la sphère, à la pulsation $\omega$. Cette oscillation met en mouvement le fluide entre la sphère et le plan, ce qui provoque une force $\overrightarrow{F}$ normale au plan, de même pulsation $\omega$.

La force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur le plan se reporte sur le porte-plan et déforme le cantilever L2 provoquant un déplacement de l'ensemble plan/porte-plan.

Deux miroirs parallèles, l'un posé sur le bâti fixe, l'autre posé sur le porte-plan, permettent par une méthode interférométrique de déterminer ce déplacement par rapport au bâti. La configuration étudiée dans ce sujet se ramène à celle d'un interféromètre de Michelson, bien que le véritable dispositif soit plus complexe.

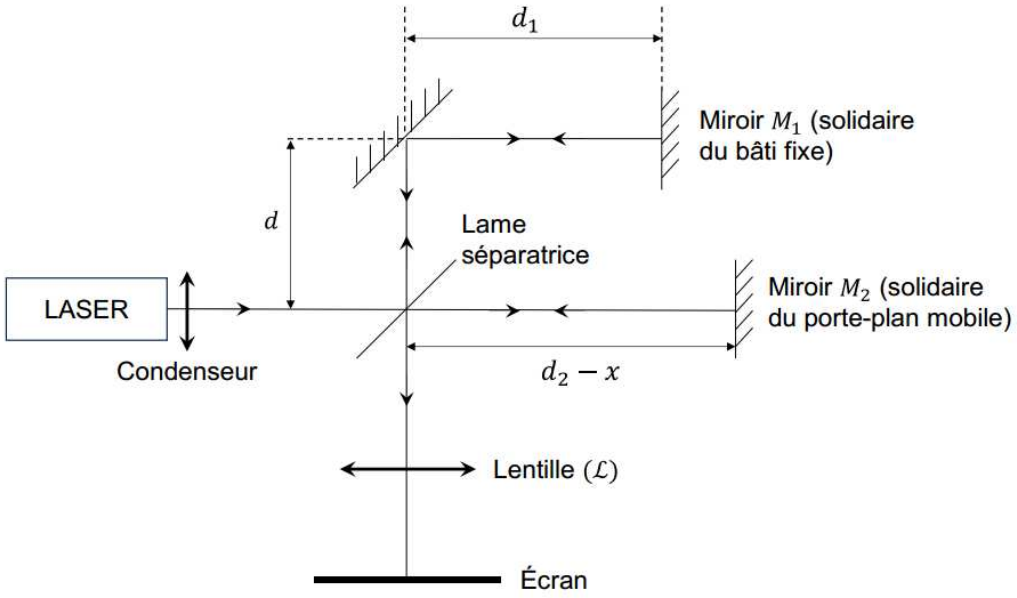



Figure 2 - Représentation schématique de l'interféromètre (seul le rayon central du faisceau laser est dessiné)

Le schéma de l'interféromètre est représenté figure 2. Un laser He-Ne, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633\ nm$, produit un faisceau de lumière rendu divergent par un condenseur (lentille convergente de très courte focale). Ce faisceau est divisé en deux par une lame séparatrice. Le premier faisceau, après avoir été dévié par un miroir à $45^0$, se réfléchit sur le miroir $M_1$ solidaire du bâti fixe tandis que le second faisceau se réfléchit sur le miroir $M_2$ solidaire du porte-plan mobile. Les faisceaux interfèrent à l'infini après avoir rejoint la lame séparatrice. Une lentille convergente $\mathcal{L}$ permet de projeter la figure d'interférences sur un écran placé dans son plan focal image. La propagation de la lumière se fait dans l'air d'indice optique $n = 1$. On ne tiendra pas compte des déphasages liés aux réflexions sur les miroirs et sur la lame séparatrice.

**1.** La configuration présentée ci-dessus est équivalente à un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Faire le schéma équivalent de la lame d'air, d'épaisseur $e$, puis tracer le cheminement d'un rayon arrivant sur la lame d'air avec un angle d'incidence $i$ par rapport à la normale aux miroirs. Montrer que la différence de marche à l'infini s'écrit $\delta = 2e\cos i$.

**2.** Dans le plan focal image de la lentille de projection, on observe des franges en forme d'anneaux, appelées franges d'égale inclinaison. Justifier ce terme.

**3.** Le miroir $M_1$ peut être translaté. Comment fait-on pour atteindre le contact optique, doit-on augmenter ou diminuer le rayon des anneaux visibles sur l'écran?

La distance $d_2$ est la distance entre la séparatrice et le miroir $M_2$ lorsque le plan n'est soumis à aucune force. Lorsqu'une force s'exerce sur le plan, le miroir se déplace de la distance $x$, comptée positivement vers la gauche sur figure 2, si bien que la distance entre la séparatrice et le miroir $M_2$ est $d_2 - x$.

**4.** Le contact optique est atteint en l'absence de force sur le plan ($x = 0$). Donner la relation entre $d$, $d_1$ et $d_2$ dans cette situation.

Une fois le contact optique réalisé, on incline légèrement le miroir $M_1$ d'un petit angle $\alpha$ afin de se placer dans une configuration coin d'air (figure 3). À la sortie du laser, on remplace le condenseur par un élargisseur de faisceau afin d'avoir une incidence quasi-normale sur les miroirs. Les interférences sont désormais localisées sur les miroirs, et on repère par $y$ la position sur les miroirs depuis le point $O$ d'intersection des miroirs. La différence de marche entre le rayon se réfléchissant sur $M_1$ et celui se réfléchissant sur $M_2$ est $2e_0(y)$, où $e_0(y)$ désigne l'écart (algébrique) entre les deux miroirs à la position $y$.

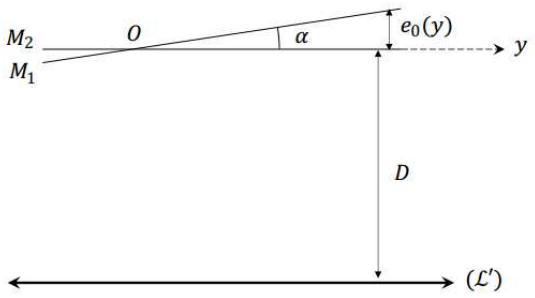



Figure 3 - Schéma équivalent de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

**5.** On remplace la lentille $\mathcal{L}$ par une autre lentille convergente $\mathcal{L}'$ de plus courte focale $f'$. Sachant que la distance entre le miroir $M_2$ et la lentille est $D > 0$, à quelle distance $D'$ de la lentille doit-on placer l'écran pour y observer les interférences?

**6.** Quelle est la forme des franges d'interférences ? Comment les appelle-t-on? Déterminer l'expression de l'interfrange $i_e$ sur l'écran en fonction de $D$, $D'$, $\alpha$ et de $\lambda$.

**7.** On note $\delta_0$ la différence de marche en un point donné des miroirs lorsque $x = 0$. Déterminer, en fonction de $\delta_0$ et de $x$, la différence de marche $\delta(x)$ en ce même point lorsque le miroir $M_2$ se décale de $x$.

**8.** Les rayons interférant en un point de l'écran ont la même amplitude lumineuse et on note $\mathcal{E}_0$ l'éclairement (aussi appelé intensité) sur l'écran dû à un seul rayon. Démontrer la formule de Fresnel donnant l'éclairement $\mathcal{E}$ résultant de l'interférence de ces deux rayons en fonction de $\mathcal{E}_0$, $\delta(x)$ et $\lambda$. En déduire que:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2}(1 + \cos(\frac{4\pi x}{\lambda} + \psi))$$

où $\mathcal{E}_{max}$ est l'éclairement pour une frange brillante à exprimer en fonction de $\mathcal{E}_0$ et où $\psi$ est à exprimer en fonction de $\delta_0$ et de $\lambda$.

La mesure de l'éclairement doit permettre de remonter à $x$. Pour optimiser la précision, il faut que les variations de l'éclairement soient maximales lorsque $x$ varie autour de $x = 0$.

**9.** Donner l'expression de la sensibilité $S = |\frac{d\mathcal{E}}{dx}|$, puis déterminer les valeurs de $\psi$ qui maximisent cette sensibilité au voisinage de $x = 0$..

Pour mesurer l'éclairement, on place deux photodiodes en deux points de l'écran correspondant à deux valeurs successives de $\psi$ maximisant la sensibilité.

**10.** Pour deux valeurs de $\psi$ successives de votre choix qui maximisent la sensibilité, montrer que pour $x << \lambda$, les éclairements des photodiodes sont: $\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2}(1 - \frac{4\pi x}{\lambda})$ et $\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2}(1 + \frac{4\pi x}{\lambda})$.

**11.** On note $U_1$ (respectivement $U_2$) la tension de sortie du montage contenant la photodiode recevant l'éclairement $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_1$). Par des opérations analogiques sur ces tensions, on obtient la tension finale $U = K\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1}$, avec $K = 10\ V$.

Exprimer $U$ en fonction de $K$, $\lambda$ et $x$. La tension minimale que peut détecter la carte d'acquisition utilisée est $U = 2.10^{-4}\ V$, quel déplacement minimal du miroir $M_2$ peut-on espérer détecter avec ce capteur interférométrique?

## II. **Problème II: Dopage des semi-conducteurs**

Dans l'industrie des semi-conducteurs, les phénomènes de diffusion sont souvent utilisés pour la fabrication des composants afin de modifier les propriétés électriques d'un substrat. On s'intéresse ici à la diffusion d'atomes de phosphore dans un substrat de silicium (figure 1).




