

1.a) Le modèle continu revient à négliger le caractère discret de la matière à l'échelle microscopique pour supposée au contraire qu'elle peut se comporter comme un milieu continu. En pratique, on travaille à une échelle mésoscopique grande devant la taille des particules et leur libre parcours moyen.

Pour le modèle routier, cela revient donc à regarder l'évolution du trafic sur des distance grandes devant L_0 .

2.a) n est en vehic. m^{-1} soit finalement en m^{-1} .

2.b) Sur une longueur L_0 , il y a au plus une seule voiture ce qui veut dire que $n < n_{max} = \frac{1}{L_0}$.

3.a) j s'exprime en vehic.s $^{-1}$ soit finalement en s^{-1} .

3.b) Considérons la route à l'abscisse x , on cherche le nombre de voitures qui vont passer pendant dt . Par définition, on sait que ce nombre est $dN = j(x, t)dt$. Par ailleurs, les voitures à ce niveau se déplacent à $v(x, t)$ ce qui veut dire que toute voiture qui va passer doit être à une distance d'au plus $v(x, t)dt$ (pour lui laisser le temps d'arriver). Connaissant, la concentration en voitures, on peut donc écrire $dN = v(x, t)dt n(x, t)$ soit après identification $j(x, t) = n(x, t)v(x, t)$.

Cette relation est une relation classique des phénomènes de transport et traduit le lien entre concentration et densité volumique de courant. On écrit une relation pareille en diffusion des particules, en électromagnétisme ou encore en hydrodynamique pour la masse.

Partie I.

I.A.1.a) Ce premier terme correspond au temps nécessaire pour dissiper l'énergie cinétique du véhicule au cours du freinage. De manière plus quantitative, on peut écrire le PFD pour le véhicule soit en notant $V(t)$ sa vitesse au cours du freinage :

$$M \frac{dV}{dt} = -fMg \implies M \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = M \frac{dV}{dx} V = \frac{dE_c}{dx} = -fMg$$

Par intégration en $x = 0$ où le véhicule à la vitesse $V = v(x, t)$ et la distance de fin de freinage $x = \Delta x$ où $V = 0$, on trouve :

$$\Delta E_c = fMg\Delta x \implies fMg\Delta x = \frac{1}{2}Mv^2 \implies \boxed{\Delta x = \frac{1}{2fg}v^2}$$

On trouve donc une distance de freinage de la bonne forme $\Delta x = Cv^2$ avec $C = \frac{1}{2fg}$.

I.A.1.b) Il "suffit" de calculer le rapport $\frac{\text{Distance de freinage}}{\text{Vitesse}^2}$ (attention à bien mettre la vitesse dans la bonne unité).

Vitesse (km.h $^{-1}$)	40	50	60	70	100	110	120
Δx (m)	8	12	18	24	48	58	72
$\frac{\text{Distance de freinage}(m)}{\text{Vitesse}^2(m.s^{-1})}$	7,45	7,15	7,45	7,3	7,15	7,14	7,45

On voit que le rapport est quasiment constant (aux erreurs expérimentales près) et en faisant la moyenne, on trouve $C = 7,3 \text{ m}^{-1}.s^2$. On en déduit alors $f = \frac{1}{2Cg} = 7.10^{-3}$.

I.A.1.c) Le second terme $v\tau_1$ correspond à la distance parcourue avant que l'automobiliste ne commence à freiner. Le troisième assure simplement que les voitures sont distance d'au moins la longueur moyenne d'une voiture.

I.A.1.d) L'"astuce" vient du fait que d'un côté la vitesse est en km.h $^{-1}$. La vitesse en kilomètre par heure se trouve grâce à un facteur 3,6. On a donc :

$$v\tau_0 = \frac{\text{vitesse en km.h}^{-1}}{2} = \frac{v3,6}{2} \implies \boxed{\tau_1 = 1,8 \text{ s}}$$

I.A.2.a) Dans la longueur $L(v)$, il y a exactement une voiture (puisque les autres sont à au moins cette distance), on a donc $nL(v) = 1$. On en déduit alors :

$$n(v\tau_D + L_0) = 1 \Rightarrow \boxed{v(n) = \frac{1}{\tau_D} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_{max}} \right)} \text{ et } \boxed{j(n) = nv = \frac{1}{\tau_D} \left(1 - \frac{n}{n_{max}} \right)}$$

I.A.2.b) A trop faible concentration, le modèle continu n'est plus valable (car les voitures sont extrêmement distantes). Par ailleurs, si la concentration devient trop faible, on voit que la vitesse devient très grande ce qui est bien entendu impossible.

I.A.2.c)

$$v = \frac{1}{\tau_D} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_{max}} \right) < v_{max} \Rightarrow n > n_0 = \frac{1}{L_0 + v_{max}\tau_D}$$

I.A.2.d) Si $n < n_0$, la vitesse sature à sa vitesse maximum et $v = v_{max}$ d'où $j = nv_{max}$

I.A.2.e)

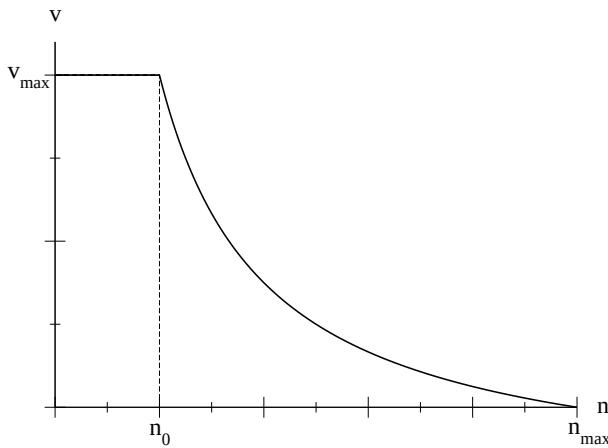


Figure 1 : Graphe $v(n)$ dans le modèle A.

