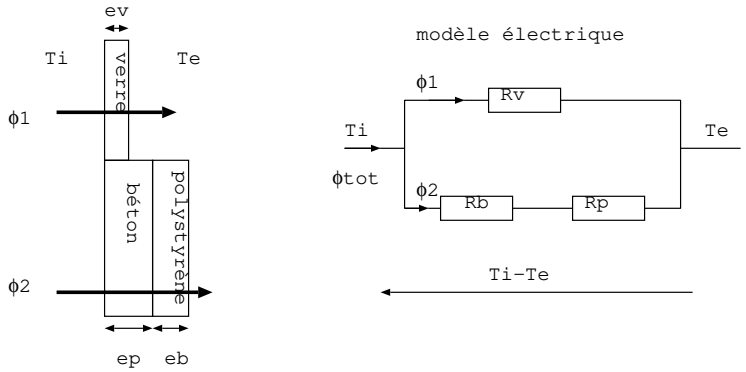
Correction TD diffusion thermique

I. **Résistance thermique d'une façade**

1. Remarque: la position de la fenêtre n'a aucune incidence sur le calcul de la puissance perdue par la façade.



On calcule les résistances thermiques:

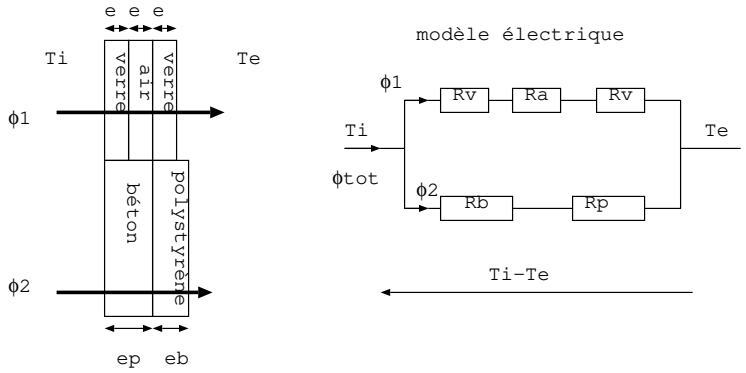
de la fenêtre simple vitrage: $R_v = \frac{e_v}{\lambda_v s} = 2,8.10^{-2}\ K.W^{-1}$

du béton: $R_b = \frac{e_b}{\lambda_b(S-s)} = 8,3.10^{-3}\ K.W^{-1}$

du polystyrène: $R_p = \frac{e_p}{\lambda_p(S-s)} = 1,04\ K.W^{-1}$

Soit R_{eq} la résistance équivalente, on a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_p + R_b}$ d'où la puissance thermique perdue par la façade: $P = \phi_t ot = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}} = \frac{T_i - T_e}{R_v} + \frac{T_i - T_e}{R_p + R_b} = 734\ W$.

2.

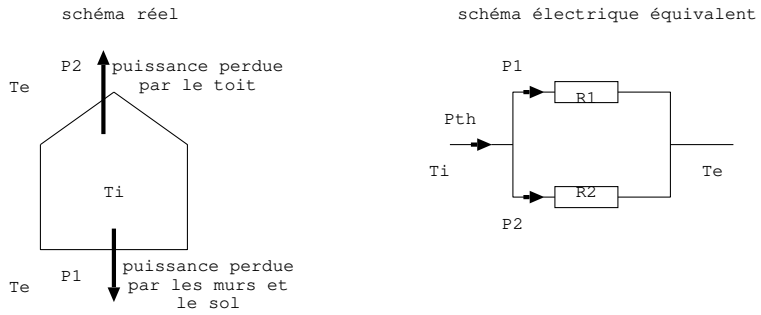


Les résistances calculées précédemment sont inchangées. On ajoute la résistance thermique de l'air: $R_a = \frac{e}{\lambda_a s} = 8,3.10^{-4}\ K.W^{-1}$

Soit R_{eq} la résistance équivalente, on a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2R_v + R_a} + \frac{1}{R_p + R_b}$ d'où la puissance thermique perdue par la façade: $P = \phi_t ot = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}} = \frac{T_i - T_e}{2R_v + R_a} + \frac{T_i - T_e}{R_p + R_b} = 371\ W$: le double vitrage est très efficace pour l'isolation de la façade, on divise les pertes thermiques par deux par rapport au simple vitrage.

