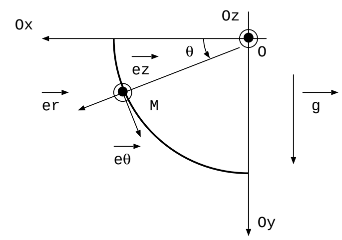
TD révisions de mécanique : moment cinétique

I. Enfant sur un toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel M glisse sans frottement sur un toboggan circulaire de rayon R et de centre O. L'enfant est repéré par ses coordonnées polaires. Un de ses parents le retient par son vêtement pour l'empêcher de glisser trop vite, ce qui revient à exercer sur l'enfant une force constante de la forme $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e_x}$ avec $F > 0$. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Exprimer le moment cinétique de l'enfant par rapport à O.

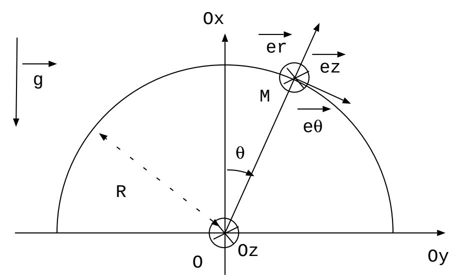
2. Exprimer les moments des forces exercées sur l'enfant et calculés par rapport à O.

3. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à l'enfant l'équation différentielle vérifiée par θ.

Réponse: $\ddot{\theta} + \dfrac{F}{mR}\sin\theta - \dfrac{g}{R}\cos\theta = 0$

II. Objet sur une demi-sphère

Un objet de masse m assimilé à un point matériel M glisse sur une demi-sphère de centre O et de rayon R. Cet objet subit une force de frottement solide $\overrightarrow{T}$ de norme T constante. On repère sa position par ses coordonnées polaires. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O.

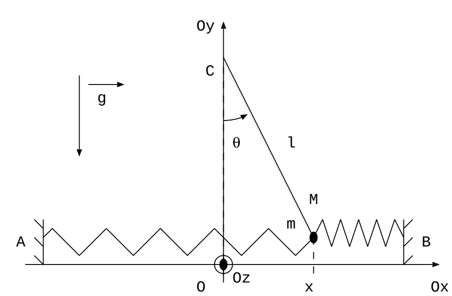
2. Exprimer les moments des forces exercées sur M et calculés par rapport à O.

3. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M l'équation différentielle vérifiée par θ.

Réponse: $\ddot{\theta} - \dfrac{g}{R}\sin\theta = -\dfrac{T}{mR}$

III. Pendule et ressorts

On considère un pendule de longueur l et de masse m en M suspendu en C. Ce point M est relié à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre, le pendule est vertical, soit M se trouve en O. On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre, les mouvements sont de faible amplitude donc on suppose que M se déplace sur l'axe Ox. On note x l'abscisse de M. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre galiléen.



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}}$ et les forces élastiques exercées sur M en fonction des données et des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. Rappel : l'angle θ est petit donc $\cos\theta \approx 1$.

2. En déduire le moment cinétique de M et les moments des forces élastiques exercées sur M calculés par rapport à C.

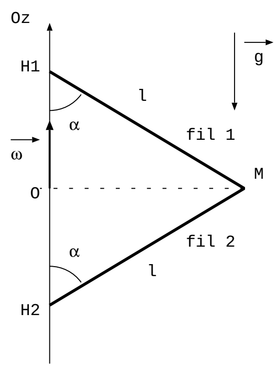
3. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M par rapport à C, l'équation différentielle vérifiée par x et en déduire la période des petites oscillations M.

Réponse: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}}$

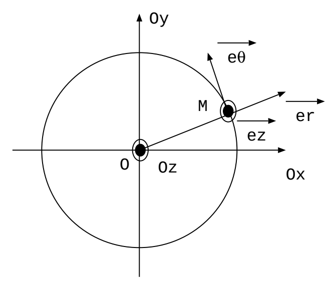
TD révisions de mécanique : RFD

IV. **Pendule conique**

Un point matériel M de masse m est accroché à deux fils inextensibles de longueur l, fixés en H_1 et H_2 à l'axe Oz. L'axe tourne à une vitesse angulaire constante ω. La vitesse angulaire est suffisamment grande pour que les fils soient tendus, le point M décrit alors un cercle de centre O dans le plan Oxy.



