Chapitre MF 1 : cinématique des fluides

I. Outils pour décrire un fluide

1. Notion de particule fluide

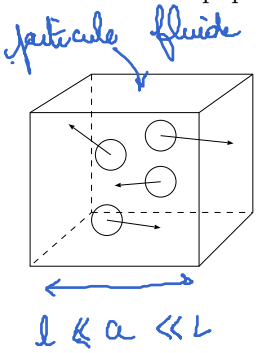
Problèmatique : Un fluide est constitué de particules distantes les unes des autres qui interagissent entre elles. Il est impossible de le décrire en tenant compte du mouvement de chaque molécule, d'une part car le nombre de molécules en interaction est trop important et d'autre part car à l'échelle de la molécule (échelle microscopique) ce milieu est discontinu.

On distingue trois échelles de longueur dans un fluide:

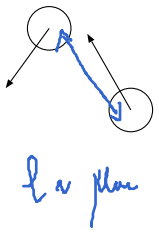
Echelle macroscopique: milieu continu



Echelle mésoscopique



Echelle microscopique: milieu discret



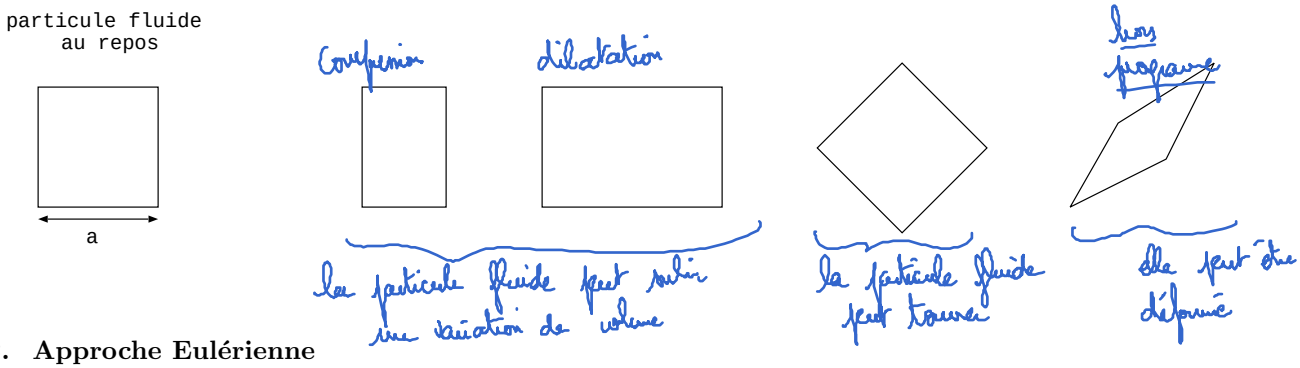
Il est toujours possible de choisir a (taille de la particule fluide) tel que $l << a << L$.

La condition $l << a$ signifie qu'il y a un grand nombre de molécules dans une particule fluide, on peut donc adopter une méthode statistique pour décrire la particule fluide. La vitesse de la particule fluide est égale à la vitesse moyenne de l'ensemble des molécules qui constituent la particule fluide, et la valeur moyenne a du sens lorsqu'on l'effectue sur un grand nombre de molécules. Il en de même pour la pression, la température, la masse volumique...

La condition $a << L$ signifie que d'une particule fluide à l'autre les grandeurs pression, température, masse volumique, ...varient et elles varient de manière **continue.**

Conclusion: On décrit donc le fluide en le décomposant en particule fluide M de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$. Cette description est continue.

Que devient une particule fluide au cours de son mouvement?



2. Approche Eulérienne

L'approche Eulérienne consiste à fixer une position dans l'espace et au cours du temps on observe les variations de la pression, de la température, de la vitesse en ce point. Dans cette approche ce n'est jamais la même particule fluide que l'on observe.

On note $P(M,t)$, $\rho(M,t)$, $\vec{v}(M,t)$ où M est un point fixé. Lorsque l'on dérive ces grandeurs par rapport au temps, M est fixé, on fait des dérivées partielles. On note:

$\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ... ce sont des dérivées locales

3. Approche Lagrangienne

L'approche Lagrangienne consiste à suivre une particule fluide au cours de son mouvement. On note $P(M,t)$, $\rho(M,t)$, $\overrightarrow{v}(M,t)$ où M est la particule fluide que l'on suit au cours du temps.