II. **Isolation du plafond**

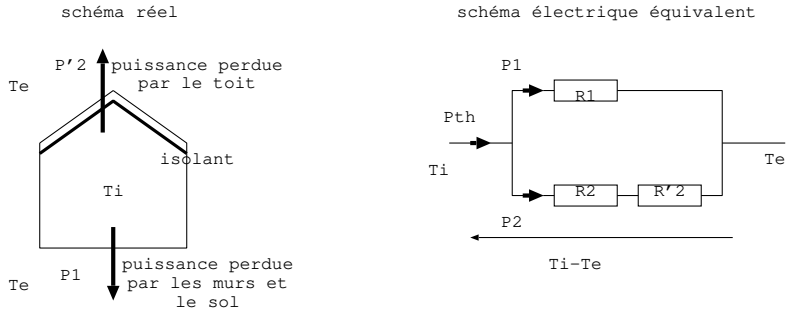
1. Les résistances données dans l'énoncé sont soumises à la même différence de température $T_i - T_e$ (soit dans l'analogie électrique, sont soumises à la même tension). Elles sont donc parcourues par des flux différents (soit dans l'analogie électrique, sont parcourues par des courants différents). Elles sont donc en parallèle.



La puissance thermique perdue par la pièce est donc $P_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{R_{eq}}$ avec $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. AN: $P_{th} = 6\ kW$.

La pièce perd le transfert thermique P_{th} et reçoit la puissance thermique P du chauffage. En régime stationnaire, la puissance perdue est égale à la puissance reçue donc $P = P_{th} = 6\ kW$.

2.

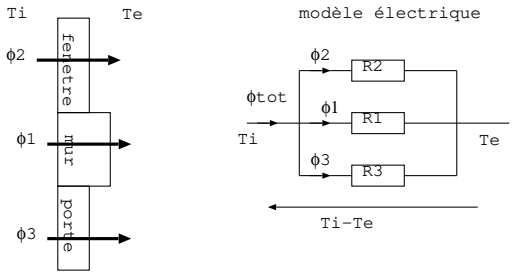


La puissance thermique perdue par la pièce est donc $P_{th} = (T_i - T_e)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2 + R_2'}) = 0,5P_{th} = 0,5(T_i - T_e)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2})$.

On a donc $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2 + R_2'} = \dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{2R_2}$ soit après calcul $R_2' = \dfrac{1}{\frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_1}} - R_2 = 3.10^{-3}\ K.W^{-1}$.

III. **Chauffage d'une maison**

1.



Pour le calcul des pertes thermiques, la position de la porte, des murs et des fenêtres, n'a aucune importance.

Pour maintenir la maison à température constante, il faut que la puissance perdue par diffusion à travers les murs, la porte et les fenêtres soient compensées par la puissance du chauffage soit $P_{chauffage} = \phi_{tot}$, déterminé par le modèle électrique.

On a $\phi_{tot} = (T_i - T_e)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}) = 8,0\ kW$.

2. La puissance fournit par le chauffage est inférieure à la puissance nécessaire pour compenser les pertes thermiques donc la maison va se refroidir, sa température va diminuer.

On applique le premier principe de la thermo à la maison entre les instants t et $t + dt$. La maison reçoit le transfert thermique $P'dt$ du chauffage et elle perd le transfert thermique $\phi dt = \dfrac{T_{int}(t) - T_e}{R_{eq}}dt$ avec $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$.

On a donc $dU = C(T_{int}(t+dt) - T_{int}(t)) = C\frac{dT_{int}}{dt}dt = P'dt - \frac{T_{int}(t) - T_e}{R_{eq}}dt$ soit $\frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}}{R_{eq}C} = \frac{T_e + P'R_{eq}}{R_{eq}C}$.

Par identification avec l'énoncé, on a $\tau = R_{eq}C = 6,2.10^3\ s$ et $T_\infty = T_e + P'R_{eq} = 17,5^0C$.

T_∞ représente la température atteinte en régime permanent.

