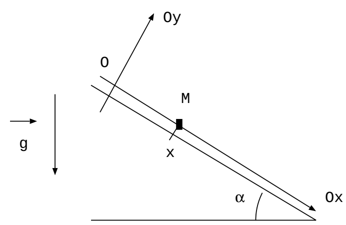
Révisions cours de mécanique du point matériel

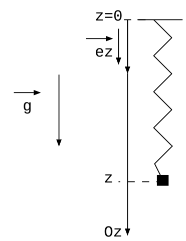
I. Cinématique

Coordonnées cartésiennes: Soit un point matériel repéré par ses coordonnés cartésiennes (x, y, z).
Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$

Vecteur vitesse: $\overrightarrow{v}(M) =$ ....

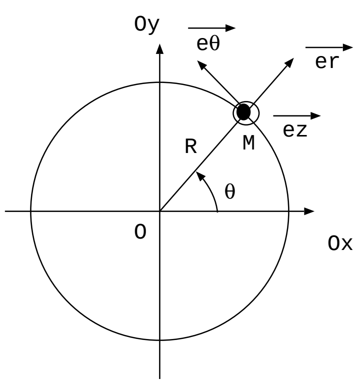
Vecteur accélération: $\overrightarrow{a}(M) =$ ....





.

Coordonnées polaires: Soit un point matériel M qui décrit un cercle de centre O et rayon R. On note θ l'angle que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à Ox. On note la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.



Vecteur vitesse: $\overrightarrow{v}(M) =$ ....

Vecteur accélération: $\overrightarrow{a}(M) =$ ....

Moment cinétique: $\overrightarrow{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \Lambda m \overrightarrow{v}(M)$

$\overrightarrow{L}_O(M) =$ ....

$\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} =$ .... et $\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} =$ ....

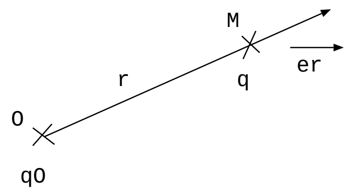
Vecteur position: $\overrightarrow{OM} =$ ....

Très important: pour la RFD pour un mouvement circulaire: on a $\overrightarrow{a}(M) = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$ avec $v = R\dot{\theta}$.

II. **Les forces**

Force d'interaction électrostatique entre deux charges:

La charge q_O placée en O exerce sur la charge q placée en M la force: $\overrightarrow{F_e} = ...$



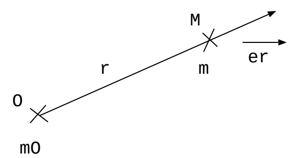
Cette force est attractive dans le cas où ....

Cette force est répulsive dans le cas où ....

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pe} = ...$

Force d'interaction gravitationnelle entre deux masses:

La masse m_O placée en O exerce sur la masse m placée en M la force: $\overrightarrow{F_g} = ...$



Cette force est attractive.

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pg} = ...$

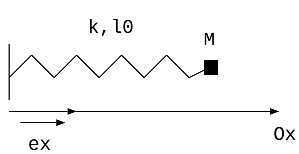
Le poids:

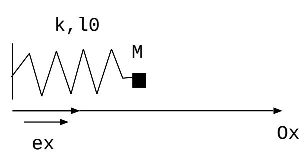
C'est la force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et un objet. Pour des objets de masse m situées sur Terre à faible altitude, cette force s'écrit $\overrightarrow{P} = ...$

Cette force est conservative, son énergie potentielle augmente quand l'altitude ....

Cette force est conservative, son énergie potentielle est $E_{pp} = +mgz$ quand Oz est vertical .... et elle s'écrit $E_{pp} = -mgz$ quand Oz est vertical ....

Force de rappel élastique: soit un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On note l la longueur du ressort à un instant quelconque.

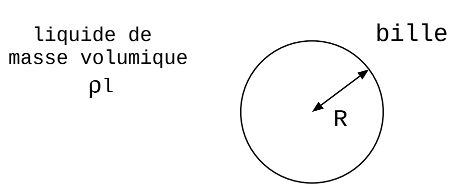




La masse m subit la force de rappel élastique de la part du $\overrightarrow{F_r} = ...$

Cette force est conservative, l'énergie potentielle s'écrit $E_{pr} = ...$

La poussée d'Archimède:



♡ C'est la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un objet. Cette force est verticale ascendante égale au poids du volume de fluide déplacé par l'objet.

