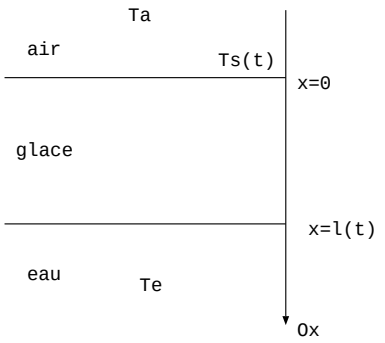
Gel d'un lac

Nous sommes en hiver et la température extérieure est $T_a = 253\ K$, le lac de Joux en Suisse gèle et devient la plus grande patinoire naturelle d'Europe. On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi stationnaire. On note $H = 30\ m$ la profondeur du lac, et $S = 10\ km^2$ sa surface.

On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion $T_e = 273K$. L'air au-dessus du lac est à la température constante et uniforme $T_a = 253\ K$ et à la pression atmosphérique $P_0 = 1\ bar$. La température de surface de la glace au contact de l'air est $T_s(t)$. Libre de glace à l'instant $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est $l(t)$. La position d'un point du lac est repérée par son abscisse x, l'axe Ox étant vertical descendant et l'origine O étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes : masse volumique $\mu = 900\ kg.m^{-3}$, conductivité thermique $\lambda = 2,1\ W.K^{-1}.kg^{-1}$, enthalpie massique de fusion (à $T_e = 273\ K$) $h_{fus} = 335\ kJ.kg^{-1}$ et capacité thermique massique $c_g = 2,1\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

- Les transferts thermiques par convection entre la glace et l'air sont donnés par le vecteur densité de courant de convection de la loi de Newton $j_c = h(T_s(t) - T_a)$ où $h = 42\ SI$, ce vecteur est dirigé de la glace vers l'air (en effet $T_e > T_s(t) > T_a$).

- Le transfert thermique par convection à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment à la température de l'eau : $T(x = l) = T_e$.

1. Calculer le rapport $l_0 = \dfrac{\lambda}{h}$ en précisant son unité.

2. Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air. Que vaudrait le transfert thermique Q cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac?

3. Dans l'hypothèse où $T_s(t)$ varie lentement (régime quasi-stationnaire), déduire d'un bilan d'énergie sur un système infinitésimal de glace, que la température $T(x)$ dans la glace (pour x variant de 0 et l) peut s'écrire sous la forme: $T(x) = Ax + B$ où les constantes A et Bsont à exprimer en fonction de T_s, T_a et T_e.

4. Entre les instants t et t+dt, $l(t)$ varie de dl.

4.a. Exprimer, pour cet intervalle de temps dt, le transfert thermique δQ_1 cédé par l'eau lors de sa solidification.

4.b. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif δQ_c à travers l'interface glace-eau et le transfert thermique conductif $\delta Q'_c$ à l'interface glace-air.

4.c. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique δQ_2 cédé par la glace à l'air par convection.

5. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose : $\delta Q'_c = \delta Q_2$. En déduire l'expression de $T_s(t)$ en fonction de T_e, T_a, $l(t)$ et l_0.

6. La continuité du flux thermique à l'interface glace-eau impose : $\delta Q_c = \delta Q_1$. Montrer que $l(t)$ vérifie une équation de la forme $v_0 dt = (1 + \dfrac{l}{l_0})dl$. Exprimer v_0 en fonction des données et vérifier que v_0 est homogène à une vitesse.

7. Intégrer l'équation précédente, montrer que $l(t)$ vérifie l' équation du second degré $l(t)^2 + 2l_0 l(t) - 2v_0 l_0 t = 0$. En déduire $l(t)$ tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.

8. Exprimer, en fonction de l_0 et v_0, un temps caractéristique τ de l'évolution de $l(t)$ et en donner un ordre de grandeur sachant que v_0 est de l'ordre de $10^{-6}\ m.s^{-1}$.

9. Rappeler l'équation de diffusion thermique et exprimer un temps caractéristique τ' de la diffusion dans la glace sur la longueur l_0, et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire .