Interrogation de rentrée septembre 2023

I. Mouvement circulaire

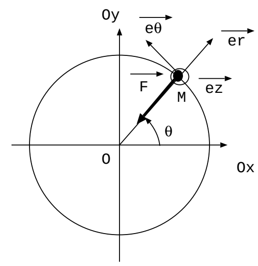
1. Position: $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$

Vitesse: $\overrightarrow{v}(M) = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Accélération: $\overrightarrow{a}(M) = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$

2. L'électron ne subit que la force électrostatique qui est attractive car les charges sont de signes opposées, cette force s'écrit: $\overrightarrow{F} = \dfrac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}\overrightarrow{e_r} = \dfrac{-3e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}\overrightarrow{e_r}$.

L'identification avec l'énoncé donne $K = \dfrac{3e^2}{4\pi\epsilon_0}$.



2.a. La RFD appliquée à l'électron s'écrit $m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{F}$ soit $m(\dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} - m\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}) = \dfrac{-K}{R^2}\overrightarrow{e_r}$.

On projette selon $\overrightarrow{e_\theta}$: $\dfrac{dv}{dt} = 0$ donne que la vitesse est constante

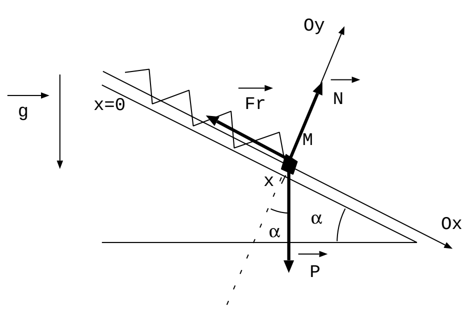
On projette selon $\overrightarrow{e_r}$:$-m\dfrac{v^2}{R} = -\dfrac{K}{R^2}$ soit $v = \sqrt{\dfrac{K}{mR}} = \sqrt{\dfrac{3e^3}{4\pi\epsilon_0 mR}}$.

L'électron décrit un cercle à vitesse constante, la période du mouvement est égale à la distance parcourue sur une période (soit $2\pi R$: périmètre du cercle) divisée par la vitesse d'où $T = \dfrac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^3}{K}}$.

2.b. L'énergie mécanique de l'électron est la somme de son énergie potentielle $E_p = \dfrac{-K}{R}$ et de son énergie cinétique $E_c = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{K}{2R}$. Soit $E_m = \dfrac{-K}{R} + \dfrac{K}{2R} = -\dfrac{K}{2R} = -\dfrac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

II. Oscillateur harmonique

1.



M subit son poids $\overrightarrow{P}$, la réaction normale au plan incliné $\overrightarrow{N}$ (la réaction tangentielle est nulle car il n'y a pas de frottement) et la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(x - l_0)\overrightarrow{e_x}$.

2. La RFD appliquée à M dans le référentiel d'étude supposé galiléen s'écrit: $m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_r}$ avec $\overrightarrow{a}(M) = \ddot{x}\overrightarrow{e_x}$.

On projette sur Ox: $m\ddot{x} = \overrightarrow{P}.\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{N}.\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{F_r}.\overrightarrow{e_x}$

$m\ddot{x} = mg\cos(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) + 0 - k(x - l_0)$

soit $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = g\sin\alpha) + \dfrac{k}{m}l_0 = \dfrac{k}{m}(l_0 + \dfrac{mg\sin\alpha}{k})$

Par identification avec l'énoncé on a $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ soit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $x_e = l_0 + \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$. ω_0 représente la pulsation propre de l'oscillateur harmonique et x_e la position d'équilibre, on a $x_e > l_0$, effectivement le ressort est étiré dans sa position d'équilibre sur le plan incliné.

3. L'équation différentielle à résoudre est celle d'un oscillateur harmonique avec un second membre. La solution présente:

- une solution particulière que l'on obtient en faisant $\ddot{x} = 0$ soit $x_p = x_e$

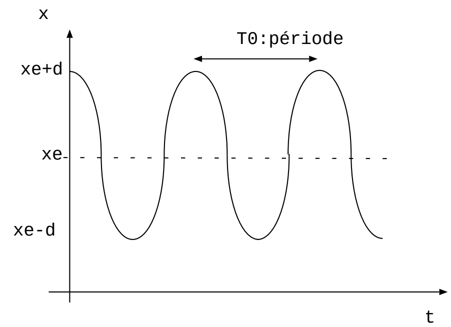
- une solution générale solution de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ soit $x_g = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

On a donc $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_e$. On trouve A et B avec les conditions initiales. On a aussi $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

$x(t=0) = x_e + d = x_e + A$ soit $A = d$

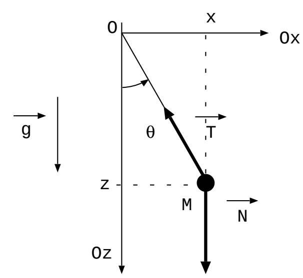
$\dot{x}(t=0) = 0 = B\omega_0$ soit $B = 0$

On a donc $x(t) = d\cos(\omega_0 t) + x_e$



III. **Pendule simple**

1. Le pendule subit son poids : force conservative et la tension du fil qui ne travaille pas (car elle est perpendiculaire au mouvement). Le système est donc conservatif et son énergie potentielle est égale à l'énergie potentielle de pesanteur soit $E_p = -mgz$ ($-$ car Oz est vers le bas et l'énergie potentielle soit augmenter quand on monte) avec $z = L\cos\theta$ soit $E_p = -mgL\cos\theta$.



2. Le système est conservatif donc son énergie mécanique est constante. Son énergie mécanique s'écrit $E_m = \dfrac{mv^2}{2} - mgL\cos\theta$.

Au point de départ: $E_m = 0 - mgL\cos\theta_0$

A la verticale: $E_m = \dfrac{mv_0^2}{2} - mgL$

La conservation de l'énergie mécanique donne $-mgL\cos\theta_0 = \dfrac{mv_0^2}{2} - mgL$ soit $v_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$.

3. On applique la RFD lorsque le pendule est dans sa position verticale: $m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$ avec $\overrightarrow{a}(M) = L\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} - \dfrac{v^2}{L}\overrightarrow{e_\theta}$.

Dans la position verticale, $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_z}$ soit en projection sur Oz on a: $-m\dfrac{v_0^2}{R} = mg - T$ d'où $T = mg + m\dfrac{v_0^2}{L} = mg + 2mg - 2mg\cos\theta_0 = mg(3 - 2\cos\theta_0)$.