τ caractérise la durée du régime transitoire, le régime permanent est atteint pour un temps de l'ordre de 5τ.

IV. **Equilibre thermique d'une brebis**

1. La brebis perd du transfert thermique par ses 6 faces planes. On peut assimiler la laine à une surface plane $S = 2H^2 + 4HL = 1,38\ m^2$ d'épaisseur e et de conductivité λ_{laine} qui a pour résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda_{laine}S}$.

AN: pour $e_M = 10\ cm$ on a $R_{thM} = 1,81\ K.W^{-1}$ et pour $e_m = 0,5\ cm$ on a $R_{thM} = 0,091\ K.W^{-1}$. Plus l'épaisseur est grande, plus la résistance est élevée, ce qui traduit que l'isolation thermique est meilleure.

2. Par analogie avec le loi d'Ohm, on définit la résistance thermique de conducto convection par $R_{cc} = \frac{T_{ext} - T_{air}}{\phi}$ avec ici $\phi = j_{cc}S = hS(T_{ext} - T_{air})$ donc $R_{cc} = \frac{1}{hS}$.

AN: $R_{cc} = 0,181\ K.W^{-1}$

3. Par analogie avec le loi d'Ohm, on définit la résistance thermique liée au rayonnement par $R_r = \frac{T_{ext} - T_{air}}{P_r} = \frac{1}{KS}$.

AN: $R_r = 0,145\ K.W^{-1}$

4. On construit le modèle électrique de la brebis. La résistance équivalente est $R = R_{th} + \frac{R_r R_{cc}}{R_r + R_{cc}}$. La puissance thermique perdue par la brebis est donc $\phi = \frac{T_{eq} - T_{air}}{R}$.

AN: brebis tondue ($e_m = 0,5\ cm$): $R = 0,171\ K.W^{-1}$ et $\phi_2 = 170\ W$ et brebis non tondue ($e_M = 10\ cm$): $R = 1,89\ K.W^{-1}$ et $\phi_1 = 18,2\ W$.

La puissance apportée par le métabolisme doit compenser les pertes thermiques pour maintenir le corps de la brebis à température constante donc $P_1 = \phi_1$ et $P_2 = \phi_2$.

V. **Assemblée de manchots**

1. La surface d'un manchot est $A_1 = 2a^2 + 4al = 0,22\ m^2$.

2. La résistance thermique du revêtement de plume du manchot est $R = \frac{e}{\lambda A}$. La puissance thermique perdue par diffusion à travers les plumes (diffusion du chaud, intérieur du corps, vers le froid, air extérieur) est $P_{th} = \frac{T_i - T_e}{R} = \frac{\lambda A_1(T_i - T_e)}{e}$.

Pour maintenir sa température constante, la puissance fournit au manchot par son métabolisme doit compenser la puissance perdue par diffusion à travers ces plumes soit $P_1 = P_{th} = \frac{T_i - T_e}{R} = \frac{\lambda A_1(T_i - T_e)}{e}$.

AN: $\lambda = \frac{eP_1}{A_1(T_i - T_e)} = 4,0.10^{-2}\ K.W^{-1}$.

3. La surface du pavage occupé par 9 manchots est $A_9 = 4l.3a + (3a)^2 = 0,78\ m^2$. L'ensemble des 9 manchots perd par diffusion thermique à travers les plumes des manchots qui sont sur les bords: $P_9 = \frac{\lambda A_9(T_i - T_e)}{e} = 177\ J$.

Les 9 manchots perdent une puissance thermique $P_9 = 177\ J$, en moyenne un manchot perd une puissance $P_1' = \frac{P_9}{9} = 20\ W$: les manchots ont donc intérêt à se regrouper pour diminuer la surface exposée au froid et pour limiter les pertes. Dans leur pratique de regroupement, ils changent de place régulièrement pour que ce ne soit pas toujours les mêmes manchots exposés au froid sur les bords du groupe.

4. Pour maintenir sa température constante, le manchot doit recevoir 50 W, il ne reçoit que $45W$ donc sa température va baisser.

On applique le premier principe de la thermo entre t et $t+dt$ à un manchot qui perd la puissance thermique par diffusion à travers ses plumes $P_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{R_{th}}$ et qui reçoit la puissance P_1 produise par son métabolisme.

On a $C(T_i(t+dt) - T_i(t)) = C\dfrac{dT_i}{dt}dt = +P_1 dt - \dfrac{T_i - T_e}{R_{th}}dt$ avec $C = \rho a^2 lc$, la capacité thermique totale du manchot, soit à résoudre $\dfrac{dT_i}{dt} + \dfrac{T_i}{R_{th}C} = \dfrac{T_e + P_1 R_{th}}{R_{th}C}$.

Par identification avec l'énoncé $\tau = R_{th}C$ et $T_f = T_e + P_1 R_{th}$.

AN: $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda A_1} = 1,14\ K.W^{-1}$, $C = 20,9\ kJ.kg^{-1}$, $\tau = 2,38.10^3\ s$ (ce temps caractérise la durée du régime transitoire) et $T_f = 31,8^0 C$.

VI. **Chouette Harfang**

La température interne de la chouette est supérieure à la température de l'air donc il y a diffusion thermique du chaud vers le froid et la couche de plume isolant du point de vue thermique, permet de limiter ces pertes.

1. Le vecteur densité de courant thermique s'écrit en coordonnées sphériques $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r)\overrightarrow{e_r}$.

2. Le flux thermique perdue à travers une sphère de rayon $R < r < R + e$ est $P_{th} = j_Q(r)4\pi r^2$. On considère un système infinitésimale compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$. En régime stationnaire, la puissance qui entre dans ce système est égale à la puissance qui en sort soit $P_{th}(r) = P_{th}(r + dr)$ donc P_{th} ne dépend pas de r.

3. La loi de Fourier s'écrit $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}T}$ soit $j_Q = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$. On a donc $P_{th} = -\lambda\dfrac{dT}{dr}4\pi r^2$ soit en séparant les variables et en intégrant entre R et $R + e$: $P_{th}\displaystyle\int_R^{R+e}\frac{-dr}{r^2} = 4\pi\lambda\int_{T_i}^{T_e} dT$ ou encore $P_{th}(\dfrac{1}{R+e} - \dfrac{1}{R}) = 4\pi\lambda(T_e - T_i)$ soit $P_{th} = \dfrac{4\pi R(R+e)\lambda(T_i - T_e)}{e}$.

4. Pour $e << R$ on a $P_{th} = \dfrac{4\pi R^2\lambda(T_i - T_e)}{e}$. On veut que la température interne de la chouette soit constante, donc l'énergie perdue par diffusion thermique à travers les plumes est compensée par l'énergie produite par le métabolisme de la chouette soit $P_{th} = \dfrac{4\pi R^2\lambda(T_i - T_e)}{e} = P_m$ et donc $e = \dfrac{4\pi R^2\lambda(T_i - T_e)}{P_m}$.

VII. **Canalisation d'eau**

1. Le vecteur densité de courant est radial $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r)\overrightarrow{e_r}$ (coord. cylindriques), le transfert thermique se fait des hautes températures vers les basses températures.

La puissance perdue par le cylindre de hauteur L et de rayon r est $\phi(r) = P_{th}(r) = j_Q(r)2\pi rL$.

2. On considère le système compris entre les cylindres de longueur L et de rayons r et $r + dr$ avec $r > R_1$ et $r + dr < R_2$ (ajouter le schéma du système avec les vecteurs $\overrightarrow{j_Q}(r)$ et $\overrightarrow{j_Q}(r + dr)$.