Exemple: un parachutiste fait un saut en amenant avec lui un thermomètre: on étudie l'écoulement de l'air autour du parachutiste. Que lit-on sur le thermomètre au cours de la chute?

La température augmente d'autant + vite que:
- le parachutiste se déplace rapidement
- le gradient de température dans lequel le parachutiste se déplace est grand

donc on intuite que $\frac{dT}{dt}$ dépend de $\overrightarrow{\text{grad}}\,T$ et de $\overrightarrow{v}$, c'est ce que l'on va montrer

Dérivée particulaire du champ scalaire $T = T(x,y,z,t)$:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$$

d'où $$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\dot{z}}_{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,T}$$

donc $$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,T$$

On généralise: pour toute grandeur scalaire A

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\text{dérivée lagrangienne}} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{dérivée locale (Euler)}} + \underbrace{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,A}_{\text{dérivée convective}}$$

Dérivée particulaire d'un champ de vitesse : cas de l'accélération:

$$\overrightarrow{a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}}_{\text{accélération de la particule fluide que l'on suit dans son mouvement}} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v}}_{\text{accélération convective}}$$

Méthode pour calculer l'accélération: on calcule $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$, puis on calcule $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ sans changer l'ordre des termes.

Exemples de calcul d'accélération : $\overrightarrow{v} = ky^2\overrightarrow{e_x}$

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}} = ky^2\frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v} = ky^2\frac{\partial}{\partial x}\left(ky^2\overrightarrow{e_x}\right) = \overrightarrow{0}$$

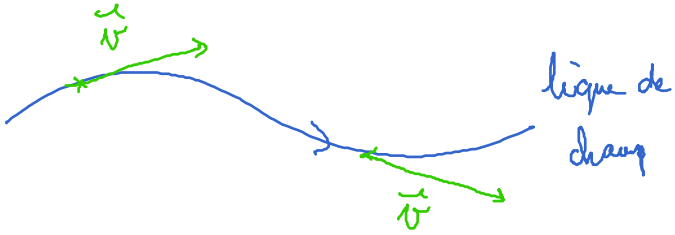
$\vec{v} = ky^2\vec{e_y}$ $\quad \overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y}$

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}} = ky^2\frac{\partial}{\partial y}$

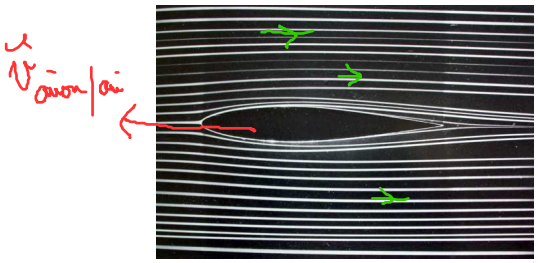
$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = ky^2\frac{\partial}{\partial y}\left(ky^2\vec{e_y}\right) = 2k^2y^3\vec{e_y}$

4. Lignes de ~~courant~~ champ

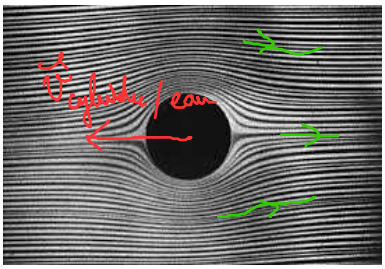
Définition: une ligne de ~~courant~~ champ est, à un instant donné, une ligne tangente au vecteur vitesse en tout point. Les lignes de courant sont orientées dans le sens du vecteur vitesse.



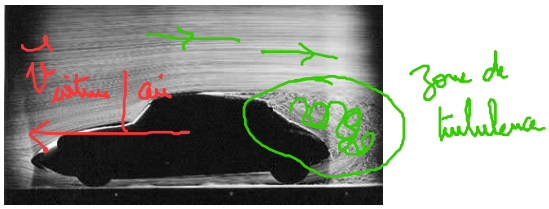
.