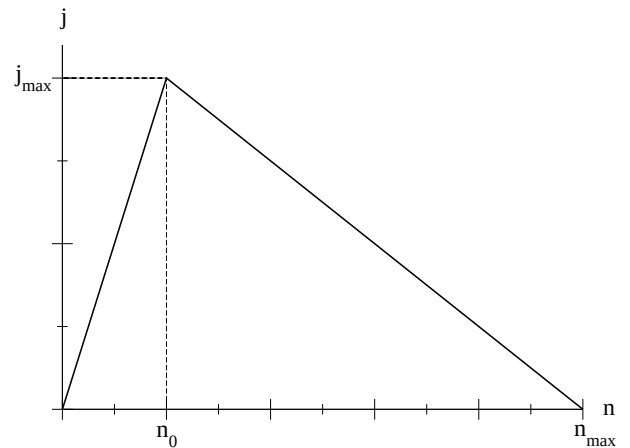


Figure 2 : Diagramme fondamental $j(n)$ dans le modèle A.

Les points remarquables sont indiqués sur les graphes avec $n_0 = \frac{1}{L_0 + v_{max}\tau_D}$ et $j_{max} = n_0 v_{max}$.

I.B.1) A haute concentration $n \rightarrow n_{max}$, on a v qui tend vers 0 ce qui est cohérent car les voitures sont collées.

A faible concentration, $v = v_{max}$ ce qui est normal car les voitures vont à leur vitesse maximum (rien ne les gêne).

I.B.2) Il suffit d'écrire $j = nv = v_{max} \left(n - \frac{n^2}{n_{max}} \right)$. j passe par un maximum pour $n = n_{max}/2$ avec une valeur $j_{max} = \frac{n_{max}j_{max}}{4}$.

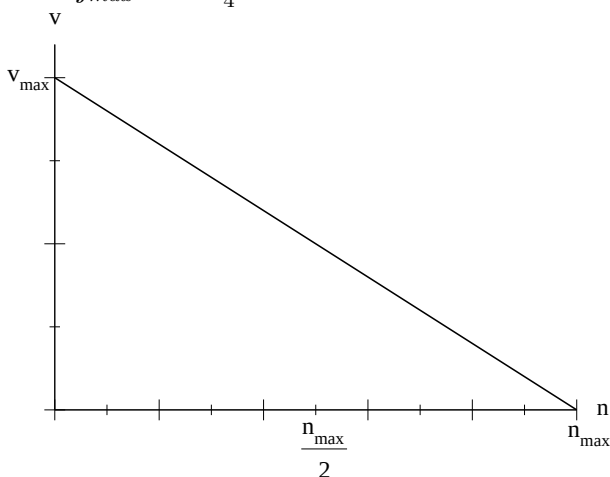


Figure 3 : Graphe $v(n)$ dans le modèle B.

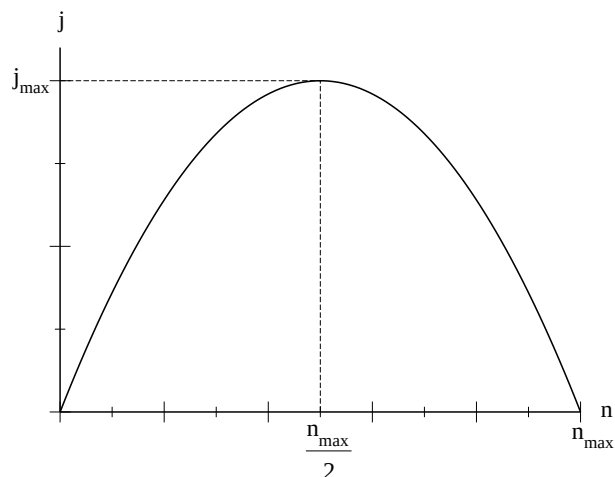


Figure 4 : Diagramme fondamental $j(n)$ dans le modèle B.

I.C.1) Dans le modèle A, le courant est maximum pour $n_C = n_0$ et $j_{max} = n_0 v_{max}$.

Dans le modèle B, le courant est maximum pour $n_C = \frac{n_{max}}{2}$ et vaut $j_{max} = \frac{n_{max} j_{max}}{4}$.

Une circulation est congestionnée quand il y a beaucoup de véhicules *i.e.* pour $n > n_C$.

Une circulation est fluide quand il y a peu de véhicules *i.e.* pour $n < n_C$.

Pour toute valeur de j , il existe deux concentrations qui donne cette concentration, l'une fluide où on a peu de véhicules à haute vitesse, l'autre congestionnée où on plus de véhicules mais beaucoup plus lents.

I.C.2.a) L'expérience de par sa forme et de par la position du maximum du diagramme semble plus cohérente avec le modèle A.

I.C.2.b) La vitesse v_{max} représente graphiquement la pente de la partie croissante du diagramme et on a peut lire graphiquement en utilisant les points à faible concentration et on trouve sans surprise $v_{max} \simeq 50 \text{ km.h}^{-1}$.

Graphiquement, on a $n_C = 0,1 \text{ veh. m}^{-1}$.

On a alors $j_C = 3900 \text{ veh.h}^{-1}$.

I.C.2.c) La concentration qui annule j donne la valeur de $n_{max} = \frac{1}{L_0}$. Graphiquement, on a $n_{max} = 0,425 \text{ veh. m}^{-1}$ ce qui conduit à $L_0 \simeq 2,4 \text{ m}$. Cette longueur moyenne de véhicule peut paraître un peu courte pour les véhicules mais est tout à fait cohérente car on prend en compte également les deux roues. Cela laisse donc penser que les deux roues ont une influence non négligeable sur la longueur moyenne et qu'ils sont donc fortement présents en ville.

I.C.2.d) $n_C = n_0 = \frac{1}{v_{max} \tau_D + L_0}$ d'où $\tau_D = \frac{1}{v_{max}} \left(\frac{1}{n_C} - L_0 \right) \simeq 0,55 \text{ s}$. S'il n'y a pas d'erreur c'est tout de même ... TRES inquiétant.

Partie II

II.A.1.a) $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

II.A.1.b) $j = nv$ d'où $v = \frac{j}{n}$.

II.A.1.c) Graphiquement, la vitesse est donc la pente de la droite qui relie l'origine au point du diagramme.

