Diffusion de CO_2 dans le champagne

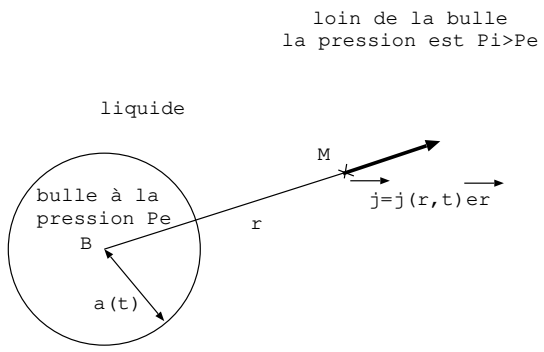
Les bulles du champagne sont constituées de dioxyde de carbone. Elles naissent à la surface du verre. Après une phase de croissance sur place, elles se détachent et montent dans le verre en poursuivant leur croissance. Arrivées à la surface, elles explosent en laissant derrière elles un cratère et en provoquant l'émission d'un jet vertical. Ce jet se brise finalement en fines gouttelettes. Le problème étudie la phase de croissance ainsi que l'ascension des bulles. Donnée: $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

Croissance initiale des bulles

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre B fixe et de rayon variable $a(t)$ contenant $N_g(t)$ molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait. On note $C_g(t)$ le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. On repère un point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre B. Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note $C(r,t)$ le nombre de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume, supposé indépendant de θ et ϕ.

Dans cette partie, on néglige les phénomènes de tension superficielle et la pesanteur. Avant ouverture de la bouteille, la pression P est uniforme dans tout le système, avec la même valeur dans la phase gazeuse et dans la phase liquide. L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure dans la bouteille fermée où la pression initiale vaut P_i, impose la relation $C = \dfrac{\chi P_i}{k_B T}$ entre C, la densité volumique de molécules de CO_2 dans la phase liquide et la pression P_i dans la phase gazeuse, χ ne dépend que de la température (c'est donc une constante), k_B est la constante de Boltzmann.

Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique P_e avec $P_e < P_i$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution, elle s'écrit $C(r = a, t) = \dfrac{\chi P_e}{k_B T}$. Loin de la bulle, on a toujours $C(r \to \infty, t) = \dfrac{\chi P_i}{k_B T}$. Ainsi $C(r,t)$ n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution: on note $\overrightarrow{j} = j(r,t)\overrightarrow{e_r}$ le vecteur-densité de flux de particules, il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.



Données:

La loi des gaz parfaits s'écrit $PV = Nk_BT$ où k_B est la constante de Boltzman et N le **nombre de molécules** à la pression P occupant le volume V.

Le gradient de $C(r,t)$ en coordonnées sphériques: $\overrightarrow{\text{grad}}C = \dfrac{\partial C}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$.

La surface d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$

Le volume d'une sphère de rayon R est $\dfrac{4\pi R^3}{3}$

Le volume compris entre deux sphères de rayons voisins R et $R + dr$ est $4\pi R^2 dr$.

1. Rappeler les unités de $j(r,t)$, $C(r,t)$ et D, et écrire la loi de Fick reliant ces grandeurs. Expliquer à l'aide de cette loi pourquoi les bulles de CO_2 grossissent à l'ouverture de la bouteille.

2. On considère le système infinitésimale compris entre les sphères de rayon r et $r + dr$ (avec $r > a$, les sphères sont dans la phase liquide).

On se place en **régime stationnaire** ($a(t)$ varie mais il varie lentement à l'échelle des temps considérés). Montrer que $j(r)r^2$ est une constante et que la densité volumique de molécules de CO_2 dans la phase liquide est de la forme $C(r) = \alpha + \dfrac{\beta}{r}$. Exprimer α et β en fonction de P_e, P_i, χ, a, k_B et T.

2.a. Exprimer le vecteur densité de courant et en déduire δN_g le nombre de molécules de CO_2 qui entrent dans la bulle entre t et $t + dt$.

3. Les molécules de CO_2 entrées dans la bulle entre t et $t+dt$ font augmenter le rayon de la bulle de $a(t)$ à $a(t+dt) = a(t) + da$. Ces molécules obéissent à la loi des gaz parfait. Déduire de cette loi que $a.da = Kdt$ $(*)$. Exprimer K en fonction de χ, P_e, P_i et D et vérifier l'homogénéité de la relation $(*)$.