Écoulement de l'air autour d'une aile d'avion



Écoulement d'eau autour d'un cylindre



Écoulement de l'air autour d'une voiture

En régime permanent

▷ | les lignes de champ sont confondues avec les trajectoires

Equation de la ligne de ~~courant~~ champ passant par le point $M_0(x_0, y_0)$:

Soit $M(x, y)$ un point de la ligne de ~~courant~~ champ

Le vecteur vitesse en M est $\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y}$

Le vecteur tangent à la trajectoire en M est $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y}$

$\vec{v} = \alpha\, d\overrightarrow{OM}$

$\vec{v}$ et $d\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires sur une ligne de courant

$\begin{cases} v_x = \alpha\, dx \\ v_y = \alpha\, dy \end{cases}$ donc $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$

on sépare les variables x et y et on intègre entre (x_0, y_0) et (x, y)

Exemple: $\vec{v} = ky\vec{e_x} + Kx\vec{e_y}$.

$v_x = ky$ soit $\frac{dx}{ky} = \frac{dy}{Kx}$ donne $K\int_{x_0}^{x} x\,dx = k\int_{y_0}^{y} y\,dy$

$\frac{K}{k}\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right) = \frac{y^2 - y_0^2}{2}$ soit $\boxed{y^2 = y_0^2 + \frac{K}{k}\left(x^2 - x_0^2\right)}$ éq. de la ligne de champ

$v_y = Kx$

II. **Utilisation du vecteur vitesse pour caractériser un écoulement**

Un écoulement est stationnaire lorsque toute grandeur physique qui le caractérise ($\vec{E}, \vec{v}, \rho \ldots$) est indépendante du temps

Comment le reconnaît-on?

$\vec{v} = v_0 \cos(\omega t)\vec{e_x}$ non stationnaire

$\vec{v} = kx\vec{e_y}$ stationnaire

Un écoulement est dit incompressible lorsque les particules fluides ont la même masse volumique au cours de leur mouvement

Comment le reconnaît-on? $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

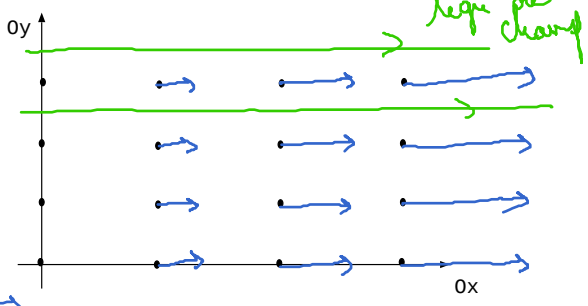
Un écoulement est irrotationnel lorsque les particules fluides ne tournent pas sur elles-mêmes

Comment le reconnaît-on? $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$

A l'inverse, s'il existe au moins un point de l'espace où $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v}$ est non nul, l'écoulement est dit rotationnel et on le caractérise par son vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v}$.

Pour les écoulements imaginaires suivants, on demande de représenter le vecteur vitesse en différents points du fluide et d'en déduire (sans équation) l'allure des lignes de courant, de calculer l'accélération particulaire et de préciser si l'écoulement est compressible, incompressible, rotationnel ou irrotationnel.

Exemple 1: $\vec{v} = kx\vec{e_x}$ avec $k > 0$ (norme, direction)



$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}^{=0} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = kx \frac{\partial}{\partial x}$

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = kx \frac{\partial}{\partial x}(kx\vec{e_x}) = \vec{0}$

$\vec{a} = \vec{0}$: les particules ont un mouvement rectiligne uniforme

Ici $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(kx) = k > 0$

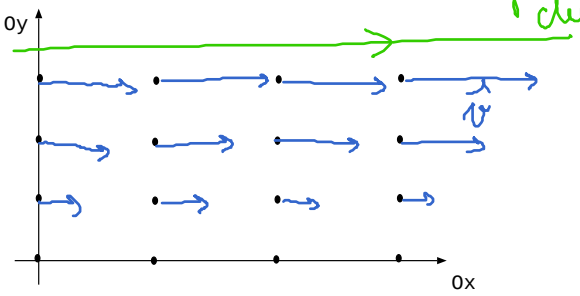
écoulement compressible

les particules se dilatent

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

écoulement irrotationnel

Exemple 2: $\overrightarrow{v} = ky\overrightarrow{e_x}$ avec $k > 0$



$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

$\operatorname{div}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{\partial}{\partial x}(ky) = 0$