II.A.2.a) Il suffit de faire un bilan sur la portion de route entre x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$ pour écrire :

$$\boxed{\text{Nombre de voitures en } t + dt} = \boxed{\text{Nombre de voitures en } t} + \boxed{\text{Termes de variations}}$$

Reste alors à exprimer chaque terme :

- Nombre de voitures en $t + dt$: $dN(t + dt) = n(x, t + dt) dx$.
- Nombre de voitures en t : $dN(t) = n(x, t) dx$.
- Termes variations, il sort en $x + dx$ $j(x + dx, t)dt$ et il rentre en x $j(x, t)dt$ soit finalement un terme de variation $\Delta N = (j(x, t) - j(x + dx, t))dt$.

On peut donc mettre le bilan sur la forme :

$$\begin{aligned} dN(t + dt) &= dN(t) + \Delta N \implies n(x, t + dt) dx = n(x, t) dx + (j(x, t) - j(x + dx, t))dt \\ &\implies \underbrace{(n(x, t + dt) - n(x, t))}_{= \frac{\partial n}{\partial t}} dt dx = - \underbrace{(j(x + dx, t) - j(x, t))}_{= \frac{\partial j}{\partial x}} dt dx \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la relation proposée par l'énoncé $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$

II.A.2.b) Cette équation est l'équation classique de conservation qu'on retrouve en diffusion des particules, en diffusion de la chaleur, pour la masse en hydrodynamique ou pour la charge en électromagnétisme.

II.A.3.a) Si l'automobiliste derrière imitait instantanément la voiture devant, alors il ne pourrait pas y avoir de variation de concentration (les voitures ne se rapprocheraient jamais l'une de l'autre) et donc la longueur entre les voitures serait constante... Par conséquent, on aurait une variation de v à n constant *i.e.* une variation de j à n constant ... Ce constat est incohérent puisque dans le diagramme fondamental, on ne peut pas avoir 2 valeurs de j pour une même valeur de n . Par l'absurde, comme on suppose qu'on obéit au diagramme fondamental, la voiture située derrière n'imita pas immédiatement celle devant ...

Il y a toujours un délai entre deux véhicules successifs et donc propagation de véhicule en véhicule en remontant la file ...

II.A.3.b) On a supposé que j obéit au diagramme fondamental donc j est une fonction uniquement de n *i.e.* qu'on a $j(n)$ toute variation de j passe donc par une variation de n et par dérivation composée, on a : $\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{dj}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} = c \frac{\partial n}{\partial x}$. En utilisant ce résultat dans l'équation de conservation, on trouve :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + c \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \text{avec } c = \frac{dj}{dn}$$

c est alors homogène à une célérité. Elle correspond à la pente de la tangente en un point du diagramme fondamental (en particulier c peut être négatif ...)

II.A.3.c)

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial x} = f'(x-ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = -cf'(x-ct)$$

En injectant la forme proposée dans l'équation, on vérifie que $n(x,t) = f(x-ct)$ est bien solution de l'équation de propagation. Il s'agit bien entendu d'une onde plane progressive vers la droite (si on suppose que c est positive). Le profil de concentration aura donc tendance (si on suppose c constante) à se déplacer "en bloc" vers la droite (si on suppose c positif).

II.A.3.d) La dérivée particulière correspond à la variation d'une grandeur physique observée "du point de vue" d'une particule fluide qu'on suit. Autrement dit, elle correspond à la variation temporelle d'une grandeur en description **lagrangienne**. Plus mathématiquement, on a $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}$ soit à une dimension $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$.

Un champ vérifiant $\frac{D\psi}{Dt} = 0$ correspond à un champ qui se déplace "en bloc" avec l'écoulement fluide ... Si on se place dans le référentiel qui se déplace à la vitesse c , on a alors :

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + c \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

Autrement dit, on retrouve bien que localement la concentration se déplace à la vitesse c .

II.A.3.e) La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'enveloppe d'une onde, elle vaut $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Pour la circulation, on a "montré" que la concentration (*i.e.* l'"enveloppe") se déplace localement à la vitesse $c = \frac{dj}{dn}$, c'est donc cette vitesse qui joue le rôle de vitesse de groupe ...

Que ce soit pour la vitesse de groupe ou la vitesse de phase, L'analogie est parfaite en remplaçant ω par j et k par n !

II.A.3.f) Considérant le diagramme, on voit que pour un régime congestionné *i.e.* pour $n > n_C$, le courant décroît avec la concentration *i.e.* $c = \frac{dj}{dn} < 0$, on a donc une onde qui se propage vers la gauche (*i.e.* vers les x négatifs).

Au contraire, pour un régime fluide, *i.e.* pour $n < n_C$, le courant croît avec la concentration et on a $c = \frac{dj}{dn} > 0$, il y a bien propagation de la concentration vers la droite *i.e.* vers les $x > 0$.

II.A.3.g) Dans le modèle A, en régime congestionné, j s'écrit $j = \frac{1}{\tau_D} \left(1 - \frac{n}{n_{max}} \right)$, et on a donc :

$$c_A = \frac{dj}{dn} = -\frac{1}{n_{max}\tau_D} = -\frac{L_0}{\tau_D}$$

Pour le modèle B, on a $j = v_{max} \left(n - \frac{n^2}{n_{max}} \right)$, d'où :

$$c_B = \frac{dj}{dn} = v_{max} \left(1 - 2 \frac{n}{n_{max}} \right) < 0 \quad \text{car } n > n_C = \frac{n_{max}}{2}$$

On voit que le modèle A n'est pas dispersif puisque c est constante. En revanche, le modèle B est dispersif puisque la vitesse de groupe dépend de n .

II.A.3.h) Dans tous les cas, on est en trafic congestionné donc $c < 0$ et l'onde se propage vers les $x < 0$ (ce qui est rassurant pour l'esprit ...).

Dans le modèle A, il n'y a pas dispersion et tout se propage à c bien tranquillement.