$||\overrightarrow{\Pi}|| = ...$

La réaction du support:

Elle s'écrit $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$

- $\overrightarrow{N}$ est la composante normale qui ne s'annule que lorsque ....

- $\overrightarrow{T}$ est la composante tangentielle qui est opposée au mouvement et qui est nulle lorsque ....

♡ En présence de frottements, on note f le coefficient de frottement entre l'objet et le support. Les lois de Coulomb s'écrivent:

- en présence de glissement on a $||\overrightarrow{T}|| = f||\overrightarrow{N}||$

- en absence de glissement on a $||\overrightarrow{T}|| \leq f||\overrightarrow{N}||$

III. **Les lois de Newton**

Première loi de Newton:

......

......

Deuxième loi de Newton aussi appelée relation fondamentale de la dynamique:

RFD (ou PFD): dans un référentiel .... on a ....

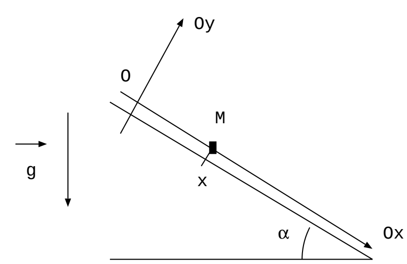
Troisième loi de Newton aussi appelée principe des actions réciproques

Soit deux points matériels en interaction mutuelle on a $\overrightarrow{F}_{A \to B} =$ ....

IV. **Applications de la RFD**

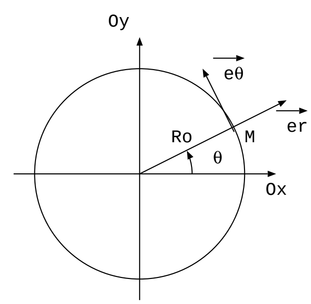
Pour tous ces exemples, on donne l'accélération du champ de pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

Exemple 1: soit un point matériel M de masse m sur un plan incliné qui fait un angle α par rapport à l'horizontale. Soit f le coefficient de frottement entre le point matériel et le plan incliné. Déterminer la condition sur α pour que le point matériel soit en équilibre sur le plan incliné. Lorsque cette condition n'est pas réalisée, le point matériel se met à glisser, il part de O sans vitesse initiale. Etablir l'expression de $x(t)$ en fonction de g, α, f et t.

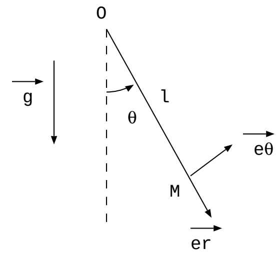


.

Exemple 2: un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon R_o autour de la Terre. On note M_T la masse de la Terre. Déduire de la RFD appliquée au satellite l'expression de la vitesse v_o du satellite sur son orbite ainsi que la période T_O de son mouvement. Exprimer l'énergie mécanique du satellite.

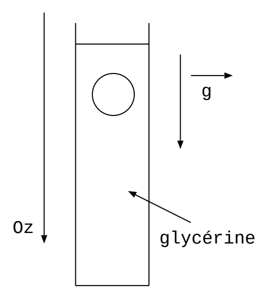


Exemple 3: soit un pendule simple de longueur l et de masse m. On tient compte des frottements de l'air $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)$ où h est une constante positive. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ en projetant la RFD sur une direction adéquate.



.

Exemple 4: une bille d'acier sphérique de rayon $R = 3,0\ mm$ est lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie de glycérine. On note Oz la verticale descendante. La bille subit la force de frottements fluide $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}(M)$ où η est la viscosité de la glycérine et $\overrightarrow{v}(M)$ la vitesse de la bille. Données: masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7600\ kg.m^{-3}$, masse volumique de la glycérine : $\rho_g = 1260\ kg.m^{-3}$



Montrer par un calcul numérique que l'on peut négliger la poussée d'Archimède devant la force poids. On écrit le vecteur vitesse sous la forme $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{e_z}$. Déduire de la RFD appliquée à la bille, l' équation différentielle vérifiée par $v(t)$. Préciser la constante de temps du régime transitoire et calculer la viscosité de la glycérine sachant que la vitesse limite atteinte par la bille est $v_l = 11,4\ cm.s^{-1}$.