écoulement incompressible

$\overrightarrow{a} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}})\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}} = ky\frac{\partial}{\partial x}$

$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}})\overrightarrow{v} = ky\frac{\partial}{\partial x}(ky\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ les particules ont un mouvement rectiligne uniforme

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v} = \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y}\wedge ky\overrightarrow{e_x}$

$= \frac{\partial(ky)}{\partial y}(-\overrightarrow{e_z}) = -k\overrightarrow{e_z} \neq \overrightarrow{0}$

écoulement rotationnel

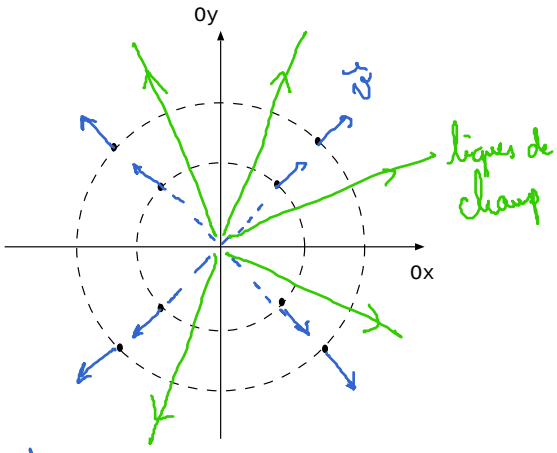
On donne en coordonnées cylindriques:

$\overrightarrow{\operatorname{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

La divergence: $\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

le rotationnel: $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{V} = (\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta})\overrightarrow{e_z}$.

Exemple 3: $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_r}$.



$\overrightarrow{V} = v_0\overrightarrow{e_r}$ $\quad V_r = V_0$ $\quad V_\theta = 0$ $\quad V_z = 0$

$\operatorname{div}\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_0) = \frac{v_0}{r}$

écoulement compressible

$\overrightarrow{a} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}})\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}} = v_0\frac{\partial}{\partial r}$

$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}})\overrightarrow{v} = v_0\frac{\partial}{\partial r}(v_0\overrightarrow{e_r}) = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ les particules fluides ont un mouvement rectiligne uniforme

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{v} = \frac{\partial v_0}{\partial y}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$

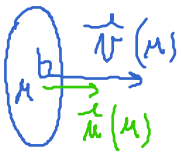
écoulement irrotationnel

III. Conservation de la masse

1. Notion de débit volumique

Définition : le débit volumique est le volume de fluide qui traverse une section S par unité de temps.

$[D_V] = m^3.s^{-1}$



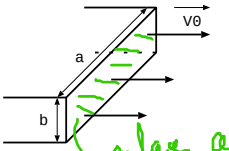
Expression : $D_v = \iint \vec{v}(M).dS\vec{n}(M)$: le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers la section traversée par le fluide.

On retient:

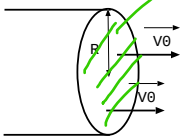
$D_V = \iint v(M)\, dS(M)$ où M est un point de la surface ⊥ à $\vec{v}$ traversé par le fluide

Cas particulier d'un écoulement uniforme : $D_v = v.S$

$D_V = v_0\, ab$



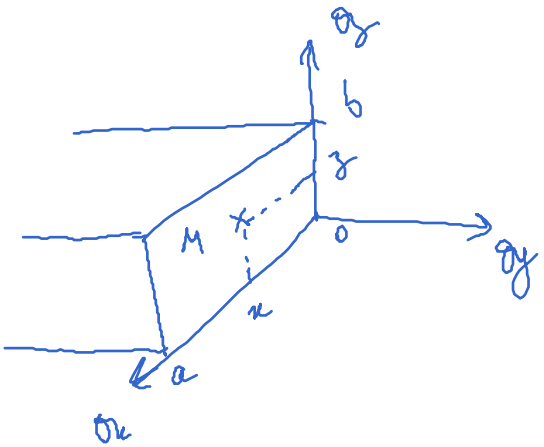
surface ab traversée par le fluide



surface πR^2 traversée par le fluide

$D_V = v_0 \pi R^2$

Exercice 1: soit un écoulement de la forme $\vec{v} = kx\vec{e_y}$. On considère une section S dans le plan Oxz comprise entre $x = 0$ et $x = a$, et entre $z = 0$ et $z = b$. Calculer le débit volumique de cet écoulement à travers la section S.