En revanche dans le modèle B, la vitesse de propagation dépend de n . Il y aura donc déformation du profil de concentration. De plus, plus on est concentré plus la vitesse de l'enveloppe est rapide... Par conséquent le haut de la marche se déplace plus rapidement que le bas ce qui a tendance à rendre la marche de plus en plus raide, il y a apparition de l'onde de choc.

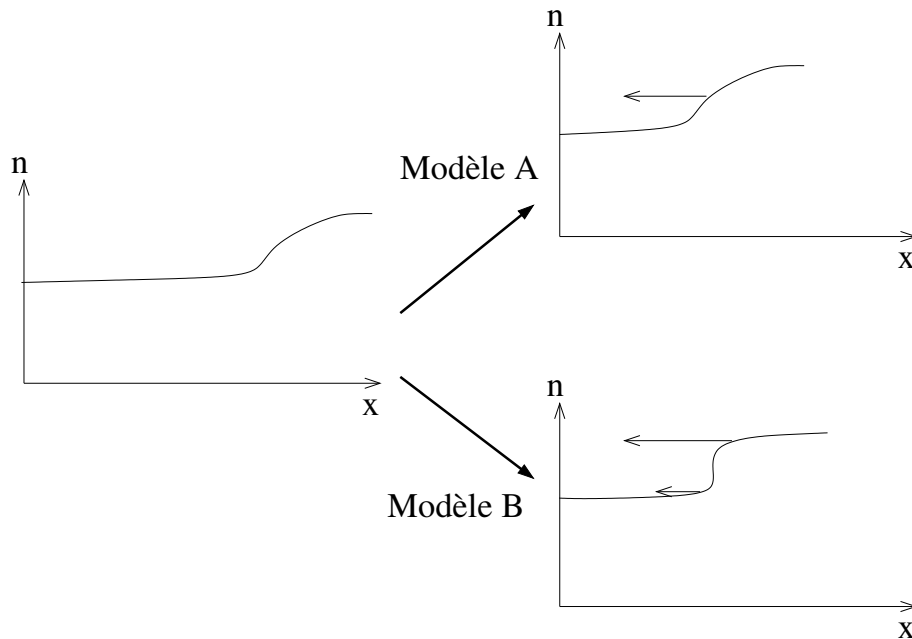


Figure 5 : Propagation du profil de concentration. Dans le modèle A, il y a propagation en bloc. Dans le modèle B en revanche, il y a déformation et apparition d'une onde de choc.

II.A.4.a)

Plaçons nous dans le référentiel lié à la route. On va faire un bilan sur un boîte qui contient l'onde de choc comprise entre x et $x + dx$ et on va faire un bilan entre les instants t et $t + dt$. Entre ces deux instants, le front de l'onde de choc a avancé à la vitesse U ce qui permet de tracer schématiquement les profils à t et $t + dt$ (figure 6).

Le bilan va toujours s'écrire comme :

$$dN(t + dt) - dN(t) = \text{termes de variations}$$

Les termes des variations sont simples puisqu'il rentre en x , $j_1 dt$ particules et il sort en $x + dx$ $j_2 dt$ particules.

Il reste alors à évaluer $dN(t + dt) - dN(t)$, la seule différence entre les deux instants réside dans la zone de déplacement du front d'onde (zone hachurée) et on a $dN(t + dt) - dN(t) = U dt (n_1 - n_2)$. On peut alors réécrire le bilan sous la forme :

$$dN(t + dt) - dN(t) = U dt (n_1 - n_2) = j_1 dt - j_2 dt \Rightarrow \boxed{U = \frac{j_2 - j_1}{n_2 - n_1}}$$

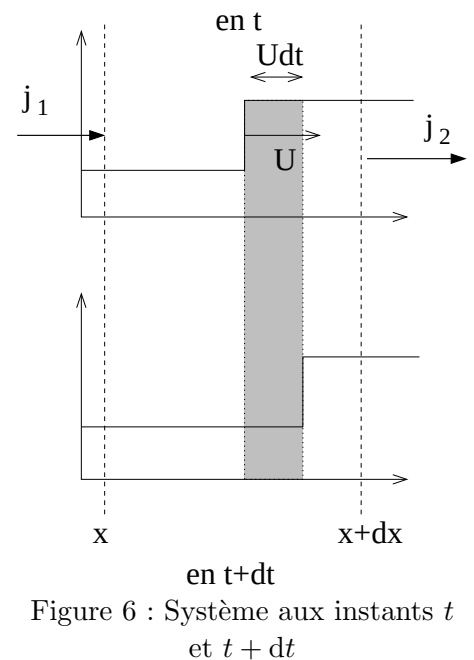


Figure 6 : Système aux instants t et $t + dt$

Le raisonnement dans le référentiel du front d'onde est encore plus simple. Plaçons nous donc dans le référentiel qui se déplace à la vitesse U . Les véhicules dans chaque zone se déplacent alors respectivement aux vitesses $v_1 - U$ et $v_2 - U$. Par ailleurs, dans ce référentiel tout est stationnaire ce qui veut dire que tout ce qui rentre dans la boîte est égal à tout ce qui en sort soit :

II.A.4.b)

$$n_1(v_1 - U) = n_2(v_2 - U) \implies U = \frac{n_2 v_2 - n_1 v_1}{n_2 - n_1} = \frac{j_2 - j_1}{n_2 - n_1}$$

On pourrait également mener un raisonnement de type hydrodynamique en regardant un système ouvert et un système fermé qui coïncident en t et faire le bilan sur $t + dt$.

$$N^*(t) = N(t)$$

$$N^*(t + dt) = N(t + dt) - n_1(v_1 - U)dt + n_2(v_2 - U)dt$$

Soit finalement :

$$\frac{dN^*}{dt} = \frac{dN}{dt} - n_1(v_1 - U) + n_2(v_2 - U)$$

or pour un système fermé $\frac{dN^*}{dt} = 0$ et on est en stationnaire donc $\frac{dN}{dt} = 0$, on retrouve alors la même relation...