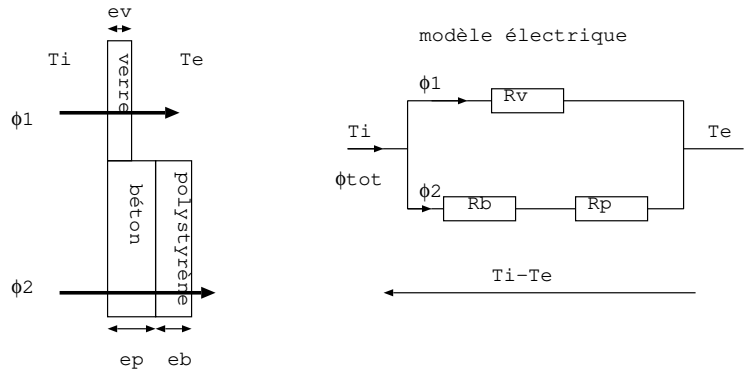
On applique le premier principe de la thermo à ce système entre t et $t + dt$. Ce système reçoit le transfert thermique $P_{th}(r)dt$ et il perd le transfert thermique $P_{th}(r+dr)dt$. On a donc $dU = 0 = +P_{th}(r)dt - P_{th}(r + dr)dt$ soit $P_{th}(r) = P_{th}(r + dr)$ donc P_{th} ne dépend pas de r.

3. D'après le loi de Fourier: $j_Q(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$ soit $-\lambda\dfrac{dT}{dr}2\pi rL = P_{th}$ et $\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} -dT = \frac{P_{th}}{2\pi\lambda L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$ d'où $T_1 - T_2 = \dfrac{P_{th}}{2\pi\lambda L}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$.

La puissance thermique dissipée par la canalisation est $P_{th} = \dfrac{2\pi\lambda L(T_e - T_a)}{\ln(\frac{R_2}{R_1})} = 36,6.10^6\ W$. L'énergie perdue est égale à la puissance perdue multipliée par le temps: $E = P_{th}\Delta t = 1,3.10^{11}\ J$.

VIII. **Chauffage d'une pièce par une PAC**

1. Remarque: pour calculer les pertes thermiques, on peut regrouper les fenêtres en un seule fenêtre de surface $s' = 4s = 8\ m^2$



On calcule les résistances thermiques:

de la fenêtre simple vitrage: $R_v = \frac{e_v}{\lambda_v s'} = 1,25.10^{-3}\ K.W^{-1}$

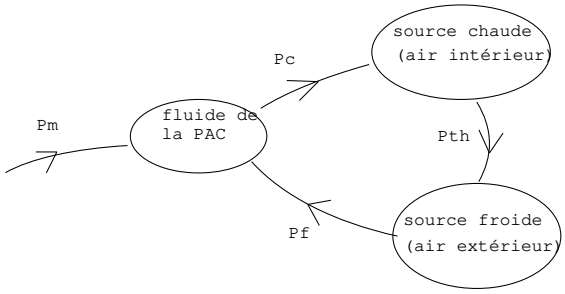
du béton: $R_b = \frac{e_b}{\lambda_b(S-s')} = 3,85.10^{-3}\ K.W^{-1}$

du polystyrène: $R_p = \frac{e_p}{\lambda_p(S-s)} = 0,48\ K.W^{-1}$

Soit R_{eq} la résistance équivalente, on a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_p+R_b}$ ou encore $R_{eq} = \frac{(R_p+R_b)R_v}{R_p+R_b+R_v} \approx 1,25.10^{-3}\ K.W^{-1}$. On remarque que la résistance thermique de l'ensemble est égale à la résistance thermique des fenêtres, le mur est bien isolé.

D'où la puissance thermique perdue par la façade: $P = \phi_t ot = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}} = 13,6\ kW$.

2. L'efficacité de la PAC s'écrit $e = \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_m}$.



On applique le premier principe de la thermo à la source chaude qui reçoit la puissance $\mathcal{P}_c$ et qui perd la puissance $\mathcal{P}_{th}$ à travers les murs et fenêtres.

En régime stationnaire: $dU = 0 = +\mathcal{P}_c dt - \mathcal{P}_{th} dt$ soit $\mathcal{P}_c = e\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{th}$. On a donc $\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_{th}}{e} = 4,5\ kW$.

3. La puissance mécanique de la PAC, n'est pas assez grande pour maintenir la température de la source chaude constante ($\mathcal{P}'_m < \mathcal{P}_m$) donc la température de la source chaude diminue.

La source chaude reçoit la puissance $\mathcal{P}'_c = e\mathcal{P}'_m$ et perd la puissance $\mathcal{P}_{th}$. On applique le premier principe de la thermo à la source chaude entre t et $t+dt$: $C(T_{int}(t+dt) - T_{int}(t)) = C\frac{dT_{int}}{dt}dt = +e\mathcal{P}'_m - \mathcal{P}_{th} = +e\mathcal{P}'_m - \frac{T_{int} - T_e}{R_{eq}}$.