la surface ab est traversé par le fluide

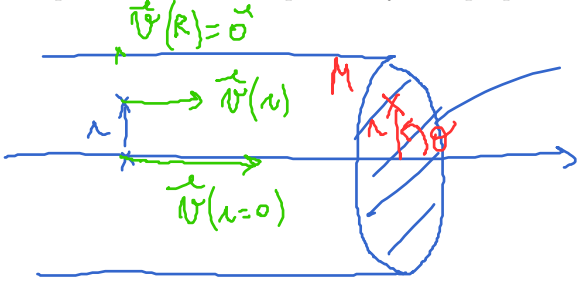
$D_V = \iint v(M)\, dS(M)$ où M est repéré par x et z

donc $dS = dx \times dz$

$= \iint_a k x\, dx\, dz$

$= k \int_0 x\, dx \int_0^b dz = k \frac{a^2}{2} b$

Exercice 2 : soit un écoulement de la forme $\vec{v} = v_0(1 - \frac{r}{R})\vec{e_z}$ en coordonnées cylindriques. Calculer le débit volumique à travers un disque de rayon R perpendiculaire à l'écoulement.



surface traversé par le fluide

$D_V = \iint v(M)\, dS(M)$ où M est repéré par r et θ soit $dS = dr \times r\, d\theta$

$x \to dx$ $y \to dy$ $z \to dz$ $r \to dr$ $\theta \to r \times d\theta$!

$= \iint v_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr\, r\, d\theta$

$= v_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) dr \int_0^{2\pi} d\theta = v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) 2\pi = v_0 \frac{R^2}{6} 2\pi$

2. Notion de débit massique

Définition : le débit massique est la masse de fluide qui traverse une surface par unité de temps

$[D_m] = kg\, s^{-1}$

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ en $kg\, m^{-2}\, s^{-1}$ vecteur densité de courant de masse



Expression : $D_m = \iint \rho(M) \vec{v}(M).dS\vec{n}(M)$: soit le débit massique est le flux du vecteur $\vec{j} = \rho\vec{v}$ à travers la section traversée par le fluide.

On retient: $D_m = \iint \rho(M) v(M)\, dS(M)$ où $M \in$ à la surface $\perp$ à $\vec{v}$ et traversée par le fluide $\parallel \vec{v}$

Cas particulier d'un écoulement uniforme et incompressible : $D_m = \rho.v.S$

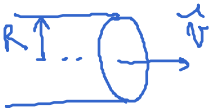
Analogie avec la diffusion:

Diffusion de particules $\Phi_{particules} = j_D S$ en particules $.s^{-1}$

Diffusion thermique $\Phi = P_{th} = j_Q S$ en $J.s^{-1} = W$

Mécaniques des fluides $D_m = \Phi_{masse} = \int \rho v \times S$ en $kg.s^{-1}$

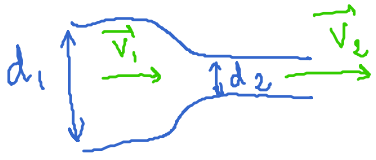
Exemple 1 : soit une canalisation à section circulaire de rayon $R = 5\ cm$ dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse $V = 1\ m/s$. Calculer la masse d'eau qui traverse une section de cette canalisation pendant 10 minutes.