V. **Energétique**

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel par:

On définit l'énergie mécanique d'un point matériel par:

où il y a autant de termes dans l'énergie potentielle que ce qu'il y a de forces conservatives qui s'exercent sur M.

Système conservatif:

Un système est dit conservatif lorsqu'il ne subit que des forces .... et des forces qui ....

L'énergie mécanique d'un système conservatif est ....

Vous devez savoir que:

- le poids est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_{pp} = +mgz$ si Oz est vertical ascendant et $E_{pp} = -mgz$ si Oz est vertical descendant

- la force de rappel élastique est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_{pr} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec l longueur du ressort et l_0 longueur à vide du ressort donnée par l'énoncé

Vous devez savoir que les forces perpendiculaires au mouvement ne travaillent pas, c'est le cas de la tension du fil dans le pendule et de la réaction normale au support.

Théorème de la puissance mécanique:

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives qui s'exercent sur le système soit $\frac{dE_m}{dt} = P_{fnc}$.

La puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ exercée sur M s'écrit:

Dans les forces non conservatives, vous trouverez:

- des forces qui sont perpendiculaires au mouvement (comme la tension du fil dans le pendule et la réaction normale au support), et dont la puissance est ....

- toutes les forces de frottements dont la puissance est

A savoir faire:

$\frac{d}{dt}(\frac{m\dot{z}^2}{2}) = ...$

$\frac{d}{dt}(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}) = ...$

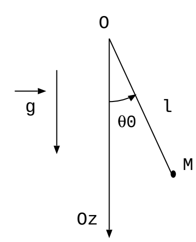
$\frac{d}{dt}(mgz) = ...$

$\frac{d}{dt}(\frac{k}{2}(x - l_0)^2) = ...$

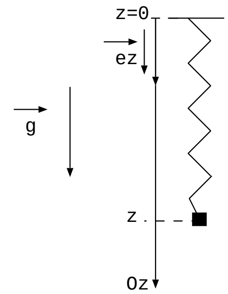
VI. **Applications des théorèmes énergétiques**

Exemple 1: soit un point matériel de masse m qu'on lance depuis le sol avec une vitesse $\vec{v_0}$ verticale ascendante. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif et exprimer la hauteur maximale atteinte par le point matériel lorsqu'on néglige tout frottement et qu'on suppose que le champ de pesanteur est constant.

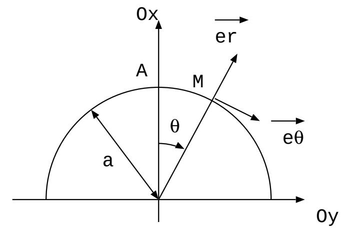
Exemple 2: soit un pendule simple de masse m et de longueur l. On néglige tout frottement. On écarte le pendule d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et on l'abandonne sans vitesse initiale. Montrer que le pendule est un système conservatif, exprimer la vitesse du pendule lorsqu'il arrive à la verticale.



Exemple 3: soit un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de M par sa côte z (Oz verticale descendante). Etablir l'expression de l'énergie mécanique du point matériel et déduire du théorème de la puissance cinétique l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque on néglige tout frottement. La résoudre pour déterminer $z(t)$ lorsque le point matériel est abandonné sans vitesse initiale lorsque la longueur ressort est égale à sa longueur à vide. Indice: oscillateur harmonique.



Exemple 4: soit un point matériel M de masse m qui se déplace sur une demi-sphère de centre O et de rayon a. On néglige tout frottement. M est abandonné sans vitesse initiale depuis le haut de la sphère en A. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif, exprimer sa vitesse lorsqu'il est à la position repérée par θ. Déduire de la RFD la réaction du support lorsque le point matériel se trouve en θ. Indice : utiliser $\overrightarrow{a}(M) = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$



VII. **Théorème du moment cinétique**

Le théorème du moment cinétique se démontre à partir de la RFD (nous ne ferons pas la démonstration). Ce théorème est donc équivalent du point de vue physique à la RFD. Il est important de retenir que le théorème du moment cinétique est particulièrement adapté pour trouver l'équation du mouvement d'un point matériel dans le cas où ce point décrit un mouvement circulaire.