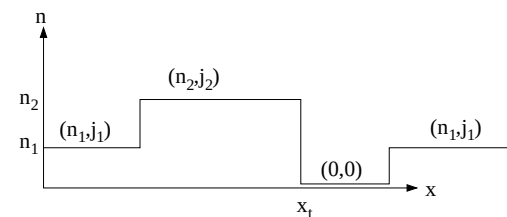
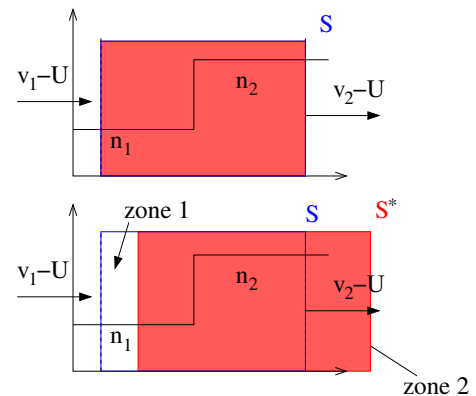
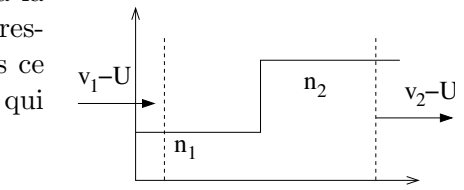
II.A.4.c) Graphiquement, U est tout simplement la pente de la droite qui relie les deux points (n_1, j_1) et (n_2, j_2) .

II.B.1.a) On a une densité qui est de 25 véhicules par kilomètres soit $n_1 = 0,025 \text{ veh. m}^{-1}$. Graphiquement, on a alors $j_1 = 1500 \text{ veh.h}^{-1}$. Le trafic est très nettement fluide $n < n_c = 0,1$.

II.B.1.b) Le véhicule se déplace à 10 km/h, pour trouver le point qui correspond à cette vitesse, il suffit de tracer la droite passant par l'origine et de pente 10^4 m.h^{-1} . Graphiquement, on a trouvé alors $n_2 = 0,2 \text{ veh.m}^{-1}$ et $j_2 = 2000 \text{ veh.h}^{-1}$. Le trafic est bien entendu congestionné car $n = 0,2 > n_c = 0,1$.

II.B.1.c)

L'allure de profil de concentration comprend en effet 4 zones. Loin en amont du tracteur (derrière le tracteur), la circulation n'est pas encore perturbée et est encore celle d'avant perturbation soit (n_1, j_1) . Puis on passe dans la zone qui a été ralentie par le tracteur autrement dit dans le bouchon qui correspond à l'onde de choc elle-même où on est au point de fonctionnement (n_2, j_2) . Enfin, en aval du tracteur il existe une zone "vide" de toute voiture qui croît avec le temps et très loin en aval du tracteur les voitures qui sont passées avant le tracteur continue à se propager au régime identique à celui d'avant la perturbation soit (n_1, j_1)

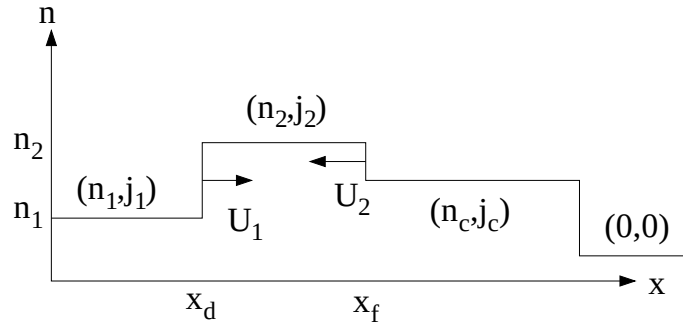


II.B.1.d) AN : $U_1 = \frac{j_2 - j_1}{n_2 - n_1} = 2,9 \text{ km.h}^{-1}$, en particulier $U_1 > 0$ ce qui signifie que le front avance **vers la droite**.

II.B.1.e) D'un côté le tracteur avance à une vitesse de 10 km/h de l'autre le bout du bouchon avance lui aussi à U_1 . Au total, le bouchon croît donc de $V_B = 10 - U_1 = 7,1 \text{ km.h}^{-1}$. Le tracteur met un temps t_1 de $t_1 = \frac{L}{v} = 0,3 \text{ h} = 18 \text{ min}$ et le bouchon a donc une longueur à l'arrivée de $L_B = V_B t_1 = 2,13 \text{ km}$.

II.B.1.f) Connaissant la longueur du bouchon et la densité à l'intérieur de ce bouchon, on peut en déduire le nombre de véhicules impliqué $N_B = n_2 L_B = 426$ véhicules impliqués ... (ca me paraît beaucoup ca ... non ? saleté de tracteur !)

II.B.2.a)



II.B.2.b) La vitesse U_2 de progression de l'avant du bouchon est $U_2 = \frac{j_c - j_2}{n_c - n_2} = -19 \text{ km.h}^{-1}$.

II.B.2.c) Le bouchon avance à gauche et recule à droite, il se résorbe donc à une vitesse $U_1 + U_2 = 21,1 \text{ km.h}^{-1}$

II.B.2.d) On connaît la longueur L_B du bouchon et la vitesse à laquelle il se résorbe, on peut en déduire son temps de disparition $\tau_R = \frac{L_B}{U_1 + U_2} \simeq 0,1 \text{ h} = 6 \text{ min}$.

Partie III

III.A.1.a) C'est à peu près clair car le second membre v_n^{ref} est nul et les conditions initiales sont nuls aussi donc rien ne bouge... Bref c'est trivial.

III.A.1.b) Pour $0 < t < \tau_1$, le second membre de l'équation est toujours nul puisqu'on prend v_n^{ref} avec un retard de τ_1 *i.e.* pour un temps encore négatif. On a donc toujours $v_n(t) = 0$.

