Correction CCINP PC 2022

I. **Correction : le manchot**

1. La norme du vecteur densité de courant représente l'énergie par unité de surface et de temps ou encore la puissance transférée par unité de surface. L'unité est: $W.m^{-2}$.

2. La loi qui s'écrit $\overrightarrow{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \overrightarrow{U}_{\rho}$ est la loi de Fourier, le signe $-$ signifie que le transfert thermique se fait des fortes vers les faibles températures.

3. Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons ρ et $\rho + d\rho$. En régime stationnaire, la puissance thermique reçue par le système est égale à la puissance perdue par le système car sa température est constante on a donc: $j_{th}(\rho) 2\pi\rho l = j_{th}(\rho + d\rho) 2\pi(\rho + d\rho) l$. On en déduit que $j_{th}(\rho)\rho = A$ (une constante).

On applique la loi de Fourier soit $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$ ou encore $\frac{dT}{d\rho} = \frac{-A}{\lambda\rho}$. On intègre par rapport à ρ soit: $T(\rho) = \frac{-A}{\lambda} \ln \rho + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites:

$T(\rho = R_1) = \frac{-A}{\lambda} \ln R_1 + B = T_1$

$T(\rho = R_2) = \frac{-A}{\lambda} \ln R_2 + B = T_2$

On fait la différence $T_1 - T_2 = \frac{-A}{\lambda} \ln(\frac{R_2}{R_1})$ d'où $\frac{-A}{\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

De la première équation on tire $B = T_1 + \frac{A}{\lambda} \ln R_1$

En remplaçant A et B par leurs expressions, on obtient $T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})} \ln(\frac{\rho}{R_1}) + T_1$.

Autre façon de faire: on peut procéder par intégration après séparation des variables:

$\frac{dT}{d\rho} = \frac{-A}{\lambda\rho}$ donne après séparation des variables $dT = \frac{-A d\rho}{\lambda\rho}$

Soit $\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-A d\rho}{\lambda\rho}$ donne $T_2 - T_1 = -\frac{A}{\lambda} \ln(\frac{R_2}{R_1})$. On en déduit A.

Puis $\int_{T_1}^{T(\rho)} dT = \int_{R_1}^{\rho} \frac{-A d\rho}{\lambda\rho}$ donne $T(\rho) - T_1 = -\frac{A}{\lambda} \ln(\frac{\rho}{R_1})$.

4. La résistance thermique se définit par analogie avec la loi d'Ohm électrique $U = V_1 - V_2 = Ri$ où $U = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel qui provoque le mouvement des électrons et où i est le flux de charges. En thermique, $\Delta T = T_1 - T_2$ provoque le transfert d'énergie (c'est l'analogue de la tension) et ϕ_{th} est le flux d'énergie.

On a donc $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}}$.

On exprime $\phi_{th} = j_{th}(\rho) 2\pi\rho l = -\lambda \frac{dT}{d\rho} 2\pi\rho l = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})} \frac{1}{\rho} 2\pi\rho l = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_1}{R_2})} 2\pi l = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})} 2\pi l$.

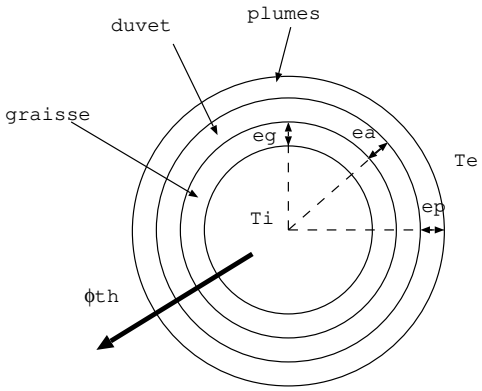
D'où la résistance thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}} = \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln(\frac{R_2}{R_1})$.

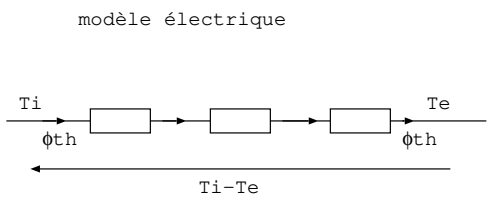
5. Le volume d'un manchot modélisé par un cylindre s'écrit $V = \pi R^2 L$, on déduit donc l'expression de sa masse en utilisant la masse volumique $m = \mu V = \mu\pi R^2 L$ d'où $R = \sqrt{\frac{m}{\mu\pi L}} = 8,9\ cm$ (on prend $\mu = 10^3\ kg.m^{-3}$ en considérant que la masse volumique du manchot est égale à celle de l'eau).