4. Par intégration de $(*)$, déterminer l'expression de $a(t)$ en fonction de t, K et a_0 (rayon de la bulle à l'instant $t = 0$). Lors de la croissance de la bulle à la surface du verre sur son site de naissance pour $P_e = 1\ bar$ et $P_i = 3\ bars$, le rayon des bulles croît de $a_0 = 10^{-6}\ m$ jusqu'à $a_1 = 10^{-5}\ m$. Vérifier que dans ces conditions on a $K \approx 4.10^{-9}\ SI$ sachant que $D = 3.10^{-9}\ SI$ et $\chi = 0,7$. Evaluer la on a durée τ_1 de cette phase.

Croissance et ascension des bulles

On suppose tout d'abord que $a(t)$ est une constante au cours de l'ascension. On modélise les actions du champagne liquide assimilé à de l'eau de masse volumique $\mu = 10^3\ kg.m^{-3}$, par la poussée d'Archimède et une force de traînée de Stokes opposée à la vitesse $\overrightarrow{V}$ des bulles: $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta a\overrightarrow{V}$ où $\eta = 1,0.10^{-3}\ SI$ est la viscosité dynamique du champagne.

5. Déterminer l'unité de la viscosité.

6. Justifier que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède.

7. On suppose que la bulle a un mouvement rectiligne uniforme. En déduire l'expression de sa vitesse d'ascension U en fonction de η, μ, g et a. Calculer numériquement U pour $a = 0,1\ mm$.

8. On admet en outre que l'expression de $a(t)$ établie en question 5 reste valable en dépit du mouvement de la bulle. En déduire le mouvement de la bulle et évaluer numériquement la durée τ_2 de son ascension dans une flûte de hauteur $H = 8\ cm$. On adoptera les données numériques de la question 5.

I. **Correction : Diffusion de CO_2 dans le champagne**

Croissance initiale des bulles

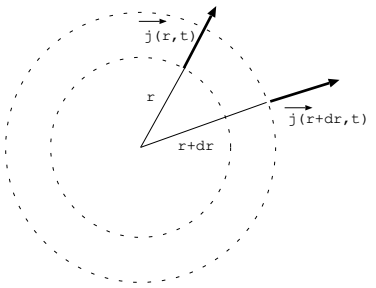
1. Les unités sont: $[j] = molecules.m^{-2}.s^{-1}$, $[C] = molecules.m^{-3}$ et $[D] = m^2.s^{-1}$. La loi de Fick qui traduit que la diffusion se produit en présence d'inhomogénéités, des fortes vers les faibles concentrations s'écrit $\overrightarrow{j} = -D\overrightarrow{\text{grad}}\, C$.

A l'ouverture de la bouteille la pression près des bulles diminuent alors que la pression dans le liquide reste élevée. Il y a donc des inhomogénéités de pression qui sont à l'origine de la diffusion des molécules de CO_2. Les molécules de CO_2 diffusent des fortes concentrations (ou fortes pression) vers les faibles concentrations (ou basses pressions). Le CO_2 se dirige donc vers les bulles et fait grossir les bulles.

2.

Le nombre de molécules de CO_2 qui entrent dans le système entre les instants t et $t+dt$ est égal au nombre de molécules qui traversent la sphère de rayon r, il s'écrit $\delta N_e = j(r,t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de molécules de CO_2 qui sortent du système entre les instants t et $t+dt$ est égal au nombre de molécules qui traversent la sphère de rayon $r+dr$, il s'écrit $\delta N_s = j(r+dr,t)4\pi(r+dr)^2 dt$.



Remarque: ici les molécules de CO_2 diffusent vers la bulle donc $j(r) < 0$. Pour les démonstrations je travaille avec $j(r) > 0$, les résultats sont valables aussi pour $j(r) < 0$.

En régime stationnaire, le nombre de molécules de CO_2 dans le volume étudié est constant donc le nombre de molécules qui entrent est égal au nombre de molécules qui sortent du volume entre t et $t+dt$ soit $j(r)4\pi r^2 dt = j(r+dr)4\pi(r+dr)^2 dt$. On a donc $j(r)r^2 = j(r+dr)(r+dr)^2$. La fonction $j(r)r^2$ a la même valeur en r et en $r+dr$ donc elle est indépendante de r.