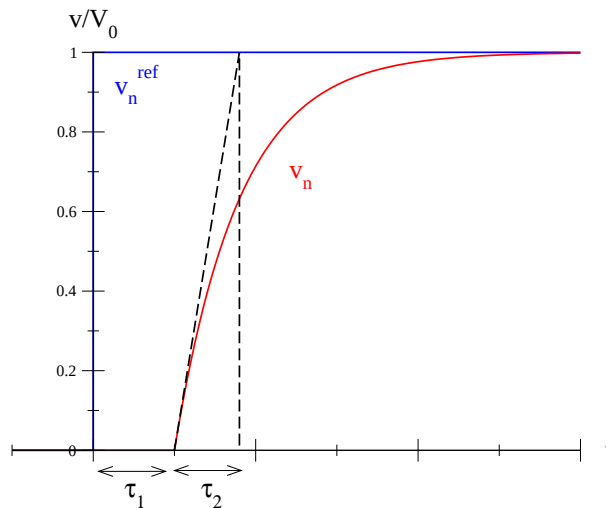
III.A.1.c) Pour $t > \tau_1$, l'équation différentielle à écrire est :

$$v_n + \tau_2 \frac{dv_n}{dt} = V_0$$

avec pour condition initiale $v_n(\tau_1) = 0$. On a donc la solution qui se met sous la forme pour $t > \tau_1$:

$$v_n(t) = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\tau_2}\right) \right]$$

III.A.1.d)



III.A.1.e) τ_1 correspond au temps de réaction du conducteur et τ_2 au temps qu'il faut au véhicule pour s'adapter à la vitesse de référence.

III.A.2.a) On injecte les formes proposées par l'énoncé en prenant $\underline{v}_n(t) = \underline{v}_n \exp j\omega t$:

$$v_n + \tau_2 \frac{dv_n}{dt} = v_n^{ref}(t - \tau_1) \Rightarrow \underline{v}_n \exp j\omega t (1 + j\omega\tau_2) = V_0 \exp j\omega(t - \tau_1)$$

D'où finalement $\underline{v}_n(t) = V_0 \frac{\exp j\omega(t - \tau_1)}{1 + j\omega\tau_2}$ et donc $\underline{H}^{ref} = \frac{\exp -j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$

III.A.2.b) Si $\omega\tau_1 \ll 1$, on a $\exp -j\omega\tau_1 \simeq 1 - j\omega\tau_1 \simeq \frac{1}{1 + j\omega\tau_1}$. On a alors :

$$\underline{H}^{ref} = \frac{\exp -j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \simeq \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \simeq \frac{1}{1 + j\omega(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \text{à l'ordre 1}$$

On a donc bien un passe bas d'ordre 1 de temps caractéristique $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

III.A.2.c)

$$\underline{H}^{ref} = \frac{v_n}{v_n^{ref}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \implies v_n + \tau \frac{dv_n}{dt} = v_n^{ref}(t)$$

III.A.3.a) $D_n = \xi_{n+1} - \xi_n$.

III.A.3.b) D'où $v_n^{ref} = \frac{D_n}{\tau_D}$ et $\frac{dv_n^{ref}}{dt} = \frac{\frac{dD_n}{dt}}{\tau_D} = \frac{1}{\tau_D}(v_{n+1} - v_n)$. En utilisant la relation différentielle entre v_n et v_n^{ref} , on trouve alors :

$$v_n + \tau \frac{dv_n}{dt} = v_n^{ref}(t) \implies \frac{dv_n}{dt} + \tau \frac{d^2v_n}{dt^2} = \frac{dv_n^{ref}}{dt} = \frac{1}{\tau_D}(v_{n+1} - v_n) \implies \boxed{v_n + \tau_D \frac{dv_n}{dt} + \tau\tau_D \frac{d^2v_n}{dt^2} = v_{n+1}}$$

III.A.4.a) En injectant les formes proposées, on trouve :

$$\underline{H} = \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_D - \omega^2\tau\tau_D}$$

On peut faire apparaître la forme canonique en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{\tau\tau_D}$, $\tau_D = \frac{1}{\omega_0 Q_0}$ soit $Q_0 = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_D}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. La fonction de transfert se met alors sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q_0}}$$

Il s'agit d'un passe bas d'ordre 2.

III.A.4.b)

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2}}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})} = -\frac{\frac{x}{Q_0}}{1 - x^2} \implies \varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{x}{Q_0}}{1 - x^2}\right)$$

III.A.4.c)

$$|\underline{H}| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\underline{H}|^2} = 1 \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2} = 1 \Leftrightarrow (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_0^2} = 1 \quad \text{avec } X = x^2$$

On aboutit finalement à l'équation $X(X - 2 + \frac{1}{Q_0^2}) = 0$ ce qui donne la solution $X_1 = 2 - \frac{1}{Q_0^2} = x_1^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$.

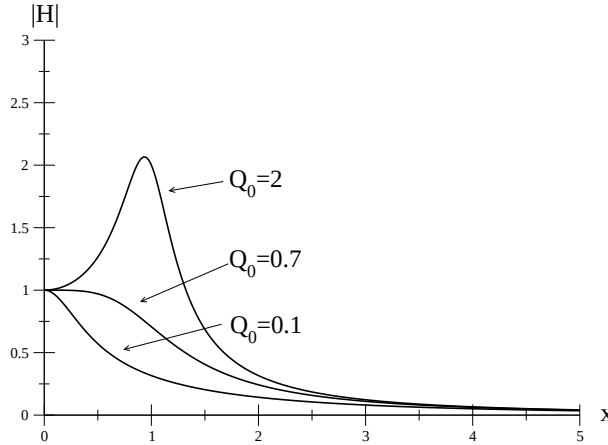
On a donc $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 - \frac{1}{Q_0^2}}$

III.A.4.d) Chercher $|\underline{H}|$ maximum revient à chercher $\frac{1}{|\underline{H}|}$ minimum soit encore $\frac{1}{|\underline{H}|^2}$ minimum. On va donc chercher (en posant toujours $X = x^2$) le minimum de $\frac{1}{|\underline{H}|^2}$ soit :

$$\frac{1}{|\underline{H}|^2} = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_0^2} \quad \text{mini} \Leftrightarrow \frac{d(1 - X)^2 + \frac{X}{Q_0^2}}{dX} = 0 \Leftrightarrow -2(1 - X) + \frac{1}{Q_0^2} = 0 \Leftrightarrow X_{max} = \frac{1}{2}X_1$$

Soit finalement $\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1$

III.A.4.f) Allure classique du passe bas d'ordre 2. La valeur limite est $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ au delà il y a résonance (passage par un maximum) *i.e.* que ω_{max} n'est défini que pour $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$.



