Exercices de cours sur la dynamique des fluides

I. **Enoncé:**

1. Ecrire l'équation de Navier-Stokes et donner la signification de chaque terme. Préciser l'unité de cette équation.

2. Pour les différents champs de vitesse suivants exprimer le laplacien de la vitesse: $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{v} = v(y,z)\overrightarrow{e_x}$.

3. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre le plan $y = -h$ de vitesse $-v_0\overrightarrow{e_x}$ et le plan $y = +h$ de vitesse $+v_0\overrightarrow{e_x}$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$. La pression dans le fluide est uniforme et on néglige le poids. Déduire de l'équation de Navier-Stokes l'expression de $v(y)$.

4. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre les plans immobiles $x = 0$ et $x = h$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$. La pression dans le fluide est $P(y) = P_0 - ay$ et on néglige le poids.

4.a. Déduire de l'équation de Navier-Stokes l'expression de $v(x)$.

4.b. Exprimer le débit volumique à travers la canalisation de hauteur h et de largeur L selon Oz. En déduire la vitesse moyenne.

5. Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule entre le plan immobile d'équation $z = h$ et le plan d'équation $z = 0$ animé d'une vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$. La vitesse du fluide s'écrit $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$ et la pression dans le fluide est de la forme $P = P(y)$ avec $P(y = 0) = P_0$. On néglige le poids. On suppose ici que le fluide subit une force par unité de volume de la forme $\overrightarrow{f} = cy\overrightarrow{e_y}$ où c est une constante positive.

5.a. Préciser l'unité de c.

5.b. Déduire de l'équation de Navier-Stokes les expressions de $v(z)$ et de $P(y)$.

5.c. Exprimer le débit volumique à travers la canalisation de hauteur h et de largeur L selon Oy. En déduire la vitesse moyenne.

6. L'écoulement de l'air autour d'un cycliste qui se déplace à $v = 20\ km.h^{-1}$ est-il laminaire ou turbulent? Donnée : $\eta_{air} = 10^{-5}\ Pl$.

II. **Correction:**

1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit $\rho(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

Cette équation est en $N.m^{-3}$

$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ est l'accélération de particule fluide

$\rho\overrightarrow{g}$ est la force poids volumique

$-\overrightarrow{\text{grad}}P$ est la force volumique de pression

$\eta\Delta\overrightarrow{v}$ est la force volumique de viscosité

2. Pour $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_y}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$.

Pour $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_z}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v}{dy^2}\overrightarrow{e_z}$.

Pour $\overrightarrow{v} = v(y,z)\overrightarrow{e_x}$ on a $\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\overrightarrow{e_x}$.

3. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}(v(y)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

La pression est uniforme donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \overrightarrow{0}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v(y)}{dy^2}\overrightarrow{e_x}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\frac{d^2v(y)}{dy^2} = 0$ soit $\frac{dv}{dy} = A$ et $v = Ay + B$.

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(y = -h) = -v_0 = -Ah + B$

$v(y = h) = +v_0 = Ah + B$

On ajoute les équations $2B = 0$ et on soustrait les équations $-2v_0 = -2Ah$ soit $A = \frac{v_0}{h}$.

On a donc $v(y) = \frac{v_0 y}{h}\overrightarrow{e_x}$.

4.

4.a. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(x)\frac{\partial}{\partial y}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(x)\frac{\partial}{\partial y}(v(x)\overrightarrow{e_y}) = \overrightarrow{0}$

La pression est $P(y) = P_0 - ay$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y} = -a\overrightarrow{e_y}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\overrightarrow{0} = -a\overrightarrow{e_y} + \eta\frac{d^2v}{dx^2}\overrightarrow{e_y}$ soit $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{a}{\eta}$.

On intègre deux fois par rapport à x: $\frac{dv}{dx} = -\frac{ax}{\eta} + C.$ et $v(x) = -\frac{ax^2}{2\eta} + Cx + D$

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(x = 0) = 0 = D$

$v(x = h) = 0 = \frac{ah^2}{2\eta} + Ch$ d'où on en déduit C

Ainsi $v(x) = \frac{a}{2\eta}(h^2 - x^2)$: on remarque que pour $a > 0$, la pression diminue quand y augmente et la vitesse est selon $+Oy$. De même pour $a < 0$, la pression augmente quand y augmente et la vitesse est selon $-Oy$. Le fluide se déplace donc bien des fortes vers les faibles pressions.

4.b. On calcule le débit volumique à travers la section perpendiculaire à la vitesse, soit la section dans le plan Oxz, M est donc repéré par x et z et $dS = dxdz$. On a donc $D_v = \iint \frac{a}{2\eta}(h^2 - x^2)dxdz = \frac{a}{2\eta}\int_0^h (h^2 - x^2)dx \int_0^{\text{Ł}} dz = \frac{aL}{2\eta}(h^3 - \frac{h^3}{3}) = \frac{aLh^3}{3\eta}$.

On en déduit la vitesse moyenne par $D_v = v_{moy}hL$ soit $v_{moy} = \frac{D_v}{hL} = \frac{ah^2}{3\eta}$.

5.

5.a. f est en N/m^3 donc $[c] = [\frac{f}{y}] = N.m^{-4}$.

5.b. La vitesse ne dépend pas du temps donc $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(z)\frac{\partial}{\partial x}$

d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(z)\frac{\partial}{\partial x}(v(z)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

La pression dépend de y donc $\overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y}$

On néglige le poids donc le terme $\rho\overrightarrow{g}$ est négligé

$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{d^2v(z)}{dz^2}\overrightarrow{e_x}$

Quand on remplace tous les termes dans l'équation de Navier Stokes, il reste $\overrightarrow{0} = -\frac{dP}{dy}\overrightarrow{e_y} + \eta\frac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x} + cy\overrightarrow{e_y}$

La projection sur Oy donne: $0 = -\frac{dP}{dy} + cy$ soit $\frac{dP}{dy} = cy$ soit $P(y) = \frac{cy^2}{2} + D$ avec $D = P(y = 0) = P_0$

La projection sur Ox donne $\frac{d^2v}{dz^2} = 0$, on intègre deux fois par rapport à z soit $\frac{dv}{dz} = A$ et $v(z) = Az + B$.

Le fluide visqueux adhère aux parois donc la vitesse du fluide par rapport aux parois est nulle soit:

$v(z = 0) = v_0 = B$

$v(z = h) = 0 = Ah + v_0$ d'où on en déduit $A = -\frac{v_0}{h}$

Ainsi $v(x) = \frac{v_0}{h}(h - z)$.

5.c. On calcule le débit volumique à travers la section perpendiculaire à la vitesse, soit la section dans le plan Oyz, M est donc repéré par y et z et $dS = dydz$. On a donc $D_v = \iint \frac{v_0}{h}(h - z)dydz = \frac{v_0}{h}\int_0^h (h - z)dz \int_0^{\text{Ł}} dy = \frac{v_0L}{h}(h^2 - \frac{h^2}{2}) = \frac{v_0Lh}{2}$.

On en déduit la vitesse moyenne par $D_v = v_{moy}hL$ soit $v_{moy} = \frac{D_v}{hL} = \frac{v_0}{2}$.

6. Le nombre de Reynolds est égal à: $\mathcal{R}_e = \frac{\rho_{air}vL}{\eta_{air}} = \frac{1.\frac{20}{3,6}.1}{10^{-5}} \approx 5.10^5 >> 0$: l'écoulement de l'air autour du cycliste est turbulent.