Vue de coté



Vue de dessus

1. M est repéré par ses coordonnées polaires. Ajouter sur le schéma de gauche les vecteurs de base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de M en fonction de l, ω, α et des vecteurs de base précédents.

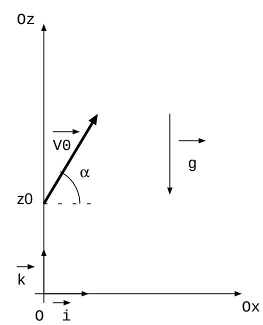
2. On suppose le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire galiléen. Déduire de la RFD l'expression des tensions des fils, en déduire la condition sur ω pour que les fils soient tendus.

Réponses: 1- $\overrightarrow{a}(M) = -l\sin\alpha\omega^2\overrightarrow{e_r}$ *2-* $T_2 = \dfrac{1}{2}(ml\omega^2 - \dfrac{mg}{\cos\alpha})$

V. **Lob au tennis...**

Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court. Le joueur 1 situé à $d_1 = 2\ m$ du filet, tape la balle à une hauteur $z_0 = 0,3\ m$ et lui communique une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans le plan vertical Oxz de valeur $v_0 = 36\ km/h$ et faisant un angle $\alpha = 60^0$ par rapport à l'horizontale.

On néglige les frottements.



Données numériques : champ de pesanteur terrestre : $g = 9,8\ m/s^2$, hauteur du filet $h_f = 1\ m$ et distance entre la ligne de fond de court et le filet $D = 12\ m$

1. Déterminer par application de la RFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les équations horaires du mouvement de la balle soit $x(t)$ et $z(t)$ en fonction de g, t, V_0, z_0 et α.

2. Montrer que l'équation de la trajectoire est donc: $z = -\dfrac{g}{2v_0^2(\cos\alpha)^2}x^2 + x\tan\alpha + z_0$

3. La balle passe-t-elle au dessus du filet de hauteur h_f?

4. Le joueur 2 est de l'autre coté du filet à une distance $d_2 = 4\ m$ derrière le filet. Le tamis de sa raquette se trouve à une hauteur maximale $h = 2,3\ m$ par rapport au sol. Peut-il intercepter la balle? Le lob est-il réussi?

Réponses: 3- la balle passe par dessus le filet 4- lob réussi

VI. **Vitesse limite**

Une bille de masse m assimilée à un point matériel M est laché sans vitesse initiale depuis la hauteur h. On modélise les frottements exercés par l'air par la force $\overrightarrow{F} = -m.b.\overrightarrow{v}$ où b est une constante positive et $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_z}$. On note Oz la verticale ascendante.

Données : $g = 10\ m/s^2$, $v_0 = 10\ m/s$, $m = 500\ g$ et $b = 0,8\ SI$.

1. Préciser l'unité de b.

2. Décrire, en vous appuyant sur les forces exercées sur la bille, les deux phases du mouvement de la bille.

3. Exprimer la vitesse limite, notée v_{lim}, atteinte par la bille.

4. Déterminer l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $v(t)$. En déduire $v(t)$ et $z(t)$.

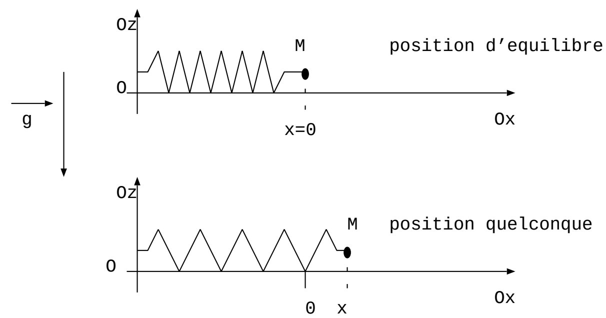
5. Déterminer littéralement et numériquement, l'instant t_1 à partir du quel la vitesse de la bille est égale à la vitesse limite à 1 % près.