III.B.1) Les approximations reviennent à raisonner à l'ordre 2 en x . On trouve alors :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1+x^2(\frac{1}{Q_0^2}-2)}} \simeq 1 - x^2(\frac{1}{2Q_0^2} - 1) = 1 + \omega^2(\tau\tau_D - \frac{\tau_d^2}{2})$$

On trouve le bon résultat. De même, pour l'argument de $\underline{H}$, on a :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{x}{Q_0}}{1-x^2}\right) \simeq -\arctan\left(\frac{x}{Q_0}\right) \simeq -\frac{x}{Q_0}$$

III.B.2.a) $v_n(t) = \frac{d\xi_n}{dt} = j\omega\xi_n(t)$. On a alors :

$$\underline{H} = \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \exp jkL_0 = \exp(-k''L_0) \exp(jk'L_0)$$

III.B.2.b) En identifiant, on a :

$$|\underline{H}| = \exp -k''L_0 \Rightarrow k'' = -\frac{1}{L_0} \ln |\underline{H}| \quad \text{et} \quad \varphi = k'L_0$$

On a donc finalement la relation de dispersion :

$$k = k' + jk'' = \frac{1}{L_0} (\varphi - \ln |\underline{H}(\omega)|)$$

En utilisant les développements limités, on a donc :

$$k' = \varphi \simeq -\frac{x}{Q_0L_0} = -\frac{\omega\tau_D}{L_0}$$

$$k'' = -\frac{1}{L_0} \ln |\underline{H}| \simeq -\frac{1}{L_0} \ln \left[1 - x^2 \left(\frac{1}{2Q_0^2} - 1 \right) \right] \simeq \frac{x^2}{L_0} \left(\frac{1}{2Q_0^2} - 1 \right) = \frac{\omega^2}{L_0} \left(\frac{\tau_D^2}{2} - \tau\tau_D \right)$$

III.B.2.c) Seule la partie réelle de k correspond à la propagation de l'onde et on peut écrire la vitesse de phase comme :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = -\frac{L_0}{\tau_D}$$

On retrouve très exactement la célérité de l'onde pour le modèle A (dans le cas congestionné) $c_A = -\frac{L_0}{\tau_D}$.

La longueur d'onde s'écrit : $\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi L_0}{\omega\tau_D}$. Or par hypothèse $\omega\tau_D \ll 1$ ce qui conduit à $\lambda \gg L_0$. On regarde donc des phénomènes grands devant la longueur d'une voiture *i.e.* qu'on se retrouve à nouveau dans l'approximation des milieux continus.

III.C.1.a) On va séparer les deux pulsations présentes dans v_{n+1} à savoir $\omega = 0$ et ω . La composante à $\omega = 0$ est V_c celle à ω s'écrit en notation complexe $\underline{v}_{n+1} = V_0 \exp j\omega t$. On sait que pour une pulsation ω , on a $\underline{v}_n = \underline{H} \underline{v}_{n+1}$ soit finalement :

$$\underline{v}_n = |\underline{H}| \exp j\varphi V_0 \exp j\omega t = |\underline{H}| V_0 \exp j(\omega t + \varphi) \implies v_n(t) = |\underline{H}(\omega)| V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

On peut appliquer ce résultat général au cas particulier $\omega = 0$ pour trouver la réponse à V_c et pour finalement écrire :

$$v_n(t) = \underbrace{V_c}_{\text{réponse à } \omega = 0} + \underbrace{|\underline{H}(\omega)| V_0 \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{réponse à } \omega \neq 0}$$

III.C.1.b) Pour $\omega = 0$, $|\underline{H}(0)| = 1$. Cela signifie qu'à fréquence nulle *i.e.* pour des variations très lentes de vitesse (constant pour $\omega = 0$) la voiture n suit parfaitement la voiture $n + 1$ ce qui n'a rien de surprenant puisque l'automobiliste a tout le temps de réagir.

Au contraire, pour ω très grand, *i.e.* pour des variations de vitesse très rapides $|\underline{H}| = 0$ ce qui traduit le fait que l'automobiliste dans la voiture n n'a absolument pas le temps de suivre la voiture $n + 1$ dont la vitesse varie vraiment trop rapidement.

III.C.1.c) Il y a amplification des oscillations pour les pulsations telles l'amplitude croît *i.e.* que $|\underline{H}| > 1$. Les deux conditions à vérifier sont donc :

- $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\tau > \tau_D$ pour assurer l'existence d'une gamme de fréquence où $|\underline{H}| > 1$.
- il faut alors que ω soit dans cette gamme de fréquence *i.e.* $0 < \omega < \omega_1$ (voir graphe de $|\underline{H}|$). Soit finalement une condition qui s'écrit :

$$\omega < \omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 - \frac{1}{Q_0^2}} = \sqrt{\frac{2}{\tau\tau_D} - \frac{1}{\tau^2}}$$

III.C.1.d) Si τ est grand, cela signifie que l'automobiliste met très longtemps à réagir ... Si on considère un flux uniforme de voitures, si une voiture freine alors le manque de réaction du conducteur à l'arrière va faire que la concentration va très vite augmenter obligeant alors les voitures à ralentir pour ne pas avoir d'accident ... Plus mathématiquement, si τ est très grand alors Q_0 devient très grand et il existe des pulsations qui peuvent vérifier la condition d'amplification ... La moindre perturbation du trafic contenant une pulsation amplifiée va alors "exploser" rendant le flux non uniforme.

III.C.1.e) D'après l'énoncé, on sait que c'est l'amplification la plus importante qui va apparaître soit finalement la pulsation ω_{max} . On en déduit alors la période des oscillations

$$T_{acc} = \frac{2\pi}{\omega_{max}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{\tau\tau_D} - \frac{1}{2\tau^2}}}$$

III.C.2.a) On a bien $2\tau > \tau_D$ donc amplification et donc apparition d'oscillations en accordéon.