$D_m = \rho v \pi R^2 = \frac{m}{\Delta t}$ soit $m = \rho v \pi R^2 \Delta t$

$= 10^3 \times 1 \times \pi \times (5.10^{-2})^2 \times (10 \times 60)$ en kg

Exemple 2 : soit une canalisation circulaire de diamètre $d_1 = 20\ cm$ dans lequel s'écoule un liquide de vitesse $V_1 = 1\ m/s$. Le diamètre de la canalisation est divisé par 2 tout en conservant le même débit volumique, calculer la vitesse V_2.



$D_V = v_1 \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = v_2 \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$

soit $v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4\, v_1 = 4\ m.s^{-1}$

Exemple 3 : remplir un seau de 5 litres d'eau prend une minute au robinet de la cuisine. Estimer la vitesse de l'eau au niveau du robinet.

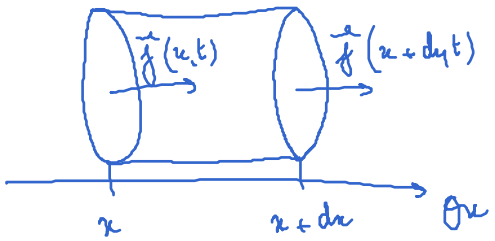
$D_V = \frac{5 \times 10^{-3}}{60}\ m^3.s^{-1}$ or $D_V = vS = v \pi R^2$ ← R : rayon du disque au niveau du robinet R ≈ 1 cm

soit $v = \frac{D_V}{\pi R^2} = \frac{5.10^{-3}}{60 \times \pi \times (10^{-1})^2}\ m.s^{-1}$

3. Equation locale de conservation de la masse

Soit un écoulement de fluide dans un tuyau de section S à la vitesse $\overrightarrow{v} = v(x,t)\overrightarrow{e_x}$. On note $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide. Ecrire l'équation de conservation de la masse.

Soit le système élémentaire de section S compris entre x et $x+dx$.



$\rho(x,t)$: masse volumique du fluide

$\vec{j}(x,t)$: vecteur densité de courant de masse

$j \times S$ est la masse de fluide qui traverse la section S par unité de temps

masse de fluide dans le système à l'instant t : $m(t) = \rho(x,t)\, S\, dx$

" " " $t+dt$: $m(t+dt) = \rho(x,t+dt)\, S\, dx$

masse de fluide qui entre dans le système entre t et $t+dt$: $\delta m_e = j(x,t)\, S\, dt$

" " sort " " : $\delta m_s = j(x+dx,t)\, S\, dt$

la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$m(t+dt) = m(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

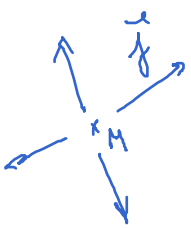
$$\underbrace{\left(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\right)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt}\, S\, dx = -\underbrace{\left[j(x+dx,t) - j(x,t)\right]}_{\frac{\partial j}{\partial x}\, dx} S\, dt$$

d'où $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$

soit $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0}$

éq. de conservation de la masse

Signification physique :



$\operatorname{div} \vec{j} > 0$ car $\vec{j}$ diverge

la masse quitte M donc $\rho(M,t)$ baisse soit $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} < 0$

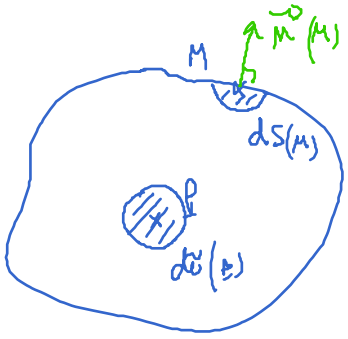
IV. Outil mathématique: Théorème d'Ostrogradsky

Le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue à tout le volume intérieur à la surface fermée.

$$\oiint_{M \in \text{surface fermée}} \vec{V}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) = \iiint_{P \in \text{au volume délimité par la surface}} \operatorname{div} \vec{V}(P)\, d\tau(P)$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire ⊥ à la surface dirigé vers l'extérieur (flux sortant)

Une surface fermée est une surface qui délimite un volume



V. Différents modèles d'écoulement

1. Ecoulement incompressible

Définition: Dans un écoulement incompressible, les particules fluides gardent la même volumique au cours de leur mouvement

(Rq : les particules fluides n'ont pas forcément la même volumique)

Attention : Il est important de distinguer la notion de fluide incompressible et d'écoulement incompressible.