On obtient l'équation différentielle $\frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}}{R_{eq}C} = \frac{T_e + e\mathcal{P}'_m R_{eq}}{R_{eq}C}$.

En identifiant avec l'énoncé on a $\tau = R_{eq}C$ et $T_m = T_e + e\mathcal{P}'_m R_{eq}$.

La solution de cette équation différentielle est $T_{int}(t) = T_m + Ae^{-t/\tau}$ avec $T_{int}(t=0) = T_0 = T_m + A$. On a donc $T_{int}(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-t/\tau}$ (avec $T_0 = 20^0 C$ ici).

IX. **Ailette de refroidissement**

1. On établit l'équation de diffusion en considérant le système élémentaire compris entre x et $x+dx$.

Il reçoit le transfert thermique $\delta Q_e = j_Q(x)\pi R^2 dt$ qui entre par diffusion dans le système.

Il perd le transfert thermique $\delta Q_s = j_Q(x+dx)\pi R^2 dt$ qui sort par diffusion du système.

Il perd le transfert thermique $\delta Q_l = j_{cc}(x)2\pi R dx dt$ qui sort par conducto convection du système.

On applique le premier principe de la thermo entre t et $t+dt$ en régime stationnaire: $dU = 0 = +\delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_l = -(j_Q(x+dx) - j_Q(x))\pi R^2 dt - j_{cc}(x)2\pi R dx dt$ ou encore en faisant un DL à l'ordre 1 en dx: $0 = -\frac{dj_Q}{dx}\pi R^2 dx dt - j_{cc}(x)2\pi R dx dt$.

On simplifie par $\pi R dx dt$ soit $0 = -\frac{dj_Q}{dx}R - j_{cc}(x)2$.

On utilise la loi de Fourier $j_Q(x) = -\lambda\frac{dT}{dx}$ et on remplace j_{cc} par son expression avec la loi de Newton, on obtient:

$0 = \lambda\frac{d^2T}{dx^2}R - 2h(T - T_F)$ qui conduit à $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}T = -\frac{2h}{\lambda R}T_F$.

Par identification avec l'énoncé on a $\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$.

2. L'équation différentielle admet pour solution particulière T_F.

On écrit l'équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ qui a pour solutions $r = \pm\frac{1}{\delta}$.

$T(x)$ s'écrit $T(x) = T_F + Ae^{+x/\delta} + Be^{-x/\delta}$.

On utilise les conditions aux limites $T(x=0) = T_0 = T_F + A + B$ et $T(x=L) = T_F + Ae^{+L/\delta} + Be^{-L/\delta} = T_F$ avec $e^{-L/\delta} = 0$ car L est très grand. On a donc $A = 0$ et $B = T_0 - T_F$.

Soit $T(x) = T_F + (T_0 - T_f)e^{-x/\delta}$.

3. On ne peut pas écrire que la puissance thermique dégagée par la surface latérale est $j_{cc}(x)2\pi RL$ car $j_{cc}(x)$ n'est pas uniforme. On écrit donc la puissance thermique élémentaire dégagée par la surface latérale du petit cylindre entre x et $x+dx$ et on intègre pour avoir la puissance thermique totale perdue:

$P = \int_0^L j_{cc}2\pi R dx = \int_0^L h(T(x) - T(F))2\pi R dx = \int_0^L 2\pi Rh(T_0 - T_F)e^{-x/\delta}dx = 2\pi Rh(T_0 - T_F)(-e^{-L/\delta} + 1)\delta = 2\pi Rh(T_0 - T_F)\delta$ car L est grand donc $e^{-L/\delta} \approx 0$.

X. **Température d'un mammifère**

1. L'eau au contact du mammifère est plus chaude qu'ailleurs donc il y a diffusion thermique des fortes vers les faibles températures dans l'eau soit $j_Q > 0$.