**Figure 1 -** Substrat de silicium

On suppose que la diffusion a uniquement lieu suivant la direction $Ox$. On note $n(x,t)$ la densité d'atomes en phosphore au point $M$ d'abscisse $x$, à l'instant $t$.

À l'instant initial, les atomes de phosphore, supposés ponctuels, se situent tous sur le plan $x = 0$. Ainsi :

- à l'instant $t = 0$, la concentration en atomes de phosphore est nulle en tout point $M$ d'abscisse $x > 0$

- à l'instant $t = 0$, on définit dans le plan $x = 0$ la densité surfacique $\sigma$ d'atomes de phosphore (nombre d'atomes par unité de surface).

Il n'y a ni apparition, ni disparition des atomes de phosphore au sein du substrat de silicium.

**1.** En notant $D$ le coefficient de diffusion, rappeler simplement la loi de Fick qui lie le vecteur courant de diffusion de particules $\overrightarrow{j} = j(x,t)\overrightarrow{e_x}$ et $n(x,t)$. Préciser les unités des grandeurs qui interviennent.

**2.** Établir par une loi de conservation, sur un système que vous préciserez, une relation aux dérivées partielles entre $j(x,t)$ et $n(x,t)$.

**3.** En déduire l'équation de diffusion vérifiée par la concentration $n(x,t)$.

**4.** Par une analyse dimensionnelle, relier de façon qualitative la longueur caractéristique $L_c$ du phénomène de diffusion à sa durée $\tau_c$.

On admet que $n(x,t) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4Dt}$.

**5.** On note $N$ le nombre total d'atomes de phosphore injectés sur la surface $S$ à l'instant $t = 0$. Exprimer $N$ en fonction de $\sigma$ et $S$.

A tout instant $t > 0$, les atomes de phosphore qui se trouvaient à l'instant $t = 0$ sur la surface $S$ en $x = 0$ ont diffusés dans le substrat. Montrer que pour $t > 0$, le nombre d'atomes de phosphore s'écrit $N = \alpha\sqrt{\pi D} S$.

Donnée: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En déduire l'expression de $\alpha$ en fonction de $\sigma$ et $D$.

On définit la profondeur de diffusion $p$ à l'instant $t$ par $n(p,t) = \dfrac{n(0,t)}{e}$.

**6.** Exprimer $p$ en fonction de $D$ et $t$. Ce résultat est-il cohérent avec la relation qualitative, trouvée à la question 4?

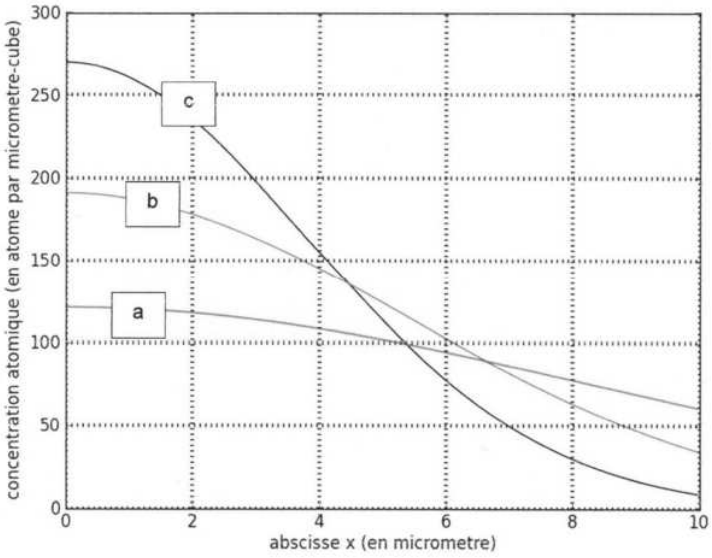



**Figure 2 -** Concentration en atome de phosphore en fonction de $x$

La figure 2 représente l'évolution de $n(x,t)$ en fonction de $x$ pour trois instants précis $t = 1\ h$, $t = 2\ h$ et $t = 5\ h$.

**7.** Identifier sur la figure 2 chacune des courbes correspondant à $n(x, t = 1\ h)$, $n(x, t = 2\ h)$ et $n(x, t = 5\ h)$.

**8.** Évaluer numériquement le coefficient de diffusion $D$ à l'aide de la figure 2, en utilisant la courbe c dont l'origine est à $n(x = 0, tfixe) = 270\ atomes.\mu m^{-3}$.