6. On considère le système composé du manchot: en régime stationnaire, la température du manchot est constante donc la puissance reçue par le manchot (soit $\mathcal{P}_m$ produite par don métabolisme) est égale à la puissance perdue (soit ϕ_{th} perdue par diffusion thermique à travers sa graisse et ses plumes). On a donc $\mathcal{P}_m = \phi_{th}$.

7. Les couches de graisse et de plumes sont parcourues par la même puissance thermique et soumises à des différences de températures différentes. La puissance thermique est l'analogue du courant donc les trois

résistances associées aux différentes couches de protection du manchot sont parcourues par le même courant, elles sont en série. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances thermiques.





La résistance thermique de la couche de graisse est $R_g = \dfrac{1}{\lambda_g 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g}{R})$

La résistance thermique de la couche de duvet est $R_a = \dfrac{1}{\lambda_a 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g+e_a}{R+e_g})$

La résistance thermique de la couche de graisse est $R_p = \dfrac{1}{\lambda_p 2\pi l}\ln(\dfrac{R+e_g+e_a+e_p}{R+e_g+e_a})$.

La résistance équivalente est $R_{th1} = R_g + R_a + R_p$. AN: $R_{th1} = 1,07\ K.W^{-1}$.

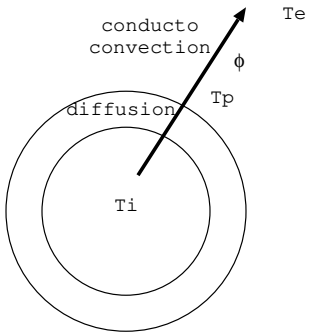
8. La puissance thermique perdue par conducto-convection est $\phi_{cc} = j_{cc}S = h(T_p - T_e)S$. La résistance thermique associée s'obtient comme précédemment par l'analogie avec la loi d'Ohm électrique soit $R_{cc} = \dfrac{T_p - T_e}{\phi_{cc}} = \dfrac{1}{hS}$.

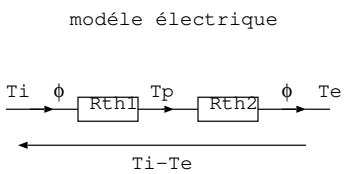
9. La puissance thermique perdue par rayonnement est $\phi_r = 4\sigma S T_e^3(T_p - T_e)$. La résistance associée s'obtient par l'analogie avec la loi d'Ohm électrique soit $R_r = \dfrac{T_p - T_e}{\phi_r} = \dfrac{1}{4\sigma S T_e^3}$.

10. Les résistances thermiques liées aux transferts conducto-convectifs et radiatifs sont soumises à la même différence de température soit à la même tension par analogie avec l'électricité, donc les résistances sont associées en parallèle.

La résistance thermique équivalente est telle que $\dfrac{1}{R_{th2}} = \dfrac{1}{R_r} + \dfrac{1}{R_{cc}} = 4\sigma S T_e^3 + hS$ soit $R_{th2} = \dfrac{1}{4\sigma S T_e^3 + hS}$.
AN: on prend $S = 2\pi(R + r_e + e_a + e_p)l$ on a $R_{th2} = 0,03\ K.W^{-1}$.

11. Les résistances R_{th1} et R_{th2} sont en série soit $R_{tht} = R_{th1} + R_{th2}$. AN: $R_{tht} = 1,10\ K.W^{-1}$. On en déduit la puissance thermique perdue par le manchot $P_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{R_{tht}} = 50\ W$. En régime stationnaire, la puissance perdue est égale à la puissance reçue liée au métabolisme, on a donc $\mathcal{P}_m = 50\ W$. En accord avec l'énoncé.





12. Pour un manchot isolé, la puissance a été une peu sous estimée mais l'ordre de grandeur est bon 50 W au lieu de 85 W.

Les manchots en périphérie du groupe perdent beaucoup de transfert thermique, les manchots au centre perdent peu de transfert thermique, et en moyenne les manchots perdent moins d'énergie en se regroupant

car le groupe de N manchots offre une surface de contact avec l'atmosphère plus faible que N fois la surface d'un manchot.