Enoncé du théorème du moment cinétique:

Ce théorème fait intervenir deux grandeurs physiques:

• Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un point O :

Sa définition :

Son expression en coordonnées polaires :

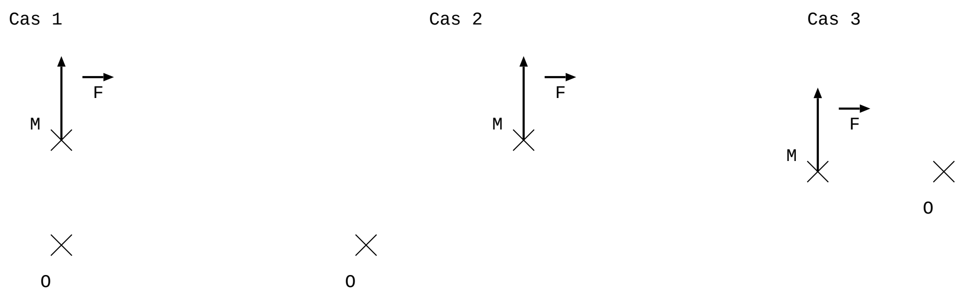
• Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à M par rapport à un point O :

Sa définition :

On déduit le sens et la direction du vecteur moment d'une force en utilisant les doigts de la main droite pour calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \Lambda \overrightarrow{F}$:

Rappel au sujet du vecteur rotation:

Son sens physique :



Son expression : Pour calculer le moment d'une force, on a deux possibilités:

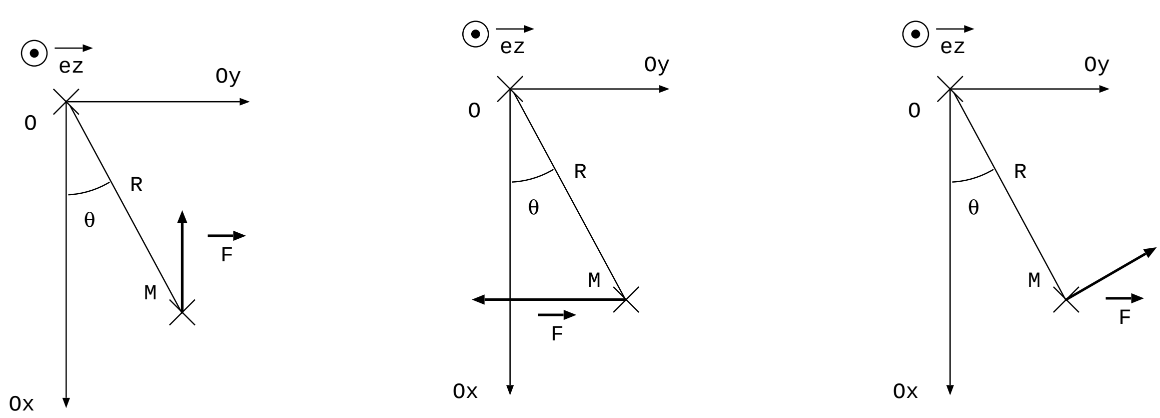
- La première consiste à remplacer les vecteurs par leurs expressions dans l'expression du moment et de calculer le produit vectoriel. Cette méthode est particulièrement adaptée aux forces qui dépendent de la vitesse comme la force de frottements fluide.

Exemple: exprimer le moment de la force de frottement fluide de la forme $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ exercée sur un pendule

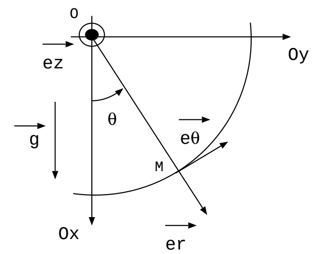
- La deuxième utilise le bras de levier : on cherche la norme du moment de la force puis le sens et la direction de ce moment.

Pour trouver la norme du moment: on trace la droite passant par M et de direction la force $\overrightarrow{F}$. On calcule d la distance minimale entre cette droite et le point O par rapport auquel on calcule le moment. La norme du moment est égale au produit $||\overrightarrow{F}||.d$.

Pour trouver le sens et la direction du moment: la force $\overrightarrow{F}$ fait tourner M autour de O. On utilise la règle de la main droite, on suit le sens de rotation de M (main droite du poignet vers le bout des doigts), le pouce donne le sens et la direction du moment.



Application : Un petit objet assimilé à un point matériel M, de masse m, peut glisser le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R, placé dans le plan vertical. On repère la position du point M par l'angle θ, on travaille dans la base polaire: $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.



Etablir, par application du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par θ en présence de frottement fluide de la forme $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}(M)$. On néglige les frottements solide.