## III. **Problème III: évaporation d'une goutte d'eau**

On envisage une goutte d'eau de masse volumique $\mu_{eau}$, placée dans une atmosphère humide. La pesanteur n'est ici pas prise en compte donc la goutte est sphérique, de rayon initial $r_{g0} = 1\ mm$. L'eau de la goutte s'évapore progressivement ce qui fait varier dans le temps le rayon $r_g(t)$ de la goutte. On suppose que les molécules d'eau dans l'air sont transportées loin de la goutte par un mécanisme de diffusion, et on note $D$ le coefficient de diffusion de l'eau dans l'air. On note $n^*(r,t)$ la densité de molécules de vapeur d'eau vapeur et $\overrightarrow{j_D}(r,t)$ le vecteur densité de courant de particules d'eau, à l'instant $t$ et à la distance $r$ du centre de la goutte.

La vapeur d'eau, de masse molaire $M_{eau}$, suit la loi des gaz parfaits et on note $R$ la constante des gaz parfaits.

À la surface de la goutte, l'eau liquide de la goutte est à l'équilibre avec la vapeur d'eau qui l'entoure. Loin de la goutte, la pression partielle en eau est égale à $P_\infty$. On suppose que la transformation de la goutte se fait de façon isotherme: la température $T$ est uniforme.

On définit l'humidité relative $\mathcal{R}_H$ par le rapport de la pression partielle en eau $P_\infty$ loin de la goutte, sur la pression de vapeur saturante $P_{sat}$, soit: $\mathcal{R}_H = \dfrac{P_\infty}{P_{sat}} \leq 1$

*Données:*

le gradient en coordonnées sphériques s'écrit $\overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$.

Coefficient de diffusion de l'eau dans l'air: $D = 2,4.10^{-5}\ SI$

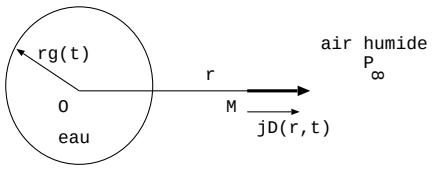
Masse molaire de l'eau: $M_{eau} = 18\ g.mol^{-1}$

Constante des gaz parfaits: $R = 8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Pression de vapeur saturante de l'eau à $20^0C$: $P_{sat} = 2,3.10^3\ Pa$

Masse volumique de l'eau: $\mu_{eau} = 10^3\ kg.m^{-3}$

On étudie l'évolution du rayon de la goutte d'eau au cours du temps.




**1.** Ecrire la loi de Fick. Donner le sens physique de cette loi.

**2.** Etablir la relation entre la densité de particules d'eau vapeur $n^*(r,t)$ et la pression partielle $P(r,t)$ en vapeur d'eau. Préciser alors les conditions aux limites, $n^*(r = r_g)$ et $n^*(r \to \infty)$, en fonction notamment de $P_{sat}$ et $P_\infty$.

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire que la source du phénomène diffusif évolue de façon beaucoup plus lente que la durée d'établissement d'un régime stationnaire de la grandeur qui diffuse.

**3.** On note $\phi(r)$ le flux **sortant** de particules d'eau vapeur à travers la sphère de rayon $r$. Exprimer $\phi(r)$ en fonction de $D$, $n^*(r)$ et $r$.

**4.** Montrer que $\phi(r)$ est indépendant de $r$ et que $\phi$ peut s'écrire $\phi = \dfrac{4\pi r_g D\mathcal{N}_a(P_{sat} - P_\infty)}{RT}$.

**5.** En déduire que la masse d'eau perdue par la goutte entre les instants $t$ et $t+dt$ est $\delta m_g = \dfrac{4\pi r_g D M_{eau} P_{sat}}{RT}(1-\mathcal{R}_H)$.

**6.** Exprimer $m_g(t)$ et $m_g(t+dt)$, la masse de la goutte aux instants $t$ et $t+dt$ en fonction de $\mu_{eau}$ et de $r_g$.

**7.** Déduire d'un bilan de masse effectué sur la goutte d'eau entre les instants $t$ et $t+dt$ la relation suivante: $r_g(t)\dfrac{dr_g(t)}{dt} = -\dfrac{M_{eau} D P_{sat}}{\mu_{eau} RT}(1-\mathcal{R}_H)$.

**8.** Déterminer la loi d'évolution du rayon de la goutte $r_g(t)$. En déduire le temps $t_0$ d'évaporation de la goutte.

**9.** Application numérique: la goutte a initialement un rayon $r_{g0} = 1\ mm$. Calculer sa durée de vie $t_0$ dans le cas d'une atmosphère sèche ($\mathcal{R}_H = 0$).

Estimer le temps mis pour qu'une molécule d'eau diffuse loin de la goutte soit sur une distance $L = 1\ cm$ (on considère que loin de la goutte c'est la distance $L = 10r_{g0}$).

Discuter alors de la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires utilisée dans cette étude.