Les liquides sont des fluides ..incompressibles.., ils sont donc en écoulement incompressible.

Les gaz sont des fluides ...Compressibles. On admet qu'ils sont en écoulement incompressible dans le cas où la vitesse des particules fluide est inférieure à la vitesse du son dans le gaz concerné. Dans ce cas, le fluide est compressible en écoulement incompressible.

Exemples : une voiture se déplaçant dans l'air à 100 km/h — l'écoulement de l'air autour de la voiture est incompressible

$v = \frac{100 \times 10^3}{3600} \approx 30\ ms^{-1} < 330\ ms^{-1}$

un avion se déplaçant à une vitesse de 1000 km/h. — l'écoulement de l'air autour de l'avion est incompressible

$v = \frac{1000 \times 10^3}{3600} \approx 300\ ms^{-1} < 330\ ms^{-1}$

Conséquence 1 : Equation locale caractéristique d'un écoulement incompressible.

Donnée: $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$.

la particule fluide garde la même volumique au cours de son mvt : $\frac{d\rho}{dt} = 0$

avec $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho = 0$.

La conservation de la masse s'écrit : $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

soit $\rho \operatorname{div} \vec{v} + \underbrace{\vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{d\rho}{dt} = 0} = 0$

d'où $\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$

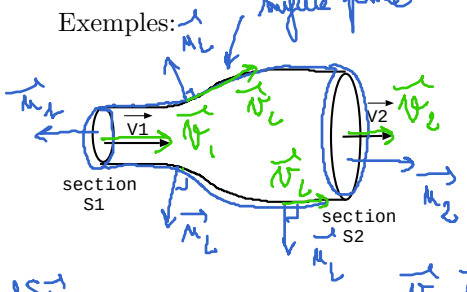
Conséquence 2 : Equation intégrale caractéristique d'un écoulement incompressible: le débit volumique se conserve (soit le débit volumique entrant est égal au débit volumique sortant).

On applique le théorème d'Ostrogradsky: $\oint_{M \in \text{surface}} \vec{v}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(A) = \iiint_{P \in \text{volume}} \underbrace{\text{div}\, \vec{v}(P)}_{0}\, d\tau(P) = 0$

Donc le flux sortant du vecteur vitesse à travers une surface fermée est nul, on dit que la vitesse est à flux conservatif.

▷ On en déduit que le débit volumique est conservé

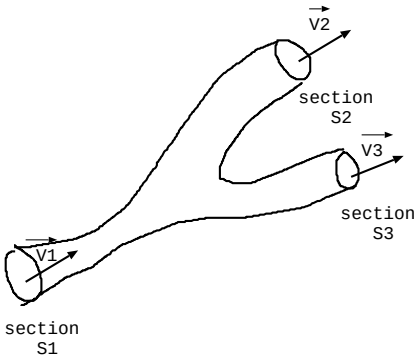
Exemples:



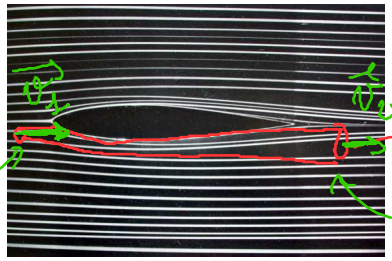
$\oint \vec{v}\, dS\, \vec{n} = 0$ $\quad \vec{v}_L \cdot \vec{n}_L = 0$

$\vec{v}_1 S_1 \vec{n}_1 + \vec{v}_2 S_2 \vec{n}_2 + 0 = 0$

$-v_1 S_1 + v_2 S_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2}$ ▷



la conservation du débit volumique s'écrit : $v_1 S_1 = v_2 S_2 + v_3 S_3$



conservation du débit volumique

tube de champ : tube fictif dont la surface latérale est constituée de lignes de champ

section S_1

section $S_2 > S_1$ car les lignes de champ s'écartent

la conservation du débit volumique s'écrit : $v_1 S_1 = v_2 S_2$ or $S_2 > S_1$ donc $v_2 < v_1$