Or d'après la loi de Fick, on a $j(r) = -D\dfrac{dC}{dr}$ soit $r^2\dfrac{dC}{dr} = \gamma$ ou encore $\dfrac{dC}{dr} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ soit par intégration par rapport à r on a $C(r) = -\dfrac{\gamma}{r} + \alpha$. On trouve γ et α avec les conditions aux limites $C(r=a,t) = \dfrac{\chi P_e}{k_B T} = -\dfrac{\gamma}{a} + \alpha$ et $C(r\to\infty,t) = \dfrac{\chi P_i}{k_B T} = \alpha$ d'où $\gamma = \dfrac{\chi(P_i - P_e)a}{k_B T}$ et donc $C(r) = -\dfrac{\chi(P_i - P_e)a}{k_B T r} + \dfrac{\chi P_i}{k_B T}$.

2.a. On en déduit le vecteur densité de courant par la loi de Fick soit $j(r) = -D\dfrac{dC}{dr} = -\dfrac{D\chi(P_i - P_e)a}{k_B T r^2} < 0$ car $P_i > P_e$.

Le nombre de molécules de CO_2 qui entrent dans la bulle entre t et $t+dt$ est égal au nombre de particules qui traversent la sphère de rayon a dans le sens $-\overrightarrow{e_r}$. On a donc $\delta N_g = -j(r=a)4\pi a^2 dt = \dfrac{D\chi(P_i - P_e)4\pi a}{k_B T}dt$.

3. Les molécules de CO_2 entrées dans la bulle entre t et $t+dt$ occupent le volume compris entre les sphères de rayon $a(t)$ et $a(t)+da$ à la pression P_e. La loi des GP s'écrit donc $P_e 4\pi a(t)^2 da = \delta N_g k_B T = D\chi(P_i - P_e)4\pi a(t)dt$ d'où après simplification $ada = D\chi(\dfrac{P_i}{P_e} - 1)dt = Kdt$ avec $K = D\chi(\dfrac{P_i}{P_e} - 1)$.

L'équation $ada = Kdt$ donne l'unité de K soit $[K] = [\dfrac{ada}{dt}] = m^2.s^{-1}$. Or l'expression de K montre que K est de la même unité que D (car χ est un nombre sans unité), donc cela correspond puisque D est en $m^2.s^{-1}$.

4. On intègre a entre a_0 et a_1 et t entre 0 et τ_1 soit $\displaystyle\int_{a_0}^{a_1} ada = K\int_0^{\tau_1} dt$ soit $\dfrac{a_1^2 - a_0^2}{2} = K\tau_1$ soit $\tau_1 = \dfrac{a_1^2 - a_0^2}{2K}$.

AN : $K = 3.10^{-9}.0,7(\dfrac{3}{1} - 1) = 4,2.10^{-9}\ m^2.s^{-1}$ et $\tau_1 = 1,2.10^{-2}\ s = 12\ ms$.

Croissance et ascension des bulles

5. On a $[\eta] = [\dfrac{F}{6\pi a V}] = \dfrac{kg.m.s^{-2}}{m.m.s^{-1}} = kg.m^{-1}.s^{-1}$.

6. Le poids de la bulle est égal au volume de la bulle multiplié par la masse volumique du gaz que contient la bulle et par g.

La poussée d'Archimède est égale au volume de la bulle multiplié par la masse volumique du liquide qui entoure la bulle et par g.

Or la masse volumique du liquide est de l'ordre de $10^3\ kg.m^{-3}$ et la masse volumique d'un gaz est mille fois plus petite. Le poids est donc mille fois plus faible que la poussée d'Archimède, on pourra le négliger.

7. La bulle a un mouvement rectiligne uniforme, elle a donc une accélération nulle dans le référentiel d'étude supposé galiléen. La somme des forces exercées sur la bulle est nulle à savoir la force poids (négligeable), la poussée d'Archimède et la force de traînée. Ces deux forces se compensent soit $6\ pi\eta aU = \mu\dfrac{4}{3}\pi a^2 g$ d'où $U = \dfrac{2\mu a^2 g}{9\eta}$. AN: $U = 2,2\ cm.s^{-1}$.

8. La vitesse s'écrit donc $U(t) = \dot{z} = \dfrac{2\mu a^2 g}{9\eta}$ avec d'après la question 5 $a^2(t) = a_0^2 + 2Kt$ soit $\dot{z} = \dfrac{2\mu g}{9\eta}(a_0^2 + 2Kt)$ et donc par intégration $z = \dfrac{2\mu g}{9\eta}(a_0^2 t + Kt^2)$ (avec Oz verticale ascendante). Le temps τ_2 vérifie $H = \dfrac{2\mu g}{9\eta}(a_0^2\tau_2 + K\tau_2^2)$. On trouve $\tau_2 \approx 3\ s$.