III.C.2.b) AN $\omega_{max} = 0,57 \text{ rad.s}^{-1}$, $T_{acc} = 11 \text{ s}$. La pratique est bien en dessous des prévisions théoriques ...

III.D.1.a) $K \sum q^i = 1 \implies K = 1 - q$.

III.D.1.b) La cas précédent correspond à $q = 0$ puisqu'on alors $v_n^{ref} = \frac{D_n}{\tau_D}$.

III.D.1.c) Les N voitures représentent 90 % de l'anticipation soit :

$$K \sum_0^{N-1} q^i = 0,9 = 1 - q^N \implies \boxed{q = 10^{-\frac{1}{N}}}$$

III.D.2.a)

$$\frac{dv_n^{ref}}{dt} = \frac{K}{\tau_D} \sum_0^{+\infty} q^i \frac{dD_{n+i}}{dt} = \frac{K}{\tau_D} \sum_0^{+\infty} q^i (v_{n+1+i} - v_{n+i}) = \frac{K}{\tau_D} \sum_0^{+\infty} q^i v_{n+1+i} - \frac{K}{\tau_D} \sum_0^{+\infty} q^i v_{n+i}$$

Soit après un changement d'indice :

$$\frac{dv_n^{ref}}{dt} = \frac{K}{\tau_D} \sum_1^{+\infty} q^{i-1} v_{n+i} - \frac{K}{\tau_D} \sum_0^{+\infty} q^i v_{n+i} = \frac{1-q}{\tau_D} v_n + \frac{(1-q)^2}{\tau_D} \sum_1^{+\infty} q^{i-1} v_{n+i}$$

III.D.2.b) On sait que $v_{n+1} = \frac{1}{\underline{H}_q} v_n$ et plus généralement par récurrence $v_{n+i} = \frac{1}{\underline{H}_q^i} v_n$. On peut alors en déduire par sommation (à condition que $\frac{q}{|\underline{H}|} < 1$) :

$$\frac{dv_n^{ref}}{dt} = -\frac{1-q}{\tau_D} v_n + \frac{(1-q)^2}{\tau_D} \sum_1^{+\infty} q^{i-1} v_{n+i} = \frac{q-1}{\tau_D} v_n + \frac{v_n(1-q)^2}{q\tau_D} \sum_1^{+\infty} \frac{q^i}{\underline{H}_q^i} = \frac{v_n}{\tau_D} \left((q-1) + \frac{(1-q)^2}{q} \frac{\frac{q}{\underline{H}_q}}{1 - \frac{q}{\underline{H}_q}} \right)$$

On peut maintenant utiliser l'équation III-A.2.c avec :

$$v_n + \tau \frac{dv_n}{dt} = v_n^{ref} \Rightarrow \frac{dv_n}{dt} + \tau \frac{d^2 v_n}{dt^2} = \frac{dv_n^{ref}}{dt} \Rightarrow v_n(j\omega - \omega^2 \tau) = \frac{v_n}{\tau_D} \left((q-1) + (1-q)^2 \frac{1}{\underline{H}_q - q} \right)$$

D'où finalement :

$$1 - q + j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D = (1-q)^2 \frac{1}{\underline{H}_q - q} \Rightarrow \underline{H}_q - q = \frac{(1-q)^2}{1 - q + j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_q = \frac{(1-q)^2 + q(1 - q + j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D)}{1 - q + j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D} \Rightarrow \underline{H}_q = \frac{1 - q + q(j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D)}{1 - q + j\omega\tau_d - \omega^2\tau\tau_D}$$

III.D.3.a) C'est le maximum de la fonction de transfert qui caractérise l'amplification éventuelle et la fréquence de ce maximum qui donne la période des oscillations en accordéon. On peut alors faire le constat suivant :

- plus q est important moins le maximum est marqué ... en particulier pour $q = 0,8$ on ne passe plus par un maximum et on a toujours $|\underline{H}| < 1$, ce qui signifie qu'aucune fréquence n'est amplifiée et qu'il n'apparaît pas d'oscillations en accordéon.
- en dessous de cette valeur, plus q est grand plus ω_{max} est faible ce qui veut dire que plus q est grand plus la période d'oscillation en accordéon T_{acc} est grande.

III.D.3.b) De toute façon, ce sont les valeurs de $\underline{H}$ telles que $|\underline{H}| > 1$ qui nous intéressent ... Comme $q < 1$ quoi qu'il arrive, la partie qui nous intéresse est toujours bonne (on a bien $|\underline{H}| > 1 > q$).

III.D.4.a) Pour qu'il n'y ait pas d'accordéon, il ne faut pas que ω'_1 ne soit pas défini car sinon il y a des valeurs de ω telles que $|\underline{H}| > 1$. La condition de non existence de ω'_1 est donc :

$$2 \frac{\tau}{\tau_D} \frac{1-q}{1+q} - 1 < 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{2 \frac{\tau}{\tau_D} \frac{1-q}{1+q} < 1}$$

III.D.4.b) On suppose qu'on a toujours à peu près $\omega'_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega'_1$ et la période des oscillations est celle qui correspond au maximum de $|\underline{H}|$ soit :

$$T'_{acc} = \frac{2\pi}{\omega'_{max}} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_D} \frac{1-q}{1+q} - \frac{1}{2}}}$$

III.D.4.c) AN $q = 10^{-\frac{1}{N}} = 0,72$.

Dans le cas où $\tau_D = 0,9$ s, on a $2 \frac{\tau}{\tau_D} \frac{1-q}{1+q} = 1,05 > 1$, ω'_1 (et donc ω'_{max}) existe ce qui veut dire qu'il y a des oscillations en accordéon. On a alors $\omega'_1 = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega'_{max} = \frac{\omega'_1}{\sqrt{2}} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$ soit finalement $T'_{acc} = 116 \text{ s} \simeq 2 \text{ min}$.

Pour $\tau_D = 1,8$ s, on a $2 \frac{\tau}{\tau_D} \frac{1-q}{1+q} = 0,52 \text{ s} < 1$, il n'y a donc pas d'oscillations en accordéon. Si les automobilistes étaient intelligents, on aurait donc moins de problèmes...