▷ Lorsque les lignes de champ s'écartent, la vitesse diminue

2. Ecoulement stationnaire

Définition : Un écoulement est stationnaire lorsque les grandeurs physiques qui le caractérise ($\vec{E}, \vec{v}, \rho \ldots$) est indépendante du temps

Conséquence 1 : équation locale caractéristique d'un écoulement stationnaire:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ en régime stationnaire

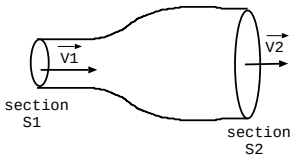
or la loi de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

donc $\boxed{\text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$ ▷

Conséquence 2 : équation intégrale caractéristique d'un écoulement stationnaire: On applique le théorème d'Ostrogradsky:

$$\oiint_{M \in \text{surface}} \rho(M)\,\vec{v}(M)\,d\vec{S}(M)\,\vec{n}(M) = \iiint_{P \in \text{volume délimité par la surface}} \operatorname{div}\left(\rho(P)\,\vec{v}(P)\right) d\tau(P) = 0$$

On dit que $\vec{j} = \rho\vec{v}$ est à flux conservatif car son flux est nul à travers toute surface fermée. Donc le débit massique se conserve !!



$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$ ⇒ conservation du débit massique en régime stationnaire

3. Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

Définition : Un écoulement est rotationnel s'il existe au moins un point où le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ est non nul.

4. Ecoulement irrotationnel

Définition : un écoulement est irrotationnel si le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ est nul en tout point.

Conséquence : on rappelle la propriété mathématique sur les opérateurs, pour tout champ scalaire V on a: $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{grad}} V) = \vec{0}$.

Donc $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ implique qu'il existe une fonction φ telle que $\boxed{\vec{v} = \vec{\operatorname{grad}}\,\varphi}$ et $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{grad}}\,\varphi) = \vec{0}$; φ s'appelle le potentiel des vitesses

Cas particulier d'un écoulement incompressible et irrotationnel: le champ des vitesses vérifient les équations:

$\operatorname{div}\vec{v} = 0$; $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ donc il existe φ telle que $\vec{v} = \vec{\operatorname{grad}}\,\varphi$

on a donc $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}}\,\varphi) = 0$ soit $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ cette équation s'appelle l'éq. de Laplace

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}V} = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

divergence : $div\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

laplacien scalaire : $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Exemple 1 : soit un écoulement de champ de vitesses $\overrightarrow{V} = \frac{A}{r}\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques. Vérifier qu'il est irrotationnel et incompressible et exprimer ϕ le potentiel des vitesses associé.

Exemple 2 : pour un écoulement irrotationnel et incompressible, on définit le potentiel des vitesses $\phi(r,\theta) = r^2 f(\theta)$ en coordonnées cylindriques. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$ et la résoudre. En déduire le champ des vitesses.

Ex 1 : $\vec{v} = \frac{A}{r}\vec{e}_\theta$ $\quad v_r = 0$ $\quad v_\theta = \frac{A}{r}$ $\quad v_z = 0$

$\text{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{A}{r}\right) = 0$ écoulement incompressible

$\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \times \frac{A}{r}\right)\vec{e}_z = \vec{0}$ écoulement irrotationnel

donc il existe ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \frac{A}{r}\vec{e}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$

sur $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \phi$ ne dépend pas de r

$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \Rightarrow \phi$ ne dépend pas de z

$\frac{A}{r} = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{d\theta} \Rightarrow \boxed{\phi = A\theta + B}$

Ex 2 : $\text{div}\,\vec{v} = 0$ incompressible et $\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ irrotationnel donc il existe ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

donc $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi) = \boxed{\Delta\phi = 0}$

$\phi = r^2 f(\theta)$ $\quad \Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$

sur $4f(\theta) + f''(\theta) = 0$: c'est l'éq. diff. d'un OH de pulsation propre $\sqrt{4} = 2$

donc $f(\theta) = A\cos(2\theta) + B\sin(2\theta)$

$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(r^2 f(\theta)) = 2rf(\theta)\vec{e}_r + \frac{1}{r}r^2 f'(\theta)\vec{e}_\theta$