Réponses: 3- $v_{lim} = -\dfrac{g}{b}$ *4-* $v(t) = -\dfrac{g}{b}(1 - e^{-bt})$ *5-* $t_1 = \dfrac{\ln 100}{b}$

VII. **Frottements solide**

Un objet de masse m et assimilé à un point matériel M peut glisser le long d'un rail horizontal fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen. M est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixe en O dans R. Un dispositif expérimental permet de relever la position de M au cours du temps.

On note x la position de M par rapport à sa position d'équilibre, soit $x = 0$ à l'équilibre.



M subit une force de réaction du rail comprenant une composante tangentielle $\overrightarrow{R}_T$ et une composante normale $\overrightarrow{R}_N$, telles que:

- A l'équilibre $T < fN$

- En mouvement $T = fN$

où f est une constante positive, appelée coefficient de frottement.

1. On place M à l'abscisse x_0 positive sans vitesse initiale. On constate que M reste immobile à cette position lorsque x_0 est inférieure à une valeur limite x_c. On constate que M se met à osciller si x_0 est supérieure à x_c.

Faire un schéma du dispositif en portant les forces exercées sur M lorsque M reste immobile. Déduire de la RFD l'expression de x_c.

Que devient la condition d'équilibre pour $x_0 < 0$?

On place M à l'abscisse x_0 positive et supérieure à $x_c = \dfrac{fg}{\omega_0^2}$ sans vitesse initiale. M effectue plusieurs oscillations avant de s'arrêter.

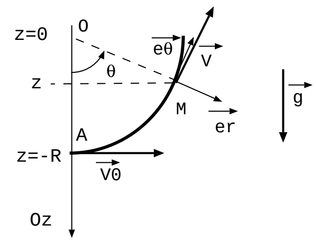
2. On se place dans le cas où M se déplace selon $-Ox$. Montrer, en appliquant la RFD, que x vérifie l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = C$. Exprimer ω_0 et C en fonction de k, m, g et f.

Que devient cette équation lorsque M se déplace selon Ox?

Réponses: 1- $x_c = \dfrac{fmg}{k}$ *2-* $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = fg$ *lorsque* M *se déplace selon* $-Ox$ *et* $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = -fg$ *lorsque* M *se déplace selon* $+Ox$

TD révisions de mécanique : énergie

VIII. **Point matériel dans un rail**



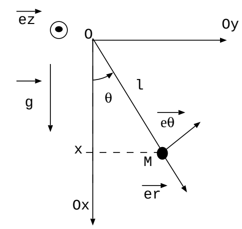
Soit un point matériel de masse m qui glisse sans frottement à l'intérieur d'un rail circulaire de rayon R. Le point matériel est lancé depuis A, le point le plus bas avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On repère la position du point M par l'angle θ indiqué sur le schéma.

1. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif. Exprimer son énergie mécanique lorsqu'il est tout en bas en A et son énergie mécanique lorsqu'il est en M en θ quelconque. En déduire que sa vitesse s'écrit $v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$.

2. Appliquer la RFD au point M lorsqu'il se trouve en θ et en déduire l'expression de la réaction du support exercée sur M en fonction de θ.

Réponse: $||\overrightarrow{R_N}|| = 3mg\cos\theta - 2mg + \dfrac{mv_0^2}{R}$

IX. **Oscillations amorties**



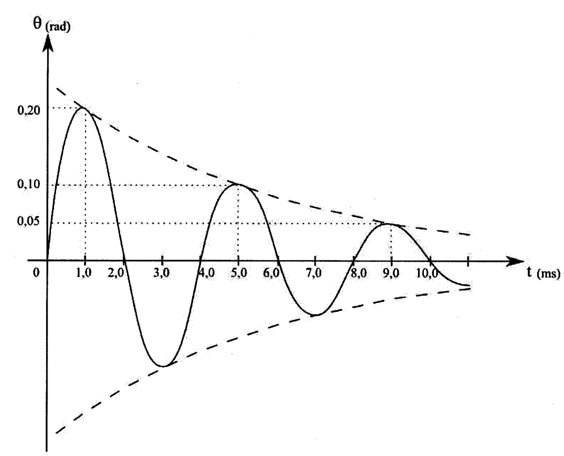
Un pendule assimilé à un point matériel M, de masse m est suspendu par un fil de longueur l accroché en O. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est supposé galiléen. On repère la position du point M par l'angle θ, on travaille dans la base polaire : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. A l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point depuis le point le plus bas en $\theta = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

On suppose que M subit la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où h est une constante positive et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de M.