2. On a $\mathcal{P}_{th} = j_Q(r)4\pi r^2$.

On considère le système élémentaire contenant de l'eau entre les sphères de rayons r et $r+dr$. En régime stationnaire, la puissance reçue par ce système soit $\mathcal{P}_{th}(r)$ et la puissance perdue par ce système soit $\mathcal{P}_{th}(r+dr)$ sont égales donc $\mathcal{P}_{th}(r) = \mathcal{P}_{th}(r+dr)$ soit $\mathcal{P}_{th}$ ne dépend pas de r.

3. Le mammifère perd de la puissance thermique à sa surface en contact avec l'eau, cette puissance perdue correspond à $\mathcal{P}_{th}(r=a) = \mathcal{P}_{th}$.

Il reçoit la puissance fournit par son métabolisme, la puissance reçue est $p\frac{4\pi a^3}{3}$.

En régime stationnaire, la température du mammifère est constante donc la puissance perdue est égale à la puissance reçue soit $\mathcal{P}_{th} = p\frac{4\pi a^3}{3}$.

4. La loi de Fourier s'écrit $j_Q = -\lambda\frac{dT}{dr}$ soit $\mathcal{P}_{th} = -\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2 = p\frac{4\pi a^3}{3}$ On primitive la relation $\frac{dT}{dr} = -\frac{pa^3}{3\lambda r^2}$ soit $T(r) = \frac{pa^3}{3\lambda r} + A$.

On a pour condition aux limites $T(r=\infty) = T_0 = A$ soit $T(r) = \frac{pa^3}{3\lambda r} + T_0$.

5. On en déduit la température du mammifère à sa surface $T_c = T(a) = \frac{pa^2}{3\lambda} + T_0$. Quand on connaît T_c, on peut en déduire p: $p = \frac{3\lambda(T_c - T_0)}{a^2}$.

Pour un mammifère qui vit dans l'eau: $p = 960\ kW.m^{-3}$ et pour un mammifère qui vit dans l'air: $p = 9,6\ kW.m^{-3}$. Plus le mammifère est gros et plus la puissance produite par son métabolisme sera grande. De plus la puissance produite par le métabolisme est 100 fois plus grande pour un mammifère qui

vit dans l'eau, donc le mammifère dans l'eau est forcément de petite taille, sinon il perd trop de transfert thermique et ne peut pas survivre, son métabolisme n'arrivera pas à fournir la puissance nécessaire pour compenser les pertes thermiques.

XI. **Réactions nucléaires**

1. Le système est le siège de transferts thermiques par diffusion et de production de transfert thermique par les réactions nucléaires exothermiques: ce transfert thermique produit par les réactions est reçue par le système.

Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr<R$ et de hauteur L.

$\delta Q_e = j_Q(r)2\pi rLdt$ est le transfert thermique reçu par diffusion par le système

$\delta Q_s = j_Q(r+dr)2\pi(r+dr)Ldt$ est le transfert thermique perdu par diffusion par le système

$\delta Q_p = p_v 2\pi rLdrdt$ est le transfert thermique reçu par le système produit par les réactions nucléaires

On applique le premier principe au système entre t et $t+dt$ en régime stationnaire: $dU = 0 = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_p$ soit $-(j_Q(r+dr)(r+dr) - j_Q(r)r)2\pi L + p_v 2\pi rLdr = 0$ ou encore $-\dfrac{d}{dr}(j_Q(r)r)2\pi drL + p_v 2\pi rLdr = 0$.

Soit $\dfrac{d}{dr}(j_Q(r)r) = p_v r$.

On applique la loi de Fourier $j_Q(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$ et on a $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr}) = -\dfrac{p_v r}{\lambda}$.

2. On primitive une première fois par rapport à r: $r\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v r^2}{2\lambda} + A$

On divise par r et on intègre primitive une seconde fois par rapport à r:

$\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v r}{2\lambda} + \dfrac{A}{r}$

$T(t) = -\dfrac{p_v r^2}{4\lambda} + A\ln r + B.$

Le terme $A\ln r$ diverge en $r \approx 0$ alors que $T(r)$ doit être défini en $r=0$ donc $A=0$.

On a pour condition aux limites $T(r=R) = T_e = -\frac{p_v R^2}{4\lambda} + B$ d'où $B = T_e + \frac{p_v R^2}{4\lambda}$.