1. Etablir l'expression de l'énergie mécanique de M en fonction de θ, $\dot\theta$ et des données.

2. Déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par θ et la simplifier pour les petits angles.

3. On donne la courbe $\theta(t)$. Préciser le nom du régime observé et en déduire que $h < 2m\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Montrer que $\theta(t)$ s'écrit $\theta(t) = Aexp(\dfrac{-t}{\tau})\sin(\Omega t)$. Exprimer A, τ et Ω en fonction des données. Que représentent τ et Ω?



4. On définit le décrément logarithmique par $\delta = \ln(\dfrac{\theta(t)}{\theta(t+T)})$ où T est la pseudo période. En utilisant l'expression de $\theta(t)$ déterminée précédemment, montrer que $\delta = \dfrac{T}{\tau}$. Calculer δ et T à partir de la courbe et en déduire τ.

Réponses: 1- $E_m = \dfrac{ml^2\dot\theta^2}{2} - mgl\cos\theta$ *2-* $\ddot\theta + \dfrac{h}{m}\dot\theta + \dfrac{g}{l}\theta = 0$ *3-* $\Delta < 0$, $\tau = \dfrac{2m}{h}$, $A = \dfrac{v_0}{l\Omega}$ *et* $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}(1 - \dfrac{h^2}{4m^2})}$

X. **Champ de gravitation non uniforme**

Dans ce problème on tient compte de la variation du champ de pesanteur en fonction de l'altitude z d'un point matériel. On néglige la résistance de l'air. Soit un projectile M de masse m.

Données : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ $S.I.$, $M_T = 6.10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km.

1. Exprimer la force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et le projectile en fonction de z, m, $\mathcal{G}$ (constante de gravitation universelle), M_T (masse de la Terre) et R_T (rayon de la Terre). Cette force porte aussi un autre nom, lequel? En déduire l'énergie potentielle liée à cette force en fonction de z, m, $\mathcal{G}$, M_T et R_T (pour la constante d'intégration on écrira que l'énergie potentielle est nulle lorsque le projectile est à l'infini).

2. Le projectile est lancé verticalement depuis la surface de la terre avec une vitesse initiale V_0. Montrer que le système est conservatif et calculer l'altitude maximale h_1 atteinte par le projectile. A.N.: $v_0 = 100$ m/s et $v_0 = 1000$ m/s.

Réponses: $h = \dfrac{R_T}{1 - \frac{v_0^2 R_T}{2\mathcal{G} M_T}} - R_T$, *AN: pour* $v_0 = 100$ m/s*:* $h = 0,51$ km *et pour* $v_0 = 1000$ m/s*:* $h = 51$ km.

XI. **Ralentissement d'un navire**

La force de frottement exercée par l'eau sur un navire peut se mettre sous la forme $\vec{f} = -kv^2\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du navire dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

1. Lorsque le moteur du navire développe une force propulsive de puissance $\mathcal{P} = 4$ MW, la vitesse limite du navire est $v_{lim} = 16$ km/h. En déduire la valeur numérique de k et préciser son unité.

Le moteur est coupé à l'instant $t = 0$ alors que le navire de masse $m = 1200$ t se déplace de manière rectiligne à la vitesse $v_0 = 16$ km/h.

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse numérique v est: $\dfrac{-dv}{v^3} = \dfrac{kdt}{m}$. En déduire la durée t_0 nécessaire pour que la vitesse du navire soit diminuée de moitié.

Réponses: 1- $k = \dfrac{\mathcal{P}}{v_{lim}^4}$ *2-* $t_0 = \dfrac{3m}{2kv_0^2}$