La température dans le barreau s'écrit $T(r) = \dfrac{p_v}{4\lambda}(R^2 - r^2) + T_e$. Elle est maximale au centre $T(r=0) = \frac{p_v R^2}{4\lambda} + T_e$.

XII. **Conduction de la chaleur dans un puits**

1. On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ avec $r > R_i$ et $r+dr < R_e$ et de hauteur H. Ce système a pour volume $d\tau = 2\pi rHdr$.

En régime stationnaire, la puissance thermique reçue par ce système (soit $\phi(r)$) est égale à la puissance perdue par le système (soir $\phi(r+dr)$) on a donc $\phi(r) = \phi(r+dr)$ donc ϕ ne dépend pas de r.

2. On a donc $\phi = \overrightarrow{j}S\overrightarrow{n_{sortant}} = j(r)\overrightarrow{e_r}2\pi rH\overrightarrow{e_r} = j(r)2\pi rH$.

On exprime le vecteur densité de courant thermique avec la loi de Fourier soit $\overrightarrow{j} = -\lambda\overrightarrow{grad}\,T(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}\overrightarrow{e_r}$ et $j(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$.

On remplace dans l'expression du flux: $\phi = -\lambda\dfrac{dT}{dr}2\pi rH$. On sépare les variables T et r soit $\phi\dfrac{dr}{r} = -\lambda 2\pi HdT$, et on intègre en utilisant les conditions aux limites $T(r=R_i) = T_i$ et $T(r=R_e) = T_e$ soit $\phi\displaystyle\int_{R_i}^{R_e}\frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi H\int_{T_i}^{T_e} dT$.

On a donc $\phi\ln(\dfrac{R_e}{R_i}) = -\lambda 2\pi H(T_e - T_i)$.

On en déduit l'expression de la résistance thermique définie par $R_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{\phi} = \dfrac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$.

3. On pourrait aussi intégrer l'équation précédente entre $r=R_i$ et r soit entre $T(r=R_i) = T_i$ et $T(r)$: $\phi\displaystyle\int_{R_i}^{r}\frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi H\int_{T_i}^{T(r)} dT$ qui donne $\phi\ln(\dfrac{r}{R_i}) = -\lambda 2\pi H(T(r) - T_i)$ donc $T(r) = T_i - \dfrac{\phi\ln(\frac{r}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$.

On remplace ϕ par l'expression de la question précédente: $\phi \ln(\frac{R_e}{R_i}) = -\lambda 2\pi H(T_e - T_i)$ soit $\phi = \frac{-\lambda 2\pi H(T_e - T_i)}{\ln(\frac{R_e}{R_i})}$.

On obtient donc $T(r) = T_i - \frac{\phi \ln(\frac{r}{R_i})}{\lambda 2\pi H} = T_i + \frac{\ln(\frac{r}{R_i})}{\ln(\frac{R_e}{R_i})}(T_e - T_i)$.

4. On écrit le premier principe industriel: $D_m(h(z+dz) - h(z)) = P_u + P_{th}$ avec $P_u = 0$ en absence de pièces mobiles et $P_{th} = -\frac{T_i - T_e}{R_{th}}$ (si $T_i > T_e$ l'eau perd du transfert thermique d'où le signe $-$). D'après la question 2, la résistance thermique d'une hauteur H de conduite est $R_{th} = \frac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$ et donc la résistance thermique d'une hauteur dz de conduite est $R_{th} = \frac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi dz}$.

On a donc $D_m(h(z+dz) - h(z)) = D_m c(T_i(z+dz) - T_i(z)) = D_m c \frac{dT_i}{dz} dz = -\frac{(T_i - T_e)\lambda 2\pi dz}{\ln(\frac{R_e}{R_i})}$.

D'où l'équation différentielle à résoudre: $\frac{dT_i}{dz} + \frac{\lambda 2\pi}{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})} T_i = + \frac{\lambda 2\pi}{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})} T_e$.

5. On pose $\delta = \frac{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi}$, la solution est $T_i(z) = T_e + Ae^{-z/\delta}$. On trouve A avec la condition aux limites $T_i(z=0) = T_0 = T_e + A$.